Jean Ladrière

Limitaciones internas de los formalismos

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

LIMITACIONES INTERNAS DE LOS FORMALISMOS

Desde hace medio siglo, aproximadamente, las investigaciones sobre el fundamento de la matemática han progresado de tal modo que han abierto para la filosofía nuevos e inagotables campos de trabajo. Ya no es posible preguntarse acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos o sobre los procedimientos propios del pensamiento matemático, sin contar con los resultados de la nueva ciencia que trata de los fundamentos de la matemática.

Esta nueva ciencia, que recoge la reflexión filosófica de lógicos y matemáticos, ha hecho que nazcan problemas nuevos en relación con los cuales el pensamiento filosófico ha de renovar sus procedimientos y conclusiones respecto de la matemática.

De las ideas fundamentales en que se apoyan las nuevas investigaciones, una de las más importantes es la idea de *sistema formal* o *formalismo*. La noción de formalización que

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

Núm. 1. *Quentin Gibson.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION SOCIAL.—(2.ª ed.)
" 2. *M. F. Ashley Montagu.*—LA DIRECCION DEL DESARROLLO HUMANO
" 3. *Gustav Bergmann.*—FILOSOFIA DE LA CIENCIA
" 4. *Christian Bay.*—LA ESTRUCTURA DE LA LIBERTAD
" 5. *Ernest Nagel.*—LA LOGICA SIN METAFISICA
" 6. *David Hilbert y Wilhelm Ackermann.*—ELEMENTOS DE LOGICA TEORICA
" 7. *Vernon Van Dyke.*—CIENCIA POLITICA: UN ANALISIS FILOSOFICO
" 8. *Karl R. Popper.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA
" 9. *R. M. Martin.*—VERDAD Y DENOTACION
" 10. *Ernest Gellner.*—PALABRAS Y COSAS
" 11. *C. D. Broad.*—EL PENSAMIENTO CIENTIFICO
" 12. *John Hospers.*—LA CONDUCTA HUMANA
" 13. *Arthur Pap.*—TEORIA ANALITICA DEL CONOCIMIENTO
" 14. *T. C. Schelling.*—LA ESTRATEGIA DEL CONFLICTO
" 15. *Richard B. Braithwaite.*—LA EXPLICACION CIENTIFICA
" 16. *Milic Capek.*—EL IMPACTO FILOSOFICO DE LA FISICA CONTEMPORANEA
" 17. *Ros Ashby.*—PROYECTO PARA UN CEREBRO
" 18. *Hans Reichenbach.*—MODERNA FILOSOFIA DE LA CIENCIA
" 19. *George Polya.*—MATEMATICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE
" 20. *George L. S. Shackle.*—DECISION, ORDEN Y TIEMPO
" 21. *D. M. Armstrong.*—LA PERCEPCION Y EL MUNDO FISICO
" 22. *Ernest Nagel.*—RAZON SOBERANA
" 23. *Max Black.*—MODELOS Y METAFORAS
" 24. *Haskell B. Curry & Robert Feys.*—LOGICA COMBINATORIA
" 25. *Ludwig Wittgenstein.*—CUADERNOS AZUL Y MARRON
" 26. *Abraham Edel.*—EL METODO EN LA TEORIA ETICA
" 27. *Alfred Landé.*—NUEVOS FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CUANTICA

En preparación:

Wiener y Schadé.—SOBRE MODELOS DE LOS NERVIOS, EL CEREBRO Y LA MEMORIA
Von Wright.—NORMA Y ACCION: UNA INVESTIGACION LOGICA

LIMITACIONES INTERNAS DE LOS FORMALISMOS

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Jean Ladrière

LIMITACIONES INTERNAS DE LOS FORMALISMOS

Estudio sobre la significación del Teorema de Gödel y teoremas conexos en la teoría de los fundamentos de las matemáticas

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
LES LIMITATIONS INTERNES DES FORMALISMES
publicada por Editions Nauwelaerts, Lovaina (Publications Universitaires de Louvain)
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción de
JOSE BLASCO

© EDITORIAL TECNOS, S. A.—1969
O'Donnell, 27.—Tel. 2262923.—Madrid (9)
Dep. legal: M. 13723-1969

Printed in Spain.—Impreso en España por Hijos de E. Minuesa, S. L.—Ronda de Toledo, 24 - MADRID-5

INDICE GENERAL

PROLOGO ... 19

PREFACIO ... 25

CAPITULO I.—INTRODUCCIÓN - LOS SISTEMAS FORMALES ... 33

SECCIÓN 1.—*Las investigaciones sobre los fundamentos* ... 33

1. La teoría de conjuntos y las paradojas ... 33
2. El método axiomático ... 34
3. La logística ... 36
4. Ejemplo de una teoría lógica axiomatizada ... 37
5. Utilidad del método axiomático ... 38
6. Ejemplo de un sistema formal ... 39

SECCIÓN 2.—*Las grandes direcciones de la investigación* ... 42

7. Direcciones de las investigaciones sobre los fundamentos ... 42
8. Axiomática de conjuntos ... 43
9. Logicismo ... 43
10. Intuicionismo ... 44
11. Teoría de la demostración ... 45
12. Formalismo ... 47
13. Formalismo, intuicionismo y teoría de la demostración ... 48
14. Matemática y sistema formal ... 49
15. Los resultados de GÖDEL ... 50

SECCIÓN 3.—*La formalización* ... 51

16. De la axiomática intuitiva al sistema formal puro ... 51
17. Definición y estructura de un sistema formal ... 53
18. Presentación más abstracta ... 54
19. Sistema formal y teoría intuitiva ... 55
20. Presentación de un sistema ... 56
21. Representación de un sistema ... 56
22. Interpretación de un sistema ... 57
23. La noción de *cálculo* ... 57

SECCIÓN 4.—*Interpretación y modelo* ... 58

24. Noción de *modelo* ... 58
25. Ejemplo de modelo ... 59
26. Presentación más abstracta ... 60
27. Modelos isomorfos ... 61
28. Campo de interpretación ... 61
29. Definiciones referentes a la interpretación ... 62

CAPITULO II.—SISTEMA FORMAL Y METATEORÍA ... 63

SECCIÓN 1.—*Las propiedades del sistema formal* ... 63

30. Lengua-objeto y metalengua ... 63
31. Los metateoremas ... 64
32. Demostraciones metateóricas ... 65
33. Sintaxis y semántica ... 66
34. Las propiedades de los sistemas ... 67
35. Coherencia ... 67
36. La ω-coherencia ... 68
37. Saturación ... 69
38. Resolubilidad ... 71
39. Categoricidad ... 71
40. La utilización de un sistema ... 71
41. Observaciones terminológicas ... 72

SECCIÓN 2.—*Principales sistemas formales y formalización de las matemáticas* ... 74

42. Sistemas básicos y sistemas conexos ... 74
43. Las lógicas de esquemas ... 74
44. Las lógicas combinatorias ... 75
45. Potencia relativa de los sistemas ... 76
46. Variables y constantes ... 76
47. Sistemas lógicos puros ... 77
48. Principales resultados metateóricos positivos ... 78
49. Principales resultados metateóricos negativos ... 79

SECCIÓN 3.—*Las paradojas* ... 80

50. Teoremas de limitación y paradojas ... 80
51. Las dos categorías de paradojas ... 80
52. La paradoja del embustero ... 81
53. La paradoja de RICHARD ... 82

SECCIÓN 4.—*La aritmetización y las funciones recursivas* ... 84

54. El principio de aritmetización y la noción de *función recursiva* ... 84
55. El esquema de recursión primitiva ... 85
56. Otros esquemas de recursión ... 86
57. Las funciones recursivas primitivas ... 88

58. Aritmetización recursiva ... 88
59. Las funciones recursivas generales ... 89
60. La noción de *predicado recursivo* ... 90
61. La noción de *clase recursiva* ... 90
62. La enumerabilidad recursiva ... 91
63. El operador *Min* y su utilización ... 92
64. Las funciones parcialmente recursivas ... 93
65. La utilización metateórica de las funciones recursivas ... 94

CAPITULO 3.—EL TEOREMA DE GÖDEL ... 95

SECCIÓN 1.—*Primera idea del Teorema* ... 95

66. Alcance general del Teorema de GÖDEL ... 95
67. La demostración de FINSLER ... 96
68. La aritmetización ... 97
69. Aritmetización y metateoría ... 98
70. Notaciones utilizadas por la aritmética recursiva ... 100
71. Un criterio de verdad para los enunciados aritméticos ... 101
72. Mecanismo general de la demostración de GÖDEL ... 102
73. Condiciones de la demostración ... 104

SECCIÓN 2.—*El formalismo LFG* ... 105

74. Las constantes del sistema ... 105
75. Las variables del sistema ... 106
76. Morfología de *LFG*. Primera parte: componentes primitivas ... 107
77. Morfología de *LFG*. Segunda parte: reglas de formalización ... 108
78. Componentes introducidas por vía de definición ... 109
79. Axiomas de *LFG* ... 110
80. Reglas de derivación de *LFG* ... 114
81. La noción de *derivabilidad en LFG* ... 114
82. Símbolos abreviativos ... 115
83. Hipótesis hechas sobre *LFG* ... 116

SECCIÓN 3.—*Aritmetización de LFG y Lema de Gödel* ... 117

84. Aritmetización del sistema *LFG* ... 117
85. Representación de las propiedades metateóricas en *LFG* ... 118
86. Teoremas preparatorios ... 119
87. Ejemplo de representación recursiva ... 120
88. Operaciones recursivamente representables ... 121
89. Propiedades recursivamente representables ... 122
90. Lema de GÖDEL ... 123

SECCIÓN 4.—*El Teorema de Gödel y su demostración* ... 125

91. Enunciado del Teorema ... 125
92. La función abreviada de sustitución ... 125

93. Construcción de la proposición $\mathfrak{G}^*$ ... 127
94. Sentido de la proposición $\mathfrak{G}^*$ ... 129
95. Observación auxiliar ... 131
96. Demostración del carácter indecidible de $\mathfrak{G}^*$ ... 131

SECCIÓN 5.—*Las críticas opuestas a la demostración de Gödel* ... 133

97. La crítica de PERELMAN ... 133
98. Discusión de esta crítica ... 135
99. La crítica de HELMER a PERELMAN ... 136
100. La crítica de BARZIN. Principio de esta crítica ... 137
101. La crítica de BARZIN. Detalle de la argumentación ... 139
102. Conclusiones de BARZIN y observación de FITCH ... 142
103. Discusión de la crítica de BARZIN ... 143
104. La crítica de KUCZYNSKI ... 145
105. Observación de CHURCH ... 146

CAPITULO IV.—LAS GENERALIZACIONES DIRECTAS DEL TEOREMA DE GÖDEL ... 149

106. Introducción ... 149

SECCIÓN 1.—*Generalidad de las hipótesis* ... 149

107. Hipótesis fundamentales del Teorema de GÖDEL ... 149
108. Análisis de la tercera hipótesis ... 150
109. Carácter general del Teorema de GÖDEL ... 152
110. Aspectos semánticos de la demostración de GÖDEL ... 152
111. Extensiones y generalizaciones del Teorema de GÖDEL ... 153

SECCIÓN 2.—*El Teorema de Kleene* ... 154

112. La función y el predicado de KLEENE ... 154
113. El lema de KLEENE ... 155
114. Hipótesis del Teorema de KLEENE ... 157
115. Enunciado y demostración del Teorema de KLEENE ... 158

SECCIÓN 3.—*Los Teoremas de Rosser* ... 159

116. El primer Teorema de ROSSER ... 159
117. Enunciado del segundo Teorema de ROSSER. Los predicados *Fdr-R* y *Dem-R*.. 161
118. Propiedades de los predicados *Fdr-R* y *Dem-R* ... 162
119. Construcción de la proposición $\mathfrak{G}_R^*$ ... 164
120. Demostración del segundo Teorema de ROSSER ... 165
121. Caracterización de ciertas clases de proposiciones ... 167

SECCIÓN 4.—*Extensión del Teorema de Gödel a lógicas no-constructivas* ... 168

122. Lógicas no-constructivas de ROSSER ... 168
123. Existencia de proposiciones indecidibles en estas lógicas ... 170

SECCIÓN 5.—*Proposiciones indecidibles de forma simple* 171

124. Proposiciones indecidibles correspondientes a problemas elementales 171
125. El procedimiento de KALMÁR. Hipótesis de KALMÁR 172
126. El Teorema de KALMÁR 173

CAPITULO V.—EL COROLARIO DE GÖDEL Y LA TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN 177

SECCIÓN 1.—*El Corolario de Gödel* 177

127. Enunciado y demostración del Corolario de GÖDEL 177
128. Extensiones del Corolario de GÖDEL 179

SECCIÓN 2.—*Consecuencias para la Teoría de la Demostración* 180

129. Aplicación del Corolario de GÖDEL al formalismo de la teoría de números clásica 180
130. Procedimientos finitistas y procedimientos constructivos 181
131. Nueva significación de la Teoría de la Demostración 183
132. La demostración por modelo directo y el procedimiento de la reducción 184
133. Interpretación del sistema *LFN* en la Aritmética intuitiva 185
134. Interpretación del sistema *LFN* en la Aritmética intuicionista 186

SECCIÓN 3.—*La demostración de Gentzen* 188

135. El sistema de GENTZEN 188
136. Programa de la demostración 190
137. Primera parte de la demostración 190
138. Segunda parte de la demostración. La noción de *reducción* 191
139. Segunda parte de la demostración. La inducción transfinita 194
140. La demostración de GENTZEN y el Corolario de GÖDEL 195

SECCIÓN 4.—*La teoría de la demostración y la noción de la constructividad* 196

141. Los dos conceptos del infinito 196
142. Ejemplo de una interpretación constructiva 197
143. El método de GENTZEN y la Teoría de la Demostración 198
144. Métodos formales e intuición 199

CAPITULO VI.—EL TEOREMA DE CHURCH Y LOS PROBLEMAS DE DECISIÓN 201

145. Introducción 201

SECCIÓN 1.—*Funciones λ-definibles y funciones M-definibles* 202

146. El cálculo *LF-λ* 202
147. Las funciones λ-definibles 204
148. Las funciones M-definibles 205
149. Teoremas de equivalencia 207
150. Noción de *procedimiento efectivo* 208

SECCIÓN 2.—*El Teorema de Church* ... 209

151. Enunciado del Teorema ... 209
152. Demostración del Teorema ... 210
153. Aplicación del Teorema de CHURCH al problema de la decisión ... 212
154. Corolarios del Teorema de CHURCH ... 214

SECCIÓN 3.—*Los resultados de Kleene y de Turing* ... 214

155. Los resultados de KLEENE ... 214
156. El Teorema de TURING ... 216
157. Demostración del Teorema de TURING ... 217
158. Corolario del Teorema de TURING ... 218
159. Los resultados de TURING y el problema de la decisión ... 219

SECCIÓN 4.—*Los métodos de Post* ... 221

160. Sistemas canónicos y sistemas normales ... 221
161. El problema de la decisión para los sistemas canónicos y para los sistemas normales ... 223
162. Conjuntos recursivos y conjuntos recursivamente enumerables ... 225
163. El Teorema de POST ... 227
164. Consecuencias de las proposiciones indecidibles ... 229

SECCIÓN 5.—*Problemas insolubles* ... 231

165. Problemas de decisión insolubles ... 231
166. Teorías no-resolubles y teorías esencialmente no-resolubles ... 231
167. El problema insoluble de SKOLEM ... 233
168. El problema de THUE y el problema de las palabras para los semigrupos ... 234

SECCIÓN 6.—*Resultados positivos - Grados de insolubilidad* ... 236

169. Resultados positivos a propósito del problema de la decisión para los sistemas formales ... 236
170. Grado de insolubilidad de un problema insoluble. Teoremas de TURING y TARSKI ... 237
171. Grados de insolubilidad de los problemas de decisión insolubles relativos a conjuntos recursivamente enumerables ... 238

CAPITULO VII.—LA TEORÍA DE LOS PREDICADOS DE KLEENE ... 241

SECCIÓN 1.—*El Teorema de la estratificación* ... 241

172. Introducción ... 241
173. Lema fundamental de la Teoría de predicados de KLEENE ... 242
174. Enunciado del Teorema de estratificación ... 244
175. Demostración del Teorema de estratificación ... 245

SECCIÓN 2.—*Teoría de predicados de Kleene y los Teoremas de limitación* 248

176. Teoría de un predicado 248
177. La forma de KLEENE del Teorema de CHURCH 250
178. La forma de KLEENE del Teorema de GÖDEL 251
179. Construcción de proposiciones indecidibles por el método de KLEENE 252
180. Eliminación de la hipótesis de ω-coherencia 255
181. Caso en que la forma de KLEENE del Teorema de CHURCH se reduce a la forma de KLEENE del Teorema de GÖDEL 255

SECCIÓN 3.—*Extensión de la forma de Kleene del Teorema de Gödel a Lógicas no-constructivas y límite de esta extensión* 256

182. Lógicas ordinales 256
183. Los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI 257
184. Generalización por MOSTOWSKI del Teorema de estratificación de KLEENE. ... 259

CAPITULO VIII.—EL MÉTODO SEMÁNTICO. TEOREMAS DE TARSKI Y DE MOSTOWSKI 261

SECCIÓN 1.—*El método semántico* 261

185. La noción de *verdad* en un sistema formal 261
186. Definición del predicado *Vri* para el sistema *LFN-V* 262

SECCIÓN 2.—*Los Teoremas de Tarski* 267

187. Los resultados de TARSKI. El formalismo *LFT* 267
188. El Lema de TARSKI 268
189. Existencia de clases incompletas en *LFT* 269
190. La generalización semántica del Teorema de GÖDEL 270
191. Extensión de esta generalización a lógicas no-constructivas 273
192. Ampliaciones sucesivas del sistema *LFT* 274
193. El Teorema de la verdad 276

SECCIÓN 3.—*El Teorema de Mostowski. Comparación entre las diferentes formas del Teorema de Gödel* 277

194. Formulación del Teorema de GÖDEL en términos de clases de proposiciones 277
195. La forma de MOSTOWSKI del Teorema de GÖDEL 280
196. Los lemas de MOSTOWSKI 281
197. Demostración de la forma de MOSTOWSKI del Teorema de GÖDEL 282
198. Las diferentes formas del Teorema de GÖDEL. Comparación de estas formas entre sí. 284

SECCIÓN 4.—*Demostración directa del teorema de la verdad. Nueva forma del Teorema de Gödel* 286

199. Demostración del teorema de la verdad partiendo del lema de TARSKI 286
200. Demostración autónoma del teorema de la verdad 287

201. Nueva forma del Teorema de GÖDEL demostrable por el método semántico ... 289
202. Demostración de esta nueva forma del Teorema de GÖDEL ... 289

CAPITULO IX.—OTROS HECHOS DE LIMITACIÓN ... 295

203. Introducción ... 295

SECCIÓN 1.—*El resultado de Tarski sobre la noción de definible* ... 296

204. Noción de *definible* ... 296
205. El Teorema de TARSKI sobre esta noción ... 297

SECCIÓN 2.—*El Teorema de Löwenheim-Skolem* ... 299

206. El Teorema de LÖWENHEIM y su generalización por SKOLEM ... 299
207. Demostración del Teorema de SKOLEM ... 300
208. Nueva forma del Teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM ... 302
209. La paradoja de SKOLEM y la relatividad de los conceptos matemáticos ... 303
210. Los modelos internos de SHEPHERDSON ... 305
211. Conceptos absolutos de ciertos modelos ... 306

SECCIÓN 3.—*Los Teoremas de Henkin y los modelos no-regulares* ... 307

212. La no-saturación de la lógica de predicados de segundo orden no es una propiedad absoluta ... 307
213. La noción de *campo de interpretación regular* ... 309
214. La noción de *campo de interpretación general* ... 309
215. Los Teoremas de HENKIN ... 311
216. Los modelos no-regulares y el problema de la categoricidad ... 312
217. Los modelos no-regulares y la ω-coherencia ... 314
218. Los resultados de ROSSER y de WANG sobre modelos no-regulares ... 314
219. Los modelos no-regulares y la coherencia ... 316
220. Los resultados de CARNAP sobre la lógica proposicional ... 317

SECCIÓN 4.—*Limitaciones de las lógicas combinatorias* ... 318

221. Saturación combinatoria y saturación deductiva ... 318
222. El Teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY ... 320

SECCIÓN 5.—*Sistemas no-gödelianos. Sistemas de estratificación interna* ... 323

223.—El sistema *LFM* de MYHILL ... 323
224. Los sistemas de estratificación interna ... 324
225. La jerarquía de implicaciones de CHURCH ... 325
226. Papel de la paradoja de RICHARD ... 325
227. La jerarquía de niveles de canonicidad de CURRY ... 328
228. La jerarquía de implicaciones de MYHILL ... 328
229. El sistema de WANG ... 329
230. Observaciones generales sobre el alcance de los resultados precedentes ... 330

CAPITULO X.—SUGERENCIAS FILOSÓFICAS ... 331

231. Ojeada general sobre los hechos de limitación ... 331
232. La interpretación de los hechos de limitación. Observación previa ... 333
233. Intuición y formalización ... 337
234. Significación de los hechos de limitación. La dualidad irreductible de lo intuitivo y lo formal ... 341
235. Razón de ser de los hechos de limitación ... 344
236. Significación y límites del formalismo. Esquema de una problemática de interpretación ... 358

NOTA I.—RESUMEN DE LA MEMORIA DE GÖDEL SOBRE LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES ... 367

237. Introducción ... 367
238. Teorema principal ... 367
1. Descripción del sistema P ... 368
2. Aritmetización del sistema P y teoremas preparatorios ... 369
3. Teorema principal y observaciones ... 370
239. Otros teoremas sobre las proposiciones indecidibles ... 371
1. Teorema sobre las relaciones aritméticas ... 371
2. Teorema sobre las proposiciones aritméticas indecidibles ... 372
3. Teorema sobre el cálculo restringido de funciones ... 372
240. Teorema sobre la demostración de no-contradicción de P ... 372
1. Enunciado y demostración del teorema ... 372
2. Observaciones sobre este teorema ... 373

NOTA II.—LAS EXPOSICIONES NO-TÉCNICAS DEL TEOREMA DE GÖDEL ... 375

241. Exposición de GÖDEL ... 375
242. Exposición de ROSSER ... 375
1. Preliminares ... 375
2. Lema fundamental ... 376
3. Demostración de la forma original del Teorema de GÖDEL ... 377
4. Demostración de la forma de ROSSER del Teorema de GÖDEL ... 378
5. Demostración de la forma de KLEENE del Teorema de GÖDEL ... 378
243. Exposición de BERNAYS ... 379
244. Exposición de WANG ... 380
245. Exposición de BETH ... 382
246. Exposición de FINDLAY ... 383
1. Construcción de un enunciado indecidible no aritmético ... 383
2. Construcción de un enunciado indecidible de forma aritmética ... 385
3. Observaciones ... 385
247. Otras exposiciones y alusiones diversas ... 386

NOTA III—INDICACIONES COMPLEMENTARIAS SOBRE LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES ... 387

248. Teoremas de CHWISTEK ... 387
249. Demostración de MOSTOWSKI ... 388

250. Generalización de CHAUVIN ... 388
251. Generalización de KALMÁR ... 388
252. Resultado de MOSTOWSKI para la Teoría de Conjuntos ... 389
253. Los teoremas de USPÉNSKIJ ... 390
254. La proposición indecidible de KREISEL ... 392
1. El lema y el teorema de KREISEL ... 392
2. El lema de WANG ... 393
3. Forma de WANG del teorema de KREISEL ... 394
255. Las proposiciones indecidibles de WANG ... 396
1. Existencia de proposiciones indecidibles en que interviene la noción de *verdad* ... 396
2. Teorema de WANG sobre la noción de *designación* ... 398
3. Existencia de una proposición indecidible haciendo intervenir la noción de *designación* ... 399
256. Observaciones de HELMER y FINSLER ... 400
257. Proposiciones indecidibles y modelos no-regulares ... 401

NOTA IV.—LA INDUCCIÓN TRANSFINITA ... 405

258. Actualización de algunas nociones sobre los números ordinales ... 405
259. El principio de inducción transfinita ... 406

BIBLIOGRAFIA ... 409

INDICE DE NOTACIONES ... 449

1. *Indicaciones generales sobre las categorías de expresiones utilizadas* ... 449

1.1. Lengua base y lengua formalizada ... 449
1.2. Variables y constantes ... 450
1.3. Elementos pertenecientes a la lengua base ... 450
1.4. Elementos pertenecientes a las lenguas formalizadas ... 452

2. *Indice completo de las notaciones utilizadas* ... 454

2.1. Lenguas utilizadas ... 454
2.2. Símbolos de LB ... 455
2.3. Lenguas formalizadas de tipo clásico ... 467
2.4. Formalismo de la conversión-λ ... 472
2.5. Sistemas canónicos ... 473
2.6. Lógicas combinatorias ... 473

3. *Indice de notaciones*: *Resumen* ... 475

INDICE DE EXPRESIONES UTILIZADAS ... 483
INDICE DE SIMBOLOS ... 519
AXIOMAS Y REGLAS DEL SISTEMA *LFG* ... 539
LISTA DE LOS TEOREMAS, LEMAS Y COROLARIOS ... 541

Τέλειον δ' οὐδεν μὴ ἔχον
τέλος· τὸ δὲ τέλος πέρας.

(ARISTÓTELES, *Física*, Libro III, 207 a.)

NOTA DEL EDITOR

La presente traducción ha tenido en cuenta diversas modificaciones aportadas por el autor al texto de la edición francesa.

La mayor parte de estas modificaciones son consecuencia de sugerencias hechas al autor por amables críticas de los señores H. B. CURRY, J. DOOP, M. HIZ y A. MOSTOWSKI, y a las observaciones críticas señaladas en un informe de M. J. HEIJENOORT (publicado en *The Journal of Philosophy*, vol. 66, 1959, págs. 333-337) y en otro informe de M. D. MONK (publicado en *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 25, 1960, página 270).

PROLOGO

El considerable desarrollo experimentado desde hace medio siglo en el campo de la investigación sobre los fundamentos de la matemática, impone nuevas tareas a la crítica filosófica. Ya no es posible preguntarse sobre la naturaleza de los entes matemáticos sin tomar en consideración todos los resultados obtenidos por la nueva ciencia de los fundamentos como consecuencia del esfuerzo conjugado de los lógicos y los matemáticos, preocupados de construir su ciencia sobre sólidos fundamentos. Tales esfuerzos no sólo han contribuido a precisar y clarificar antiguos problemas, sino que han suscitado otros nuevos que la filosofía no puede ignorar. En adelante, la crítica filosófica deberá partir de las adquisiciones de la ciencia de los fundamentos cuando trate de reflexionar sobre la naturaleza de las matemáticas.

Entre las ideas básicas en que se apoya la ciencia de los fundamentos, y a las cuales ha conseguido infundir un contenido preciso, la idea de sistema formal (*o* formalismo) *juega un papel particularmente importante.*

Para superar las dificultades que se oponían al progreso del pensamiento matemático a finales del siglo XIX *no bastaban los procedimientos de definición y demostración que habían sido suficientes hasta entonces y que requerían un importante elemento de intuición; era preciso someter los conceptos y los métodos a un análisis riguroso.*

Pronto se comprendió que un análisis de esta naturaleza no podía llevarse a cabo directamente y que era necesario un rodeo: antes de poder estudiar las propiedades de una teoría matemática determinada (aritmética, geometría o análisis) fue preciso materializarla bajo una forma tangible, inmediatamente accesible a la percepción. De aquí la idea del recurso al método de formalización. En efecto, un formalismo se presenta como un sistema de símbolos sometidos a reglas precisas de manipulación, apareciendo como un objeto determinado cuya estructura se puede estudiar exhaustivamente. Si se consigue representar la teoría matemática que se desea estudiar bajo un sistema de símbolos, se retrotrae el estudio de las propiedades de esta teoría al estudio de las propiedades del sistema formal mediante el cual se representa. Por este procedimiento es posible obtener resultados de un rigor absolutamente satisfactorio.

Partiendo de esta idea, la ciencia de los fundamentos se ha visto situada ante dos categorías de preguntas:

1.ª *¿En qué medida es posible representar las teorías matemáticas mediante sistemas formales?*

2.ª *¿Por qué métodos se pueden estudiar las propiedades de estos sistemas formales?*

En principio podría considerarse un sistema formal como un objeto relativamente sencillo y que el estudio de sus propiedades no comportaría graves dificultades. La historia de la ciencia de los fundamentos desmiente rápidamente esta creencia. Pronto se vio que el método de formalización tiene sus límites: existen límites en el poder de representación de un formalismo, como hay límites en el conocimiento que se puede adquirir de las propiedades de un formalismo, límites que se oponen a la naturaleza de los formalismos.

Existe en la hora actual un cierto número de teoremas pertenecientes a la ciencia de los fundamentos que establecen hechos de limitación. El más importante es un teorema debido a GÖDEL *y demostrado por éste en 1931. Estos resultados, que precisan el sentido del método formal y circunscriben lo que se puede esperar de él, son de extraordinario interés para la crítica filosófica. Hay que guardarse, sin embargo, de pretender sacar demasiadas conclusiones y pretender, por ejemplo, deducir del teorema de* GÖDEL *conclusiones prematuras sobre el carácter de esencial inacabamiento del pensamiento matemático en general. El objeto del presente trabajo es estudiar la significación de estos teoremas de limitación. Una gran parte de sus páginas se ha consagrado a exponer estos teoremas y como el teorema de* GÖDEL *juega entre tales un papel fundamental, la exposición se ha centrado sobre dicho teorema y otros a él conexos. No se trata aquí de un estudio técnico riguroso de lógica matemática, pero nos hemos esforzado en acercarnos a los hechos todo lo posible. La fundamental intención de este trabajo es sugerir ciertos problemas filosóficos, y se correría el riesgo de ignorar el alcance real de los hechos estudiados si no se les considerase en su formulación precisa. Su presentación obedece a una doble exigencia: no presuponer que el lector posea conocimientos previos de lógica matemática y, sin embargo, penetrar profundamente en el mecanismo de las demostraciones para dar de ellas una idea exacta. Las páginas que siguen indican, por tanto, lo que es necesario y suficiente para una completa inteligencia de los principales teoremas de limitación.*

En la preparación de esta exposición sólo se han tenido en cuenta los trabajos aparecidos hasta marzo de 1956.

Tras de un breve prefacio que evoca la situación del pensamiento matemático a principios del siglo actual, un primer capítulo reconstruye a grandes trazos la historia de la ciencia de los fundamentos y da un análisis detallado de la noción de sistema formal.

El CAPITULO II prepara la exposición del Teorema de GÖDEL, *explicando cómo se presenta el estudio de las propiedades de un sistema formal e ilustrando los dos instrumentos de demostración en que se basa el Teorema: las paradojas y las funciones recursivas.*

El CAPITULO III está totalmente consagrado al Teorema de GÖDEL; *tras de haber dado una idea sumaria, se describen de manera precisa las hipótesis en que se apoya, y posteriormente se ofrece el mecanismo de su demostración.*

El CAPITULO IV indica varias variantes del Teorema de GÖDEL *obtenidas partiendo de hipótesis más simples o más generales por* KALMÁR, KLEENE y ROSSER.

El CAPITULO V describe las repercusiones que ha ejercido el Teorema de GÖDEL *sobre la Teoría de la Demostración (cuyo objeto es demostrar el carácter no contradictorio de las diferentes teorías matemáticas), y esboza el método utilizado por* GENTZEN *para establecer la no-contradicción de la Aritmética.*

El CAPITULO VI se refiere a teoremas de limitación de otra especie: Teorema de CHURCH *y conexos, relativos al problema de la decisión.*

El Teorema de GÖDEL y el de CHURCH *han sido replanteados por* KLEENE en *forma de corolarios de un teorema más general que se refiere a la forma de los predicados de un sistema formal. Este Teorema de* KLEENE *y sus consecuencias constituyen el CAPITULO VII.*

El CAPITULO VIII desarrolla otro método de generalización del Teorema de GÖDEL: *el método semántico, que describe las formas generalizadas desarrolladas gracias a este método del Teorema de* GÖDEL por TARSKI y MOSTOWSKI. *También se describe otro teorema de limitación: el Teorema de* TARSKI, *relativo a la formalización de la noción de verdad.*

El CAPITULO IX da una ojeada sobre otros hechos de limitación. En particular, se evoca el Teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM *y de algunos resultados relativos a la teoría de modelos.*

Finalmente, el CAPITULO X abandona el dominio del formalismo para abordar el de la crítica filosófica, y desarrolla ciertas observaciones sugeridas por los hechos descritos en los capítulos precedentes.

Cuatro notas que no encontraban lugar adecuado en el curso de la exposición han sido relegadas al fin de la obra. La primera es un resumen de la Memoria original de GÖDEL; *la segunda se refiere a las exposiciones no técnicas del Teorema de* GÖDEL *y la tercera da algunas indicaciones sobre ciertos trabajos directamente ligados a los resultados de* GÖDEL.

Estas tres notas se destinan simplemente a complementar la información ofrecida en el CAPITULO III. La cuarta nota contiene una exposición del principio de inducción transfinita que se utiliza en los CAPITULOS IV y V. Como se trata de un principio matemático, independiente de la ciencia de los fundamentos, no hubiese estado indicado consagrarle un desarrollo especial en el interior de los capítulos de la obra. Pero como, por otra parte, pertenece a la Teoría de los Números Ordinales, fuera del campo de la matemática elemental, conviene relegarlo a una nota separada.

Los CAPITULOS I a IX están divididos en Secciones y éstas en Parágrafos. El CAPITULO X y las Notas complementarias están divididas solamente en Parágrafos.

Algunos Parágrafos de las Notas Complementarias están divididos, a su vez, en sub-parágrafos.

Las secciones están numeradas según el capítulo a que pertenecen. Así, la expresión "Sección 3-IV" significa "Sección 3 del capítulo IV".

Los parágrafos están numerados de manera continua. Los sub-parágrafos que intervienen en las notas complementarias están numerados con el número del parágrafo a que pertenecen. Las fórmulas están numeradas y llevan el número del parágrafo a que pertenecen. La referencia a una fórmula se hace citando simplemente su número e indicando entre paréntesis el número del parágrafo a que pertenece. Así, la notación "5 (12)" significa "Fórmula 5 del parágrafo 12".

Las notas situadas al pie de las páginas se han numerado de forma continua dentro de cada capítulo.

Los teoremas, lemas y corolarios enunciados de manera explícita se han numerado de manera continua en caracteres romanos. Las referencias se hacen indicando su número y, entre paréntesis, el número del parágrafo en que figuran. Así, la notación "I(86)" significa "Enunciado I del parágrafo 86".

Las convenciones adoptadas para las notaciones y los símbolos utilizados vienen explicadas en el INDICE DE NOTACIONES, situado detrás de la BIBLIOGRAFIA. Este índice supone un cierto número de explicaciones sobre la estructura de los sistemas formales y las diferentes categorías de expresiones que se encuentran en la exposición.

La BIBLIOGRAFIA que se puede encontrar al final de la obra no constituye una bibliografía exhaustiva. Para que hubiese sido completa debieran haberse citado casi todos los trabajos de alguna importancia aparecidos en el dominio de la lógica matemática desde hace cincuenta años, pero esto hubiese sido perfectamente inútil. Efectivamente, existe una bibliografía de lógica simbólica establecida por CHURCH *que indica todos los trabajos pertenecientes al dominio de las investigaciones sobre los fundamentos aparecidos desde los orígenes de estas investigaciones hasta 1936.* CHURCH *ha publicado esta bibliografía en el primer volumen del* Journal of Symbolic Logic, *en 1936, completado en 1938 por una serie de adiciones y correcciones y por tres índices. (V. en la Bibliografía:* CHURCH, *núms. 7 y 9). Para los trabajos aparecidos con posterioridad a 1936, las Actas y las notas bibliográficas del* Journal of Symbolic Logic *(fácilmente utilizables gracias a los índices publicados cada dos años) constituyen un repertorio prácticamente exhaustivo.*

La lista de trabajos que se encontrará al final de este volumen incluye solamente las obras y Memorias que se citan en el curso de la exposición o que han sido utilizadas en su preparación. Se ha tratado de constituir una bibliografía completa (hasta finales de 1955) en lo que concierne al Teorema de GÖDEL *y teoremas conexos* [1]. *Para ello ha sido necesario citar artículos y Memorias en lengua húngara, polaca, rusa o sueca que no han podido ser utilizados directamente, sino sólo a través de las actas del*

[1] Todos los trabajos citados son anteriores a 1956, salvo una Memoria de KEMENY (número 4), que fue publicada en marzo de 1956.

Journal of Symbolic Logic; *estas actas se indican a continuación de los trabajos correspondientes. El sistema de transcripción empleado es el utilizado por el* Journal of Symbolic Logic.

La referencia a una obra o Memoria citada en la BIBLIOGRAFIA se hace citando el nombre del autor y el número de la obra o Memoria en cuestión a nombre de este autor. Así, la indicación "ACKERMANN 5" remite a la Memoria Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. *Las referencias a la BIBLIOGRAFIA se indican en notas de pie de página. Las supresiones en las citas se indican mediante puntos situados entre paréntesis.*

El INDICE DE NOTACIONES va seguido de tres tablas: la primera da la lista de autores citados; la segunda indica los términos técnicos que se definen en el curso de la exposición e indica, para cada término, en qué lugar está definido. La tercera da la lista de símbolos utilizados (la significación de estos símbolos se expone en el INDICE DE NOTACIONES). Después de estas tablas figura la lista de axiomas del sistema a que va incorporado el Teorema de GÖDEL *y la lista de teoremas, lemas y corolarios cuyos enunciados figuran en el presente trabajo.*

Los títulos corrientes que figuran a la cabeza de las páginas impares indican, de forma completa o abreviada, el título del capítulo comenzado. Los que figuran en las páginas impares indican, del mismo modo, el título del parágrafo comenzado. Cuando un parágrafo comienza en medio de una página impar, el título de esta página se refiere, naturalmente, al parágrafo anterior.

Todos los nombres propios se han escrito en pequeñas mayúsculas. Los títulos de obras y artículos, las expresiones introducidas por primera vez o tomadas en un sentido especial, las citas integradas en el texto, los enunciados citados en el interior de una frase y los enunciados de todos los teoremas y corolarios que se indican de manera explícita, van en itálicas [2].

Séame permitido expresar aquí mi profunda y respetuosa gratitud al Instituto Superior de Filosofía de Lovaina y a su presidente, Mgr. L. DE RAEYMAEKER. Mi reconocimiento se dirige especialmente a los profesores de este Instituto, del cual he tenido el privilegio de ser alumno. Agradecimiento especialísimo merece el profesor R. FEYS, con el que mi deuda es inmensa. Gracias a su interés incesante, a sus consejos y a su estímulo, este trabajo ha podido ser llevado a término. No solamente ha seguido toda su elaboración, de etapa en etapa, indicándome los caminos a seguir y los escollos a evitar, poniendo a mi disposición su gran saber y sus profundas opiniones sobre todos los problemas que he debido abordar, sino que se ha prestado a leer la primera redacción, sugiriéndome gran cantidad de correcciones, perfeccionamientos y desarrollos. Finalmente, me ha ayudado a corregir las pruebas y a conseguir la definitiva puesta a punto de la obra.

---

[2] En general, los términos técnicos sólo se escriben en itálicas cuando se introducen por primera vez.

Mi reconocimiento se dirige también de manera muy particular al profesor J. DOPP, cuyo apoyo y consejos me han sido muy preciosos —no sólo en la preparación de este trabajo, sino en asuntos de índole diversa— y que me ha ofrecido la ayuda de su ciencia y su benevolencia aceptando leer el manuscrito antes de su impresión, aportando numerosas mejoras y ayudándome en la corrección de las pruebas.

También quedo extremadamente reconocido al profesor E. W. BETH, que ha consentido en conocer este trabajo, sometiéndolo a su aguda crítica y ofreciendo sugerencias apreciables, gracias a las cuales he podido completar o corregir mi exposición en varios puntos importantes; quede constancia aquí de mi agradecimiento.

Quisiera dirigir igualmente la expresión de mi viva gratitud al FONDS NATIONAL BELGE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, cuyo apoyo me ha permitido preparar la presente obra; efectivamente, esta obra se ha concebido y ejecutado mientras yo era beneficiario de una de sus becas de investigador calificado.

Finalmente, todo mi reconocimiento a M. NAUWELAERTS y a sus colaboradores por la solicitud que han aportado a la impresión y edición de esta obra.

J. L.

PREFACIO

Actualizando en 1930, en un artículo consagrado al fundamento de la matemática, una idea ya expresada en 1901 en su célebre comunicación relativa a los Problemas matemáticos [1], HILBERT *escribía: "¿Qué sería de la verdad de nuestro saber, de la existencia y el progreso de la ciencia si no existiese al menos en la matemática una verdad sólida? No es infrecuente observar en los escritos actuales sobre problemas técnicos escepticismo y desaliento en relación a la ciencia; se trata de una cierta especie de ocultismo que considero muy pernicioso. La teoría de la demostración hace imposible una actitud semejante y nos da la convicción profunda de que al menos la inteligencia matemática no conoce barreras y que puede explorar las leyes de su propio funcionamiento.* CANTOR *ha dicho: la esencia de las matemáticas reside en su libertad. Yo quisiera añadir para que me oyesen los escépticos y los pusilánimes: en las matemáticas no existe el* ignorabimus, *sino que, por el contrario, siempre estamos en situación de contestar todas las preguntas dotadas de sentido, y vemos confirmarse lo que* ARISTÓTELES *había indudablemente presentido: nuestra inteligencia nunca recurre a misteriosos artificios; contrariamente, procede según reglas perfectamente determinadas que se pueden formular explícitamente y que constituyen la garantía de la objetividad absoluta de su juicio"* [2].

La idea directriz que se encuentra expresada en este texto podría ser tomada solamente como hipótesis de trabajo: en tal caso expresaría esta suerte de confianza inicial que hay que conceder a la razón para que la ciencia sea posible, y equivaldría a decir: en toda circunstancia, cualesquiera que sean las dificultades ante las que nos enfrentemos, actuemos como si estuviésemos seguros por anticipado de poder encontrar solución a tales dificultades. Tal hipótesis constituye la condición indispensable de toda investigación racional, y puede decirse que se identifica con la actitud científica: como la ciencia es un proyecto antes de ser un cuerpo de doctrinas o una suma de resultados, surge en el momento en que el hombre da un voto de confianza a su razón para alcanzar mediante su ejercicio metódico la respuesta a los problemas que es capaz de plantearse.

Parece, no obstante, que este texto de HILBERT *deba significar algo más: para* HILBERT, *el pensamiento matemático posee realmente este privilegio de no conocer*

---

[1] HILBERT 2.
[2] HILBERT 10, p. 323.

límite para su poder. No sólo debemos aceptar la hipótesis de un éxito perpetuamente renovado del pensamiento matemático, sino que podemos estar seguros de que es capaz de resolver todo problema cuyo enunciado no sea contradictorio. Esta convicción de HILBERT *se apoya en su concepción del ente matemático: para él, los objetos matemáticos tienen una existencia independiente del pensamiento y de las construcciones a través de las cuales intentamos descubrirlos y describirlos. Todo problema correctamente planteado es un problema referente a cierta situación de hecho inherente al dominio de la realidad matemática considerada, y el examen de esta situación de hecho debe darnos la respuesta al problema planteado. Afirmando que todo problema matemático tiene solución,* HILBERT *afirma simplemente que el pensamiento matemático está ligado a la realidad objetiva que trata de estudiar, de tal suerte que esta realidad le es perfectamente visible en todos sus aspectos. Aquí se trasluce la doctrina platónica de la adecuación de la inteligencia a las ideas. Pero el platonismo de* HILBERT *se queda en este punto. Para él, la realidad matemática no está situada en un mundo ideal, sino que se identifica con la realidad concreta de los signos. Por este motivo, contra lo que admiten* DEDEKIND, FREGE, RUSSELL *y los lógicos en general (para quienes las matemáticas no son sino una parte de la Lógica), afirma la independencia de las matemáticas frente a la lógica. Las operaciones lógicas afectan a objetos que deben ser dados previamente a la intuición y que constituyen precisamente la realidad matemática. La posibilidad de las demostraciones se apoya sobre la captación de estos objetos.*

En su Memoria Sur l'infini, HILBERT *explica que existen condiciones necesarias para el ejercicio de la demostración lógica, y comenta esta afirmación mostrando cómo estas condiciones exigen la existencia misma de los objetos matemáticos.*

"*Reconociendo que existen tales condiciones y que es preciso tenerlas en cuenta, nos encontramos de acuerdo con los filósofos, y en particular con* KANT. *Este había enseñado —y ello constituye una parte integrante de su doctrina— que las matemáticas disponen de un contenido que les es asegurado independientemente de toda lógica y que, por tanto, no pueden fundarse en absoluto sobre la sola lógica, lo que condena por anticipado al fracaso las tentativas de* FREGE *y* DEDEKIND. *En realidad, la condición previa para la aplicación de los razonamientos lógicos es que se dé algo a la representación, a saber: ciertos objetos concretos, extralógicos, que están presentes en la intuición en tanto que datos vividos de forma inmediata y previa a toda actividad del pensamiento. Para que el razonamiento lógico esté dotado de solidez, es necesario que se puedan abarcar estos objetos con la intuición directa en todas sus partes, como algo que no es susceptible de reducción o cuya reducción no es necesaria. La intuición inmediata debe percibir cómo se presentan, cómo se distinguen unos de otros, cómo se suceden o cómo están ordenados entre sí. Tal es la postura filosófica fundamental que yo considero esencial para las matemáticas y para cualquier especie de pensamiento, de comprensión y de comunicación científica. Particularmente en las matemáticas, el objeto de nuestro examen son los signos concretos mismos, cuya forma se nos*

manifiesta inmediata y evidentemente, conforme a nuestra posición fundamental, permaneciendo perfectamente reconocible" [3].

Esta misma idea estaba ya expresada en un texto de 1922, en términos casi idénticos.

"*Para mí —y en esto me opongo totalmente a* FREGE *y a* DEDEKIND— *los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en toda su generalidad y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras —como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos— se puede resumir de esta forma*: en el principio *—y así nos expresaremos aquí—* era el signo" [4].

Como se ve, para HILBERT, *la solidez del pensamiento matemático y la validez de sus pretensiones reside finalmente en la intuición del signo, intuición que disfruta de una evidencia privilegiada.*

Pero, al mismo tiempo que expresan una confianza inquebrantable en las posibilidades de la razón, las manifestaciones que preceden indican la existencia de una cierta duda. Su aparición se explica acaso porque el pensamiento matemático, situado ante ciertas dificultades (ligadas al desarrollo de la teoría de conjuntos), se había visto amenazado de desaliento y escepticismo. La fe manifestada por HILBERT *en el porvenir de la inteligencia matemática ya había sido compartida por todos los matemáticos hasta los últimos años del siglo* XIX. *Descansaba en la aceptación espontánea de ciertas evidencias, unas relativas a la existencia de los objetos matemáticos y otras a los procedimientos lógicos de demostración. En un momento dado, estas evidencias fueron puestas en discusión como consecuencia de determinadas circunstancias que veremos en detalle (Sección 1-I). Entonces se vio que se había concedido excesiva confianza a la intuición y que las evidencias sobre las que se había descansado no podían ser manejadas como criterios de verdad.*

Sin embargo, no se puede suprimir el recurso a la evidencia: toda demostración debe poder sustentarse, en definitiva, sobre evidencias, y lo que se denomina razonamiento no es sino un procedimiento por medio del cual se propaga la evidencia de ciertos términos tenidos directamente por ciertos a otros cuya verdad no se manifiesta de manera inmediata. Y la evidencia se realiza en la intuición: es pues, necesario precisar sobre qué intuiciones hay que apoyarse y justificar el papel que se las atribuye.

Este es el interrogante que el pensamiento matemático se ha visto obligado a proyectar sobre sus intuiciones primeras, dando lugar a lo que se ha llamado la crisis de los fundamentos.

---

[3] HILBERT 7, págs. 170-171.

[4] HILBERT 5, págs. 163.

Los textos de HILBERT *citados anteriormente precisan el verdadero carácter de esta crisis. El término* crisis *no significa en absoluto una peripecia dramática que habría afectado a la historia de las matemáticas y comprometido el progreso de la razón:* HILBERT *se eleva precisamente contra aquellos a quienes las dificultades con que se tropieza inducen a dudar de la razón. Cuando se habla de* crisis, *se quiere decir, simplemente, que un examen crítico de los conceptos básicos y de los métodos de razonamiento se impone necesariamente. Tal examen debe llevar a una revisión del sistema aceptado de evidencias, utilizado como hilo conductor de la investigación, y, por ende, de las intuiciones consideradas como elementales. A los ojos de* HILBERT *esta revisión no debe, por otra parte, afectar a las adquisiciones del pensamiento matemático.*

"*El fin aceptado, a saber, construir las matemáticas sólidamente, es también el mío: yo quisiera devolver a los matemáticos su antigua pretensión de una verdad inatacable, que las paradojas de la teoría de conjuntos han parecido debilitar; pero yo creo que es posible alcanzar este fin conservando íntegramente todo lo que se ha conseguido*" [5].

Palabras que indican claramente cuál era el pensamiento matemático general al finalizar el pasado siglo: no se trata de renunciar a las antiguas perspectivas ni de dudar del poder de la inteligencia matemática, sino de desplazar la zona de las intuiciones de manera que se esté al abrigo de toda sorpresa. Este desplazamiento opera HILBERT *cuando asigna por objeto a las especulaciones de los matemáticos el signo concreto. Si en el pasado se habían suscitado falsas evidencias fue porque se había creído poder conseguir mediante la intuición verdades o conceptos abstractos. Regresando a la intuición sensible del signo, y limitándose estrictamente a ella, puede caminarse por un terreno sólido en que la adecuación entre el pensamiento y el objeto no puede dejar de producirse, asegurando al pensamiento esta objetividad absoluta que debe constituir el ideal del matemático y de cualquier hombre de ciencia.*

Pero ¿cómo operar esta reducción necesaria de las verdades matemáticas abstractas en el dominio de la intuición sensible? Aquí surge la distinción establecida por HILBERT *entre* matemática *y* metamatemática, *distinción que da todo su sentido a su teoría del objeto-signo.*

"*Dos puntos de vista se presentan aquí (en la empresa del fundamento de las matemáticas).*

En primer término: *todo lo que hasta aquí ha constituido la matemática propiamente dicha queda estrictamente formalizado de manera que la* matemática propiamente dicha *o matemática en sentido estricto se convierte en un cuerpo de fórmulas demostrables* (...).

En segundo lugar: *a esta matemática propiamente dicha viene a añadirse una disciplina en cierto sentido nueva, una* metamatemática *que sirve para asegurar la verdad de aquélla, protegiéndola del terror de interdicciones inútiles y de las difi-*

[5] HILBERT 5, pág. 160.

cultades creadas por las paradojas. En esta matemática, contrariamente a lo que se hace en los procedimientos de razonamiento puramente formales de la matemática propiamente dicha, se aplica un razonamiento intuitivo que se utiliza para establecer el carácter no-contradictorio de los axiomas" [6].

Al nivel de la metamatemática *se verifica lo que* HILBERT *denomina objeto-signo, y por su intermedio se encuentra realizada la reducción necesaria de lo abstracto a lo concreto: representando los conceptos y los razonamientos matemáticos por medio de una simbólica apropiada, se reemplazan las pseudointuiciones de antaño por el examen de configuraciones tangibles cuyas propiedades están inmediatamente ligadas a la intuición sensible pura.*

Podemos situarnos —escribe HILBERT— *"en un nivel de consideraciones más elevado respecto al cual los axiomas, las fórmulas y las demostraciones de las teorías matemáticas se convierten en objetos de un examen intuitivo. Pero para ello debemos, ante todo, reemplazar los razonamientos intuitivos habituales de las teorías matemáticas por fórmulas y reglas. Dicho de otro modo: debemos traducirlos en formalismos, es decir, realizar una formalización estricta de todas las teorías matemáticas, comprendidas sus demostraciones, de suerte que los razonamientos y las construcciones conceptuales de las matemáticas queden integrados en el edificio de la matemática como constituyentes formales según el modelo del cálculo lógico (...). De esta manera, las consideraciones intuitivas, que, como es evidente, nunca pueden ser totalmente evitadas o eliminadas, se encontrarán desplazadas a otro terreno, a un nivel en cierto sentido más elevado, y al mismo tiempo será posible en la matemática una separación rigurosa y sistemática entre las fórmulas y las demostraciones formales, de una parte, y las consideraciones intuitivas, de otra"* [7].

Más adelante, al explicar cómo se puede establecer el carácter no-contradictorio de una teoría matemática, HILBERT *añade: "Para alcanzar nuestro fin, debemos considerar las demostraciones en tanto que tales como objeto de nuestro examen: así concluiremos en una especie de* teoría de la demostración, *que se ocupará de las operaciones que se pueden efectuar sobre las demostraciones mismas (...). En nuestro estudio actual, es la misma demostración la que se transforma en algo concreto y cuantificable; las consideraciones intuitivas sólo se hacen sobre la demostración. De la misma manera que el físico examina sus aparatos y el astrónomo su lugar de observación, igual que el filósofo hace la crítica de su razón, así, en mi opinión, el matemático no puede asegurarse de la solidez de sus proposiciones más que mediante una crítica de la demostración. Esta necesidad fundamenta la teoría de la demostración"* [8].

Si se acepta el punto de vista de HILBERT, *el dominio de la intuición que nos ofrece evidencias simples e irreductibles queda en adelante perfectamente definido: se trata del dominio de la matemática. Si bien el punto de vista hilbertiano no re-*

[6] HILBERT 5, pág. 174.
[7] HILBERT 5, pág. 165.
[8] HILBERT 5, págs. 169-170.

presenta la única posición adoptada en materia de fundamento matemático, no deja de revestir un alto interés histórico por el gran papel que ha desempeñado en el desarrollo de las investigaciones formalistas. Indudablemente, el término metamatemática *ha adoptado actualmente un sentido más amplio que el atribuido por* HILBERT, *y a fin de evitar todo equívoco hablaremos en adelante de la* teoría de los sistemas formales. *Pero la idea central continúa siendo la misma: se trata de estudiar las propiedades de un objeto que se presenta bajo una forma concreta. No preocupa ya la significación de los símbolos utilizados, sino solamente sus configuraciones y la manera en que pueden atribuirse, combinarse, intercambiarse y sustituirse los unos a los otros.*

En los sistemas formales se ha podido ver reproducirse el mismo fenómeno que se había podido observar a propósito de los objetos matemáticos de tipo elemental (números, conjuntos, límites, etc.); evidencias que se tenían por inmediatas se ha demostrado que eran ilusorias. Los sistemas formales que anteriormente parecían objetos extraordinariamente simples, derivados de una teoría completamente elemental de las combinaciones, han ido descubriendo poco a poco una estructura infinitamente más compleja. Los métodos que ha sido preciso aprontar para estudiar sus propiedades han superado con extrema rapidez el estadio de los razonamientos elementales, manifestando propiedades muy diferentes de las que se creía poder atribuir a los sistemas formalizados bajo la fe de las intuiciones iniciales.

Para HILBERT *no había duda de que se podría llegar a transcribir en el cuadro de un sistema simbólico apropiado el conjunto de las matemáticas existentes, y que se llegaría, mediante procedimientos relativamente simples, a establecer el carácter no-contradictorio de las matemáticas basándose sobre el examen de tal sistema. Las investigaciones realizadas para hacer efectivo este programa han revelado que el método de formalización está sujeto a ciertas limitaciones.*

De forma muy aproximada, puede decirse que estas limitaciones se reducen a lo siguiente: no es posible formalizar completamente una teoría matemática cuando ésta ha llegado a un cierto nivel de complejidad. En determinados casos, el modelo simbólico no consigue representar de manera adecuada los nexos deductivos que existen en el seno de la teoría bajo su forma intuitiva, no formalizada. En otros casos, el modelo fracasa cuando trata de representar ciertos conceptos intuitivos de la teoría. En cualquier caso, no se puede hacer abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar. Llega un momento de la interpretación que no puede ser puesto entre paréntesis. El recurso a la pura intuición del signo, tal como lo entendía HILBERT, *no es suficiente. La utilización del método formal marca un progreso evidente, y ha permitido obtener un cierto número de precisiones de largo alcance sobre la estructura de las teorías matemáticas, pero no dispensa a la matemática de mantener el contacto con ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar.*

La tarea de formalización, llevando a una situación análoga a la que pretendía resolver la distinción hilbertiana de la matemática y la metamatemática, retrotrae la posición hilbertiana a su punto de partida. Si el sistema formal desborda lo que

pretendía reconocer a su través, la intuición del signo, quiere decir que remite a una capa más profunda de intuición que se confunde con la misma ruta de la razón matemática.

Esto tal vez quiera decir que la razón matemática no pueda hacerse a sí misma suficientemente clara por el hecho de no ser capaz de agotar su objeto. Pero le es posible, sin duda —y aquí reside todo el sentido de su empresa—, arrojar sobre su objeto una claridad cada vez mayor que, progresivamente, le permite perfeccionar el conocimiento de su propio propósito.

Pero la naturaleza misma de la razón es tal, que su objeto no cesa de desbordarla: y como no está en el poder de la inteligencia matemática situar ante sí el objeto matemático total, tampoco puede reflejarse totalmente en un modelo objetivo que exprese adecuadamente su propósito. Estas dos limitaciones son solidarias y están indicadas simultáneamente por las limitaciones que contiene, en su propio nivel, la teoría de los sistemas formales.

Naturalmente, la existencia de estas limitaciones no pone en duda la creencia proclamada por HILBERT *en la resolubilidad de todo problema matemático. Cuando* HILBERT, *en su Memoria sobre* Los Problemas Matemáticos, *desarrolla esta idea, precisa lo que hay que entender por esto: o bien se puede dar al problema una solución efectiva, o bien se puede demostrar que no es posible resolverlo por los métodos propuestos. Así, el célebre teorema de* GALOIS, *que demuestra la imposibilidad de resolver las ecuaciones de 5.º grado por el procedimiento de los radicales, constituye una auténtica solución del problema planteado por las ecuaciones de 5.º grado. Varios resultados de los que se tratará más adelante son del mismo género, demostrando la imposibilidad de resolver ciertos problemas mediante los métodos conocidos. Cuando se establece que no es posible formalizar íntegramente una teoría, se muestra en qué sentido preciso debe entenderse esta imposibilidad y por qué mecanismo se explica, lo que constituye un resultado perfectamente positivo.*

El interés de los resultados concernientes a las limitaciones de los formalismos reside en haberse producido en el ámbito de la teoría de los formalismos y por los métodos propios de esta teoría. Esto es lo que autoriza a hablar de limitaciones internas.

Existen varias categorías de limitaciones, pero es posible seleccionar de entre ellas ciertas analogías que permitan entrever el carácter fundamental de este fenómeno de limitación.

El primer resultado —que continúa siendo uno de los más decisivos— fue obtenido por GÖDEL *en un teorema que posteriormente sería generalizado de diversos modos. Otros resultados fueron conseguidos por* CHURCH, KLEENE, TURING *y* MOSTOWSKI. KLEENE *llegaría a establecer una conexión entre estas dos categorías de hechos. Una tercera categoría de resultados fue obtenida por* TARSKI.

KLEENE, ROSSER *y* CURRY *han puesto en evidencia un hecho de limitación que presenta muchas analogías con los precedentes, refiriéndose a formalismos de otro tipo.*

Finalmente, LÖWENHEIM *y* SKOLEM, *y después* HENKIN, ROSSER *y* WANG *han obtenido resultados altamente significativos en relación al asunto que nos ocupa.*

Estos descubrimientos han influenciado intensamente las investigaciones formales, y sus consecuencias contribuyen ciertamente a explicar su significación, y, por supuesto, de manera más general, la significación del mismo método formal.

Antes de abordar la exposición del Teorema de GÖDEL, *conviene situarlo en el conjunto de la teoría de los fundamentos, dar algunas indicaciones sobre la naturaleza del método formal y sobre un concepto que juega un importante papel en este tipo de investigaciones: el concepto de función recursiva.*

CAPÍTULO I

Introducción—Los sistemas formales

SECCIÓN 1.—LAS INVESTIGACIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS.

1. LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LAS PARADOJAS.

El desarrollo de las matemáticas durante el siglo XIX se ha caracterizado por un doble esfuerzo: independización de las estructuras fundamentales del análisis (álgebra abstracta, topología, teoría de conjuntos) y crítica de los conceptos básicos (trabajos de CAUCHY, RIEMANN, WEIERSTRASS, DEDEKIND, CANTOR).

El desarrollo del Análisis exigía el establecimiento de bases sólidas: al trabajo de prospección que se esforzaba en acumular nuevos resultados debía superponerse un trabajo de profundización que iba a precisar el sentido de los conceptos y a crear una herramienta de investigación más rigurosa. La progresión en el sentido del rigor pudo realizarse gracias a una reducción del campo intuitivo, asistiéndose a una regresión de las intuiciones geométricas (que todavía jugaban un importante papel en la introducción de la Teoría de Funciones) a beneficio de las intuiciones aritméticas. Es sabida la famosa frase de KRONECKER: "Dios creó el número entero, y el hombre hizo lo demás". Este retorno a un tipo fundamental de evidencia, una vez operado, se trataba de demostrar por qué procedimientos podían construirse los conceptos más complicados a partir de aquélla. Pero la aplicación de este propósito debía hacer surgir graves dificultades. Por necesidades de la construcción matemática se introdujeron conceptos no criticados que estaban lejos de poder reducirse a la intuición de los números enteros. Particularmente, la noción de infinito, que se introduce en las primeras páginas del Análisis bajo la forma de "paso al límite", parecía inducir dificultades irreductibles. La creación de la Teoría de Conjuntos no tardaría en ponerlas en evidencia.

Ciertos conceptos del Análisis hacen intervenir la idea de totalización (así, cuando se habla de la totalidad de los valores adoptados por una función dentro de un

determinado intervalo). La consideración simultánea de todos los elementos pertenecientes a una determinada categoría (disfrutando de estas propiedades) debía llevar a la formación de la noción abstracta de conjunto [1]. Y ésta, a su vez, debía permitir a CANTOR construir su audaz teoría de los números ordinales y cardinales transfinitos. Pero inmediatamente iban a manifestarse ciertas paradojas. Así, conceptos tales como *conjunto de todos los conjuntos* (de una colección dada de conjuntos) *que no se contienen a sí mismos como elementos* (paradoja de RUSSELL), *conjunto de todos los conjuntos, conjunto de todos los números ordinales (transfinitos) ordenados según su magnitud* (paradoja de BURALI-FORTI), *conjunto de todos los números cardinales*, conducen a contradicciones [2].

La aparición de estas paradojas era particularmente grave, pues ponía en tela de juicio no solamente tal o cual noción particular (como la noción de conjunto), sino procedimientos de razonamiento admitidos hasta entonces como perfectamente correctos por todos los matemáticos.

No era sólo esta o aquella teoría lo que se veía comprometido: era todo el edificio matemático el que se resquebrajaba. E incluso los trabajos críticos del siglo XIX perdían su virtualidad, al revelarse incapaces de conjurar la crisis.

Parecía necesario reemprender el trabajo de fundamentación de manera mucho más radical: era preciso asegurarse, no solamente de las nociones ya muy complejas del Análisis, sino de los mismos procedimientos del razonamiento matemático; era preciso dudar de todo, hasta de las evidencias más elementales.

De aquí la creación de un nuevo campo de estudio: las investigaciones sobre los *fundamentos de las matemáticas.*

Estas investigaciones iban a poder, simultáneamente, apoyarse sobre dos técnicas que el trabajo del siglo XIX había realizado adoptando ideas muy antiguas, poniéndolas a punto y llevándolas a un cierto grado de precisión: el *método axiomático* y la *logística* o lógica formal.

2. EL MÉTODO AXIOMÁTICO.

El *método axiomático,* utilizado con éxito tanto en Algebra como en Geometría, exhumaba el ideal griego del conocimiento científico. Pero, en tanto que la antigua axiomática es una axiomática *de contenido* en que se utilizan conceptos fundamentales cuyo sentido está dado intuitivamente y se afirman proposiciones consideradas como evidentes a propósito de estos conceptos, la axiomática moderna es una axiomática pura: los conceptos que utiliza se introducen todos explícitamente y son definidos únicamente por las relaciones que se establecen entre ellos, sin que jamás se haga referencia a propiedades que se hayan enunciado explí-

[1] V. CAVAILLES 2.

[2] Sobre las paradojas, v. indicaciones más completas en la sección 3-II.

citamente en los axiomas, y, finalmente, éstas no se consideran como evidentes por sí mismas, sino que se hipotetiza su validez para ver lo que es posible deducir de ellas. Las teorías axiomatizadas toman el alcance de sistemas hipotético-deductivos.

El más antiguo ejemplo, y al mismo tiempo el más conocido, de teoría axiomática nos lo dan los *Elementos,* de EUCLIDES. Los trabajos consagrados a los axiomas de la geometría durante el pasado siglo han hecho aparecer que un cierto número de axiomas no habían sido formulados de manera explícita por EUCLIDES (pero utilizados de manera implícita en sus demostraciones) o sólo habían sido formulados de manera imperfecta.

En su célebre trabajo sobre los fundamentos de la Geometría [3], HILBERT ha dado un sistema completo de axiomas para la Geometría euclídea. Este sistema ha representado una etapa muy importante en la puesta a punto del método axiomático.

El sistema de axiomas establecido por PEANO para la aritmética elemental constituye otra aplicación simple del método axiomático.

El sistema de PEANO comporta los elementos siguientes:

1) Una sucesión ilimitada de variables individuales: X, Y, Z y estas mismas letras afectadas de índices (estas variables representan números enteros cualesquiera, jugando el papel de objetos individuales en relación a los predicados);

2) una constante individual: 0;

3) una variable predicativa: Φ (esta variable representa una propiedad cualquiera de los enteros);

4) un predicado de un solo argumento (que se aplica a un solo objeto): *ser un número entero*;

5) dos predicados de dos argumentos (que se aplican a un par de objetos): *sucesivo de* y $=$.

Los axiomas del sistema son los siguientes:

1. 0 tiene la propiedad de *ser un número entero.*

2. No existe ningún X tal que
X tenga la propiedad de *ser un número entero* y que
0 sea el *sucesivo a* X.

(Dicho de otra forma: 0 no puede seguir a ningún número entero.)

3. Si X tiene la propiedad de *ser un número entero,*
e Y es *sucesivo a* X,
entonces Y tiene la propiedad de *ser igualmente un número entero.*

(Dicho de otra forma: el predicado *sucesivo a* permite reconstruir la sucesión de enteros partiendo de 0.)

---

[3] HILBERT 9.

4. Si $X = Y$
y si Z_1 es *sucesivo a* X,
y Z_2 es *sucesivo a* Y,
entonces $Z_1 = Z_2$.

(Dicho de otra forma: un número entero solamente tiene un solo número sucesivo.)

5. Si 0 tiene la propiedad Φ,
y si, cualquiera que sea el número entero X, basta con que X tenga la propiedad Φ para que el sucesivo a X tenga la misma propiedad,
entonces, cualquiera que sea el número entero Z, Z tiene la propiedad Φ.

(Este es el principio de inducción: cuando una propiedad es cierta para 0, y cuando, siendo cierta para un número lo es también para el sucesivo, entonces es cierta para cualquier número.)

Estos axiomas fijan el sentido de los predicados del sistema.

La utilización de la axiomática permite abarcar de un solo golpe toda la teoría. Para estudiar las propiedades de una teoría, ya no será necesario considerarla como algo acabado y recorrer una a una todas sus etapas. Bastará con considerarla en sus principios, puesto que éstos, habiéndose enunciado explícitamente, pueden quedar perfectamente dominados.

3. La logística.

La *Logística* fue creada por matemáticos que sentían la necesidad de reemprender el estudio de las formas del razonamiento a través de métodos rigurosos análogos a los de las matemáticas. El Algebra siguió de hilo conductor en los primeros trabajos (BOOLE). Esta nueva lógica quedó construida, pues, sobre bases muy diferentes a las de la lógica tradicional: en tanto que ésta considera formas de razonamiento muy próximas a las del discurso natural y se apoya sobre el sentido intuitivo de las operaciones deductivas que utiliza, la lógica moderna se inspira mucho más en las analogías matemáticas que le han permitido fijar sus métodos que en formas de discurso natural, apoyándose únicamente sobre las reglas de manipulación por medio de las cuales define sus operaciones.

Mediante los nuevos métodos, es posible representar ciertas formas clásicas de deducción utilizadas por la antigua lógica (silogismos), pero no se trata de establecer una correspondencia entre estas dos formas de lógica, puesto que no se sitúan al mismo nivel de precisión. El espíritu general de la Logística es analítico: hay que comenzar por estudiar las operaciones completamente elementales y dar después procedimientos que permitan, a partir de ellas, obtener operaciones cada vez más complejas cuyo sentido puede muy bien escapar a la intuición. Lo mismo que en el Algebra, se utiliza una notación simbólica: existen constantes, variables, signos para designar las entidades elementales (proposiciones, predicados, etc.) y signos para designar las operaciones.

Desde sus comienzos, la Logística adoptó la forma del cálculo: se dan ciertas operaciones, definidas por un conjunto de reglas, y se estudian los resultados que se pueden obtener combinando estas operaciones de diferentes maneras.

Pero en seguida la Logística debería adoptar también una forma axiomática y deductiva. Las propiedades de las operaciones fundamentales quedan fijadas por ciertas relaciones, enunciadas a manera de axiomas, y se dan reglas que permitan deducir de estos axiomas proposiciones válidas.

4. Ejemplo de una teoría lógica axiomatizada.

Veamos un ejemplo sencillo de una teoría lógica axiomatizada: una forma de la *lógica de proposiciones,* en la que sólo se utilizan dos operaciones elementales. Esta lógica se presenta como un sistema que comporta los elementos siguientes:

1) Una sucesión ilimitada de *variables* (que representan proposiciones cualesquiera) $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots,$

2) tres *operadores proposicionales* (operadores que permiten obtener, a partir de proposiciones, nuevas proposiciones):

$\vee$ (disyunción: *o*),
$\rightarrow$ (implicación: *si .... entonces*),
$\sim$ (negación: *no*).

Mediante estos elementos se pueden construir ciertas composiciones que se consideran dotadas de sentido y a las que se denomina *proposiciones.*

Los operadores $\sim$ y $\vee$ se consideran no definidos: representan los operadores primitivos del sistema. El operador $\rightarrow$ se considera como una abreviación, y se define mediante los operadores $\sim$ y $\vee$, como sigue:

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$$

Las reglas siguientes definen la noción de proposición relativa a nuestro sistema.

1. Las variables son proposiciones.
2. Si A es una proposición, $\sim$ A es también una proposición.
3. Si A y B son proposiciones,
   $A \vee B$
   y $A \rightarrow B$,

son también proposiciones [4].

Entre estas proposiciones, un cierto número son teoremas del sistema.
(Desde un punto de vista intuitivo: son consideradas válidas.)
Un conjunto de *axiomas* y *reglas de derivación* determina cuáles son los teoremas.

[4] Utilizamos aquí *símbolos sintácticos.* Vid. a este propósito el INDICE DE NOTACIONES, 1.1 y 2.25.2.7. Las letras A y B son las *alfa* y *beta* mayúsculas.

Los axiomas son los siguientes:

1. $\pi_1 \vee \pi_1 \rightarrow \pi_1$ [5].
2. $\pi_1 \rightarrow \pi_1 \vee \pi_2$.
3. $\pi_1 \vee \pi_2 \rightarrow \pi_2 \vee \pi_1$.
4. $(\pi_1 \rightarrow \pi_2) \rightarrow (\pi_3 \vee \pi_1 \rightarrow \pi_3 \vee \pi_2)$.

Por medio de la definición del operador $\rightarrow$, estos axiomas fijan el sentido de los operadores no definidos $\sim$ y $\vee$.

A estos axiomas se añaden dos reglas de derivación:

1. *Regla de sustitución.*

Se puede derivar de un teorema la proposición que se obtiene reemplazando en este teorema una variable, en todos los sitios en que figure, por una proposición cualquiera [6].

2. *Regla de la consecuencia* (o de *separación*).

Si se tiene un teorema A
y un teorema $A \rightarrow B$,
se puede derivar la proposición B [7].

Los cuatro axiomas y todas las proposiciones que es posible obtener de ellos mediante reglas de derivación constituyen los teoremas de la teoría considerada.

(Estos teoremas pueden ser interpretados como formas válidas de razonamiento.)

5. Utilidad del método axiomático.

Utilizando el método axiomático se pueden construir una tras otra las diferentes partes de la lógica, sea por transposición, sea por extensión.

El procedimiento de la transposición se utiliza, por ejemplo, cuando se pasa de la *lógica de proposiciones* a la *lógica de clases*: a los símbolos de la lógica proposicional, que representan proposiciones, se hacen corresponder operaciones referentes a las clases. (Así, a la operación de conjunción *y*, se hace corresponder la *conjunción de clases*: se trata de la operación que transforma dos clases dadas en una nue-

---

[5] Para mayor claridad se debiera escribir: $(\pi_1 \vee \pi_1) \rightarrow \pi_1$.
Sobre las convenciones relativas a paréntesis, vid. INDICE DE NOTACIONES, 2.22.3.

[6] Mediante el operador sintáctico de sustitución, definido en el INDICE DE NOTACIONES en 2.25.4.1, esta regla podría representarse por medio del esquema:

$$\frac{A}{[\Theta/B]\,A},$$

donde el símbolo Θ puede ser reemplazado por una variable que figure en A. Vid., Indice de Notaciones, 2.25.2.2 y 2.25.2.7.

[7] Esta regla puede representarse mediante el esquema: $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$

va clase que comportará todos los objetos contenidos en las dos clases iniciales y solamente éstos.) Mediando esta correspondencia, las diferentes fórmulas del cálculo de proposiciones se convierten en fórmulas del cálculo de clases [8].

El procedimiento de la extensión se utiliza, por ejemplo, para pasar de la *lógica de proposiciones* a la *lógica de predicados*: a los símbolos que representan proposiciones se añaden símbolos que representan individuos y otros que representan predicados, se introducen nuevas operaciones —las operaciones de generalización— y se añaden a los axiomas y reglas de la lógica de proposiciones los axiomas y reglas necesarios para definir el sentido de estas operaciones [9].

Por otra parte, se hace posible homogeneizar la Lógica y la Matemática: es posible integrar en un sistema único axiomas lógicos y axiomas matemáticos, es decir, fijar bajo una misma forma axiomática, a la vez, la naturaleza y propiedades de los entes que se están manejando y las formas de razonamiento consideradas válidas. De esta manera se pasa a la noción de sistema formal [10], en el que la distinción entre Lógica y Matemática desaparece por completo. HILBERT subrayó por primera vez, a propósito de la axiomatización de la Aritmética, la necesidad de unificar las nociones propiamente matemáticas y los procedimientos de deducción utilizados, integrando en un sistema único la Lógica y la Aritmética [11].

6. EJEMPLO DE UN SISTEMA FORMAL.

La Teoría de Proposiciones descrita en el § 4 constituye un sistema formal; este sistema solamente caracteriza nociones lógicas. Veamos otro ejemplo de sistema formal en el que se caracterizan, a la vez, nociones lógicas y nociones algebraicas: se trata de un sistema que corresponde a una teoría elemental de los grupos.

Este sistema supone los siguientes elementos:

1) Una sucesión ilimitada de variables individuales (que corresponden a los elementos del grupo):
$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, y las mismas letras afectadas de índices [12];

2) una constante individual (que corresponde al elemento *unidad* del grupo): *U;*

3) una función de dos argumentos (que corresponde a la operación *producto* del grupo): $\times$;

---

[8] V. DOPP 3, págs. 206-208.

[9] V. § 6, esquemas 9 y 10 y reglas 2 y 3.

[10] Sobre el sentido preciso de esta noción, v. Sección 3-I.

Los términos *formalismo* y *lengua formalizada* se utilizarán como sinónimos de *sistema formal*. No obstante, el término *formalismo* se utilizará también en el sentido de: punto de vista de una formalización estricta. El verbo *formalizar* se utiliza en el sentido de: expresar o representar mediante un sistema formal.

[11] HILBERT 3.

[12] Utilizaremos letras góticas en lugar de itálicas, como en el ejemplo del § 2, para indicar que el sistema que describimos aquí es enteramente formalizado (el del § 2 sólo lo era parcialmente).

4) un predicado de dos argumentos: $=$ (predicado de igualdad);

5) dos operadores proposicionales de un argumento $(E\mathfrak{X})$ (existe un $\mathfrak{X}$ tal que...) y $(\mathfrak{X})$ (para todo $\mathfrak{X}$...) (operaciones de generalización);

6) un operador proposicional de un argumento: $\sim$ y dos operadores proposicionales de un argumento, $\vee$ y $\rightarrow$.

El operador $\rightarrow$ está definido por medio de operadores $\sim$ y $\vee$, como sigue:

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$$

(Los símbolos A y B designan proposiciones cualesquiera.)

Los símbolos de operación $(E\mathfrak{X})$ y $(\mathfrak{X})$ se denominan *cuantificadores.* El primero es el *cuantificador de particularización*; el segundo, el *cuantificador de universalización.*

Un cuantificador que se refiera a la variable $\mathfrak{X}$ se dice *representante de la variable* $\mathfrak{X}$. Una variable que figure en una expresión precedida de un cuantificador que la representa se denomina *ligada.* Una variable no ligada se denomina *libre* [13].

Algunas de las sucesiones formadas mediante estos elementos constituyen *términos.* Mediante estos términos es posible formar las *proposiciones* del sistema. Las reglas siguientes indican el sentido de estas expresiones. Para formular estas reglas utilizaremos *variables sintácticas* [14].

a. Toda variable es un término.

b. La constante U es un término.

c. Si τ_1 y τ_2
son términos, $\tau_1 \times \tau_2$ es también un término.

d. Si τ_1 y τ_2 son términos.
$\tau_1 = \tau_2$ es una proposición.

e. Si A es una proposición que contiene la variable Θ, en tal caso
(Θ) A y
$(E\Theta)$ A
constituyen igualmente proposiciones.

f. Si A es una proposición, $\sim$ A es igualmente una proposición.

g. Si A y B son proposiciones,
entonces A $\vee$ B
y A $\rightarrow$ B
son igualmente proposiciones.

Los símbolos τ_1 y τ_2 designan términos cualesquiera; los símbolos A y B designan proposiciones cualesquiera, y el símbolo Θ designa una variable cualquiera del sistema $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots)$.

El sistema comporta una sucesión de axiomas y reglas. Para formular los axiomas utilizaremos la notación sintáctica. Los axiomas del sistema son todas las proposiciones que se pueden obtener a partir de las expresiones que siguen, reemplazando en ellas las variables sintácticas por una expresión correspondiente del sistema

[13] Ver el INDICE DE NOTACIONES 2.22.1.5 y 2.31.1.3.

[14] Ver el INDICE DE NOTACIONES, 1.1 y 2.25.2.

(por ejemplo, la variable sintáctica para proposiciones A, por la proposición ($\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \times \mathfrak{Z}$) o la variable sintáctica para variables Θ por la variable $\mathfrak{X}$). Estas expresiones son *esquemas de axiomas.*

1. $(\Theta_1)\ (\Theta_2)\ (\mathrm{E}\Theta_3)\ [\Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta_3]$.

(Reemplazando Θ_1, Θ_2 y Θ_3, respectivamente, por $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$, se tiene: cualquiera que sean $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$, existe un $\mathfrak{Z}$ tal que es el producto de $\mathfrak{X}$ y de $\mathfrak{Y}$: el producto de dos elementos de un grupo pertenece al grupo.

2. $(\Theta)\ [\Theta \times U = \Theta]$.

(Reemplazando Θ por $\mathfrak{X}$, se tiene: cualquiera que sea $\mathfrak{X}$, el productos de $\mathfrak{X}$ por U es $\mathfrak{X}$.

Dicho de otra forma: el producto de un elemento cualquiera por el elemento unidad es igual al primer elemento.)

3. $(\Theta_1)\ (\mathrm{E}\Theta_2)\ [\Theta_1 \times \Theta_2 = U]$.

(Reemplazando Θ_1 y Θ_2, respectivamente, por $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Y}$, se tiene: cualquiera que sea $\mathfrak{X}$, existe un $\mathfrak{Y}$ tal que el producto de $\mathfrak{X}$ por $\mathfrak{Y}$ es el elemento unidad. Dicho de otra manera: todo elemento tiene un universo.)

4. $(\Theta_1)\ (\Theta_2)\ (\Theta_3)\ [(\Theta_1 \times \Theta_2) \times \Theta_3 = \Theta_1 \times (\Theta_2 \times \Theta_3)]$.

(Propiedad asociativa.)

5. $\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$.

6. $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$.

7. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B} \vee \mathrm{A}$

8. $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \rightarrow (\Gamma \vee \mathrm{A} \rightarrow \Gamma \vee \mathrm{B})$.

(Los esquemas de axiomas 5 a 8 corresponden a los axiomas 1 a 4 del § 4.)

9. $(\Theta)\ \mathrm{A} \rightarrow [\Theta\ /\ \tau^*]\ \mathrm{A}$.

En este esquema, A es una proposición que contiene a la variable Θ, y τ^* puede ser reemplazada por una variable cualquiera o por la constante U.

Sin embargo, este esquema sólo es válido bajo la siguiente condición: si τ^* es reemplazada por una variable, la variable Θ no puede figurar en una parte de A que sea de la forma $(\tau^*)\ \mathrm{B}\ (\tau^*)$.

(Ya que si así fuese se produciría una confusión.)

(Reemplazando Θ por $\mathfrak{X}$, se tiene: si la proposición A es cierta para todo $\mathfrak{X}$, es cierta para U o para un $\mathfrak{Y}$ cualquiera.

Dicho más simplemente: una proposición cierta para todo objeto en general, es cierta para cualquier objeto en particular.)

10. $\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{E}\Theta)\ [\tau^*\ /\ \Theta]\ \mathrm{A}$.

En este esquema, A es una proposición que contiene τ^*, y τ^* tiene la misma significación que en el esquema 9.

Este esquema está sometido a la misma condición que el esquema 9.

(Reemplazando Θ por $\mathfrak{X}$ y τ^* por $\mathfrak{Y}$, se tiene: si la proposición A es cierta para un cierto $\mathfrak{Y}$, hay al menos un $\mathfrak{X}$ para la cual es cierta.)

El sistema comporta también las reglas de derivación que se señalan a continuación:

1. Regla de consecuencia:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

(Si se dan los teoremas A y (A → B), se puede obtener de ellos la proposición B.)

2. Regla para el cuantificador (Θ):

$$\frac{A \to B}{A \to (\Theta)\, B.}$$

En este esquema, B es una proposición que contiene la variable Θ. El esquema sólo es aplicable si la proposición A no contiene la variable Θ y si esta variable no está ligada en B.

3. Regla para el cuantificador (EΘ):

$$\frac{A \to B}{(E\Theta)\, A \to B.}$$

En este esquema, B es una proposición que contiene la variable Θ. El esquema sólo es aplicable si la proposición B no contiene la variable Θ y si esta variable no está ligada en A.

Como nos hemos valido de esquemas de axiomas, en lugar de axiomas (como en el § 4 anteriormente), podemos prescindir de la regla de sustitución.

Los teoremas del sistema son los axiomas del sistema y cuantas proposiciones pueden deducirse de ellos mediante las reglas de derivación.

La teoría así descrita comporta, por tanto, los axiomas que sirven para caracterizar un grupo (axiomas 1 a 4), axiomas (5 a 8) y una regla (1) que corresponden a una lógica de proposiciones con las mismas posibilidades que la expuesta en el § 4. Finalmente, dos axiomas (9 y 10) y dos reglas (2 y 3) que determinan cómo pueden utilizarse los cuantificadores.

Sección 2.—LAS GRANDES DIRECCIONES DE LA INVESTIGACION.

7. Direcciones de las investigaciones sobre los fundamentos.

Utilizando las dos herramientas de la axiomática y la logística en contextos muy diferentes, las investigaciones sobre los fundamentos se han desarrollado en cuatro direcciones: *axiomática de conjuntos, logicismo, intuicionismo y teoría de la demostración.*

El problema fundamental que se había planteado era el del criterio de la existencia matemática. ¿Cuándo se puede considerar que existe realmente un objeto desde el punto de vista matemático? O también, ¿cómo distinguir un objeto matemático verdadero de un concepto vacío, puramente artificial?

Las diferentes ramas de la teoría de los fundamentos se presentan bajo una forma técnica rigurosa, pero cada una presupone una diferente concepción del ente matemático.

8. Axiomática de conjuntos.

Según el punto de vista de la *axiomática,* existe todo objeto que puede ser construido conforme a los axiomas. Estos dan un contenido riguroso a la noción de conjunto indicando cuáles son los conjuntos básicos y cuáles los procedimientos constructivos que permiten pasar de una clase dada de conjuntos a otros más complejos. Se trata, pues, de axiomas de existencia. Por supuesto, existen también criterios para evitar la construcción de conjuntos "peligrosos" que pueden dar lugar a paradojas.

El sistema básico es el de Zermelo-Fraenkel [15]. A su perfeccionamiento ha contribuido Von Neumann [16] y, más recientemente, Bernays [17]. Estos sistemas utilizan la relación de pertenencia (de un elemento a un conjunto) y de inclusión (de un conjunto en otro).

9. Logicismo.

Para los logicistas, los conceptos matemáticos pueden derivarse totalmente de conceptos lógicos: la matemática no es otra cosa que una parte de la Lógica, y en tal sentido no existen conceptos matemáticos específicos o extralógicos.

El logicismo demuestra que conceptos tales como los de número ordinal y número cardinal pueden derivarse de la lógica de relaciones, y que el concepto de conjunto puede ser reconducido al de función proposicional.

El *logicismo* ha encontrado su expresión más perfecta en la obra monumental de Russel y Whitehead, *Principia Mathematica,* donde se presenta una reconstrucción de todo el análisis clásico [18].

Este sistema comportaba, no obstante, tres axiomas en los que residían todas las dificultades: axioma de infinitud, axioma de elección y axioma de reductibilidad.

---

[15] Zermelo 1, Fraenkel 1.

[16] Von Neumann 3.

[17] Bernays 8.

Existen otros sistemas de axiomas para la teoría de conjuntos; todos van ligados más o menos directamente al sistema de Zermelo-Fraenkel. Señalamos en particular los de Gödel (Gödel 16, 17 y 18) y Bourbaki (Bourbaki 2).

[18] Russell y Whitehead 1.

Este último ha sido abandonado finalmente (al mismo tiempo que la teoría ramificada de tipos) como consecuencia de los trabajos de RAMSEY. Pero, no obstante, los dos primeros parecen introducir elementos extralógicos: la validez del axioma de infinitud se considera perteneciente al dominio individual, y el axioma de elección tiene correspondencias con las funciones proposicionales, válidas solamente en el dominio considerado.

Por otra parte, si bien el sistema permite la eliminación de las paradojas, no está garantizado contra ciertas contradicciones.

10. INTUICIONISMO.

Los *intuicionistas* —BROUWER y su escuela— se apoyan en la tradición del número y de la discontinuidad.

Para ellos, la realidad matemática es independiente del lenguaje matemático y de la lógica, considerando a ésta como un mero instrumento de comunicación.

La existencia matemática la reduce a la constructibilidad: el ente matemático no posee realidad autónoma, existiendo solamente en el acto por el cual es engendrado.

Todo el pensamiento matemático se fundamenta sobre una intuición originaria, la de la división de la unidad, fuente de la dualidad. Esta intuición es esencialmente la de la estructura del tiempo, y constituye la base de la noción de número entero.

El carácter indefinido de la serie de números enteros corresponde a la posibilidad de una repetición indefinida del destello inicial.

Partiendo del número entero, BROUWER construye una definición de continuidad y de la noción de conjunto que le permiten interpretar ciertas partes del análisis clásico y de la teoría de CANTOR. La exigencia de constructibilidad le lleva a rechazar toda consideración de un infinito actual y a admitir solamente el infinito potencial. (De donde su concepción de continuidad como medio del libre devenir: continuo es lo que posee partes que se dejan dividir infinitamente.) Desde el punto de vista lógico, esta exigencia se traduce en el rechazo de la "exclusión de tercero" (para los conjuntos infinitos). No se puede afirmar "a priori" que la solución de un problema matemático deba ser del tipo A o del tipo no-A, mientras no se haya establecido un procedimiento efectivo que permita obtener esta solución [19].

HEYTING construiría un sistema formal que iba a dar un contenido preciso a la noción brouweriana de matemática intuicionista, permitiendo comparaciones precisas con la matemática clásica. Este sistema no comporta el principio de "exclusión de tercero" (o, lo que es lo mismo, el principio de la doble negación) [20].

---

[19] BROUWER 1 a 7, y especialmente 4.
[20] HEYTING 1 y 2.

Los trabajos de KOLMOGOROFF [21], GLIVENKO [22], GÖDEL [23], KLEENE [24] y NELSON [25] han situado exactamente la Aritmética intuicionista en relación a la Aritmética clásica.

Pero los intuicionistas se rebelan a dejarse encerrar en el marco de un sistema; el intuicionismo no agota, en su opinión, los procedimientos admisibles de construcción, y no es posible determinar estos "a priori", por la sencilla razón de que las matemáticas deben considerarse como un proceso en constante devenir. El concepto de constructibilidad evoluciona al mismo tiempo que las matemáticas.

Por consiguiente, el intuicionismo no representa una solución, entre otras, del problema de los fundamentos. Introduce un nuevo estilo matemático que se traduce en la refundición sistemática de todas las teorías.

Precisando el sentido de la exigencia de constructibilidad, y ayudando así a esclarecer el problema del infinito, el intuicionismo ha ejercido una considerable influencia sobre la concepción general de las matemáticas y sobre la teoría de los fundamentos en particular. Pero, al asentarse sobre una construcción lógica más débil, se ha visto abocado a rechazar importantes sectores del Análisis clásico, sacrificio que no se deciden a aceptar la mayoría de los matemáticos.

11. TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN.

La teoría hilbertiana de la demostración tiene la significación de un intento de conciliación. Para HILBERT se trataba a la vez de salvar el conjunto de las matemáticas clásicas (comprendida la teoría transfinita) y de hacer justicia a las críticas constructivas de los intuicionistas (concepción constructivista). HILBERT resolvió el problema proponiendo distinguir tajantemente la teoría del fundamento de las matemáticas en sí mismas. A la matemática clásica, representada mediante formalismos adecuados (que deben englobar la lógica utilizada para la deducción de los teoremas), superpone una *metamatemática,* o *teoría de la demostración,* destinada a estudiar las propiedades de los formalismos a su nivel elemental y, en particular, establecer su no-contradicción [26]. (Se dice que un sistema es no-contradictorio cuando es imposible derivar de él un enunciado y su negación.) Mientras que al nivel matemático se admiten todos los tipos de razonamiento (comprendida la aplicación de la "exclusión de tercero" y el principio de la elección), al nivel matemático el razonamiento deberá adecuarse a prescripciones rigurosamente constructivistas.

Para HILBERT, la existencia matemática está en la no-contradicción. Su concepción es, en realidad, la inversa de la de BROUWER: para HILBERT, el ente matemático tiene existencia en sí, independientemente de los procedimientos de pensamien-

[21] KOLMOGOROFF 1.
[22] GLIVENKO 1 y 2.
[23] GÖDEL 9, 11 y 12.
[24] KLEENE 12, 13, 14 y 16.
[25] NELSON 1.
[26] Ver PREFACIO, págs. 28-29.

to a través de los cuales puede alcanzarse. Como ya se ha visto [27], considera que todo problema matemático tiene solución. Desde el momento en que se da la no-contradicción —es decir, coherencia—, podemos estar seguros de la existencia de un ente matemático, aunque seamos incapaces (provisional o definitivamente, de hecho o de derecho) de construirlo.

Fundamentar las matemáticas equivale, pues, a establecer su no-contradicción. Pero aquí nos vemos obligados a apoyarnos en la intuición y a proceder constructivamente. Esto es posible, pues una teoría matemática formalizada se presenta bajo la forma de un sistema de signos que podemos dominar perfectamente mediante la intuición. En la práctica, el estudio de las propiedades de tal sistema se limitará a la solución de problemas algebraicos y aritméticos elementales.

Para realizar el propósito hilbertiano se impone, ante todo, construir un sistema formal para la aritmética y demostrar su no-contradicción; en un segundo estadio, habrá que extender progresivamente el sistema y la demostración de manera que sea aplicable a cualquier análisis.

Por supuesto, en esta empresa se deberá concluir en un sistema tan poderoso como el de ZERMELO-FRAENKEL o el de RUSSELL-WHITEHEAD, pero habrá que tomar garantías sobre la no-contradicción del sistema.

El principal problema de la teoría de la demostración se centraba evidentemente sobre los criterios de demostración aceptados en el plano de la matemática. En los primeros trabajos de HILBERT, tales criterios eran demasiado rigurosos, mucho más restrictivos que los criterios intuicionistas. No se admiten los razonamientos de inducción completa, sino solamente la utilización de una concurrencia *que se detiene en el infinito*. HERBRAND ha formulado con bastante exactitud los criterios hilbertianos de un *razonamiento intuicionista* (no en sentido brouweriano, sino en el sentido finitista de la escuela de HILBERT). "Entendemos por razonamiento intuicionista el que satisface las siguientes condiciones: siempre se considera un número finito y determinado de objetos y funciones; éstas están perfectamente definidas, permitiendo su definición calcular sus valores de manera unívoca; nunca se afirma la existencia de un objeto sin proporcionar el medio de construirlo; no se considera nunca el conjunto de todos los objetos x de un conjunto infinito; y cuando se dice que un razonamiento (o un teorema) es cierto para todos estos x, quiere decirse que para cada x considerado particularmente es posible repetir el razonamiento general en cuestión que sólo debe ser considerado como prototipo de estos razonamientos particulares" [28].

Las críticas de WEYL [29] muestran que no pudo evitarse recurrir a la inducción completa. En realidad, fue forzoso —como testimonia la historia de la teoría de la demostración— recurrir además a otros procedimientos.

---

[27] Ver PREFACIO.
[28] HERBRAND 4, pág. 3, nota 3.
[29] WEYL 2.

Para establecer sobre estas bases la no-contradicción de la Aritmética, se efectuaron varias tentativas: demostraciones de ACKERMANN [30], VON NEUMANN [31] y HERBRAND [32].

Todas estas tentativas se vieron condenadas al fracaso. Efectivamente, no consiguieron otra cosa que asegurar la no-contradicción de un formalismo restringido, donde el principio de inducción sólo es apto para proposiciones elementales, sin generalización. Los resultados de GÖDEL darían la clave de estos fracasos e impondrían una ampliación de los criterios de la teoría de la demostración.

(NOTA.—A la demostración de HERBRAND hay que ligar una demostración de GENTZEN [33] posterior a los trabajos de GÖDEL y basada sobre la generalización de un teorema de HERBRAND [34].)

12. FORMALISMO.

Estos intentos tienen de común que todos terminan en la construcción de un *sistema formal.* Así se desvanecen las oposiciones, dando lugar a una nueva fase, la del *formalismo.* Puede decirse que la evolución de las investigaciones sobre los fundamentos se ha visto marcada por una eliminación progresiva de las cuestiones filosóficas que dominaron las controversias durante el primer cuarto de siglo, a beneficio de una concepción rigurosamente formalista del problema de los fundamentos.

A través de las oposiciones de escuelas se pueden distinguir dos grandes actitudes filosóficas que corresponden a una dualidad de concepciones tan antigua como las matemáticas mismas: la actitud platónica, que considera el ente matemático como existente en sí, independientemente de los procedimientos mediante los cuales se conoce (y, según este punto de vista, tales procedimientos sólo pueden ser indicadores de existencia), y la actitud empirista, que considera el ente matemático como el producto de una actividad, y sólo le atribuye realidad en el interior de la ley de construcción que permite llegar a él.

La primera actitud es la de HILBERT y los *axiomáticos;* la segunda, la de BROUWER y los *logicistas.*

Para el *platónico,* un sistema formal es solamente la transposición —en el plano del simbolismo— de una realidad matemática autónoma; realidad preexistente, el sistema se esfuerza simplemente en describirla de la manera más adecuada, sin que necesariamente se llegue al conocimiento exhaustivo. Naturalmente, el sistema sólo puede construirse en la prolongación de una matemática intuitiva: es preciso que

[30] ACKERMANN 1.
[31] VON NEUMANN 1.
[32] HERBRAND 4.
[33] GENTZEN 1.
[34] HERBRAND 1.

la realidad matemática se haya manifestado previamente de cualquier manera para que pueda pensarse en describirla rigurosamente.

En realidad, existen varios niveles de formalización, cada uno de los cuales hace más explícita la realidad que en el nivel precedente, pero nunca se puede tener la seguridad de haber aprehendido todo el contenido de lo que se manifiesta.

Para el *empirista,* un sistema formal es solamente una descripción provisional de los procedimientos de construcción admitidos en un momento dado de la historia de la ciencia. Permite dar una definición precisa de estos procedimientos, pero no agota en absoluto las posibilidades del pensamiento matemático; su papel es muy limitado, y la iniciativa reside siempre en el dinamismo intrínseco a la actividad matematizante que despliega las virtualidades de las intuiciones originarias. Por consiguiente, de una y otra parte, subsiste una dualidad entre el sistema y una realidad primera que permanece autónoma; de una y otra parte el sistema permanece extensible porque nunca llega a agotar la realidad en cuestión, ya se trate del dominio trascendente de las entidades formales o de los actos del pensamiento matemático.

Pero, desde el momento en que se considera el sistema formal en sí mismo, esta dualidad se reduce simplemente a la de dos niveles teóricos: nivel intuitivo, correspondiente a un estadio no crítico de las teorías matemáticas, y nivel formalizado, correspondiente a un estadio crítico. Por lo demás, la formalización puede ser más o menos completa.

En esta perspectiva subsisten problemas filosóficos. En particular, habrá que interrogarse sobre el sentido de la relación existente entre estos dos niveles. Pero la teoría de los fundamentos no depende en absoluto de la solución de este problema. Ya no se trata de elegir entre dos interpretaciones del ente matemático, sino de poner a punto simplemente la técnica de formalización.

13. Formalismo, intuicionismo y teoría de la demostracción.

Sin embargo, los antiguos puntos de vista han tenido su utilidad, al precisar ciertas exigencias que conservan su valor en el interior de la postura puramente formalista. Cualquiera que sea la valoración que se haga de las concepciones hilbertiana y brouweriana del ente matemático, queda en pie la necesidad de imponer a todo sistema formal un mínimo de coherencia (condición de no-contradicción) y de retrotraerlo a una base intuitiva. La idea misma de demostración perdería todo su sentido si se pudiese demostrar cualquier cosa sin disponer de criterios verificables para controlar su realización. Indudablemente, no hay ninguna razón para desechar "a priori" principios que escapan a la intuición (como el de la exclusión de tercero o el de elección), pero también es preciso que su aplicación sea controlable.

Aquí, por supuesto, la distinción entre sistema y propiedades del sistema adquiere plena significación. No puede renunciarse de un último recurso a la intuición: las matemáticas reposan, en definitiva, sobre la realización de cometidos concretos. Y

desde tal punto de vista, la aportación de la escuela intuicionista ha sido capital: al insistir sobre la exigencia de constructividad, subrayaba una característica esencial del pensamiento matemático. Pero la puesta a punto del método formal ha permitido, en cierto modo, hacer refluir esta exigencia desde el plano de las concatenaciones matemáticas al plano de las propiedades de los sistemas.

El formalismo reclama para su activo tanto la intención profunda del intuicionismo como el programa de la escuela hilbertiana, pero sin aceptar las limitaciones impuestas por BROUWER al análisis y sin idenficar la esencia matemática con el criterio de no-contradicción. Su punto de vista es diferente.

14. MATEMÁTICA Y SISTEMA FORMAL.

En cierto modo, la relación establecida por HILBERT entre teoría matemática y sistema formal se invierte. En tanto que para HILBERT el sistema formal no es sino un mero intermediario, un instrumento destinado a hacer posible la demostración de la no-contradicción, para el formalista el sistema se sitúa en primer lugar. Indudablemente, su aparición histórica no ha ocurrido sino después de un desarrollo intuitivo de las teorías, pero por sí mismo no comporta ninguna referencia a las fases anteriores. La distinción entre matemática y metamatemática desaparece para dejar lugar a la distinción entre teorías intuitivas y teorías formales. Si la metamatemática es la ciencia de los fundamentos, se hace idéntica a aquello que trata de fundamentar. Fundamentar es formalizar.

No existe ya superposición de una metaciencia y una ciencia previamente construida, sino tránsito de un estadio primitivo de la ciencia a un estadio más crítico.

Ya no se trata de basar las matemáticas sobre unos conceptos filosóficos "a priori" relativos a la existencia matemática, sino de eliminar las causas de las crisis (como las antinomias), prosiguiendo la empresa matemática misma con el mayor rigor posible. Construir las matemáticas no es retrotraer los conceptos matemáticos a conceptos más fundamentales, extramatemáticos, sino practicar el análisis de tales conceptos con tal precisión que en adelante su significado quede definido sin ambigüedad. El verdadero trabajo de fundamentación es, pues, un trabajo de purificación, y su herramienta es el formalismo. Gracias a él se puede reducir la parte de intuición a una suerte de mínimo absoluto: descifrar determinadas configuraciones de signos.

Para el formalista, la matemática se convierte en *la ciencia de los sistemas formales*. Dado un sistema, se pueden estudiar sus propiedades (por ejemplo, la no-contradicción) y también sus interpretaciones posibles. Naturalmente, estos estudios pueden formalizarse, en cuyo caso se procede a una superposición de sistemas. Podemos preguntarnos si esta superposición puede ser eliminada, y, efectivamente, los teoremas de limitación dan a esta pregunta una respuesta negativa, pero esto en nada resta alcance al método.

En la medida en que resuelve efectivamente el problema del fundamento, el formalismo da evidentemente un criterio de la existencia —o de la verdad— matemática. Dada una proposición matemática, bastará para decidir su verdad:

1.° Buscar en qué sistema formal puede ser expresada.

2.° Examinar si la fórmula que lo expresa dentro de un sistema puede ser derivada en éste.

En la medida en que la noción de derivabilidad en el sistema considerado está rigurosamente definida, el criterio propuesto es susceptible de una verificación rigurosa. (Una vez más, los teoremas de limitación introducen ciertas restricciones.)

Así, todo se reduce a las propiedades de los sistemas, manifestándose una nueva especie de empirismo: existe aquello que es deducible dentro de un formalismo apropiado. La existencia matemática se circunscribe por las posibilidades de construcción que se ofrecen en el dominio formal. Y el problema de la existencia matemática se convierte en el de la naturaleza de los formalismos. La dualidad platonismo-empirismo renace: hay que considerar un sistema como la transcripción de una realidad preexistente o como la expresión de ciertas manipulaciones.

La ventaja de la postura formalista es que permanece independiente de tales cuestiones. Si se suscitan problemas de este orden será, en todo caso, en etapas sucesivas.

15. Los resultados de Gödel.

Los resultados de GÖDEL han tenido una influencia decisiva sobre la evolución de la teoría de la demostración.

Pero si nos limitásemos únicamente a esta perspectiva, limitaríamos injustamente su alcance. Para descubrir su verdadero sentido hay que interpretarlos en el marco de la perspectiva formalista.

Imponiendo una jerarquización de los sistemas y precisando la relación que existe entre un sistema y sus interpretaciones, asignan sus límites al esfuerzo formalista y contribuyen así, en gran medida, a fijar su significado.

Los demás resultados que tienen algo en común, no han hecho otra cosa que aportar precisiones suplementarias a las que habían revelado los resultados de GÖDEL.

Así esbozadas las perspectivas históricas, conviene, antes de pasar al estudio del método de GÖDEL, precisar la noción de *sistema formal* que hemos venido empleando hasta aquí sin explicar su significado.

SECCIÓN 3.—LA FORMALIZACION.

16. DE LA AXIOMÁTICA INTUITIVA AL SISTEMA FORMAL PURO.

La noción de *sistema formal* significa un perfeccionamiento del método axiomático y su grado supremo de abstracción. El método axiomático consiste esencialmente en aislar, en el ámbito de una teoría, ciertos enunciados que se consideran fundamentales de los que pueden derivarse otros nuevos por medio de reglas lógicas de razonamiento. Esta separación introduce un orden de filiación en los enunciados de la teoría: ésta no se presenta ya como una yuxtaposición de enunciados, sino como serie ordenada en donde se procede de lo más conocido a lo menos conocido siguiendo un encadenamiento riguroso.

Pero desde tal perspectiva la intuición puede continuar desempeñando un papel más o menos importante. El progreso de la axiomática consiste precisamente en la eliminación creciente de la intuición.

En este proceso de evolución pueden distinguirse cuatro estadios.

1) *Axiomática intuitiva.*—Se limita a aislar los conceptos y enunciados fundamentales, de los cuales pueden deducirse los demás, pero los conceptos se consideran como datos intuitivos, los enunciados fundamentales como evidencias, y los procedimientos de deducción son los de la lógica natural (lógica del discurso natural).

Ejemplo: los *Elementos*, de EUCLIDES.

2) *Axiomática abstracta.*—El contenido de los conceptos fundamentales queda perfectamente precisado, reteniéndose solamente ciertas propiedades que se enuncian explícitamente. Por este motivo, tales conceptos comportan una cierta indeterminación y se consideran susceptibles de aplicación a todos los objetos que encajan en los axiomas (manifestándose ya la distinción entre sistema axiomático y sus interpretaciones posibles).

Ejemplo: la definición ordinaria de un grupo.

Para definir un grupo en un curso de Algebra ordinaria se manejan axiomas, pero sin recurrir a un sistema del tipo expuesto en el § 6.

Se utiliza, por ejemplo, la siguiente formulación: un grupo es un conjunto de elementos que cumplen una ley de composición denominada producto y que verifica los axiomas:

a) el producto de dos elementos del conjunto es un elemento del conjunto;

b) el conjunto supone un elemento unidad, que deja invariante todo elemento en la operación de producto;

c) a todo elemento del conjunto corresponde un elemento inverso (el producto de cualquier elemento por su inverso es igual al elemento unidad);

d) el producto cumple la propiedad asociativa.

Estos axiomas enuncian explícitamente las propiedades de los elementos del conjunto considerado, pero hacen referencias a la significación intuitiva de los términos utilizados (por ejemplo, los términos *supone* y *corresponde*). Sin embargo, no caracterizan unívocamente un conjunto determinado, pudiendo aplicarse a conjuntos muy diferentes: así, el conjunto de los números racionales, el conjunto de las rotaciones de una esfera, etc.

3) *Axiomática formal.*—El contenido de los conceptos fundamentales no desempeña ya ningún papel: su significación queda totalmente fijada por las relaciones establecidas entre ellos mediante los axiomas. Pero los axiomas, en su formulación, apelan aún a expresiones del lenguaje corriente, cuyo sentido viene dado por la intuición.

Ejemplo: el sistema de axiomas de PEANO, tal como ha sido presentado en el § 2.

Los predicados *ser un número entero* y *sucesivo a* no son considerados según su sentido intuitivo.

Se los puede reemplazar por expresiones *Nen* y σ: el sistema de axiomas no cambia de forma y determina el sentido de las expresiones *Nen* y σ.

Sin embargo, los axiomas utilizan aún expresiones del lenguaje corriente, tales como *no existe ningún X*.

4) *Sistema formal puro.*—Toda referencia a un orden de significados exteriores al sistema queda eliminada mediante la utilización de un lenguaje simbólico rigurosamente definido; los procedimientos de deducción admitidos se explicitan totalmente. Por supuesto, la intuición no puede eliminarse completamente, pero ya no afecta al contenido de los conceptos o de las expresiones: se reduce a la intuición de manipulaciones definidas por un sistema de signos. Es suficiente poder identificar un signo, distinguir dos signos diferentes, reemplazar un signo por otro siguiendo un modelo de sustitución.

Ejemplo: el sistema del § 6. Las explicaciones que acompañan a los axiomas y reglas de este sistema no son evidentemente indispensables, destinándose simplemente a facilitar la lectura de las expresiones simbólicas. También se puede silenciar toda referencia a la noción del grupo: el sistema tiene su sentido en sí mismo, independientemente de esta interpretación.

El paso a la axiomática formal modifica profundamente el sentido de la axiomática: la prioridad concedida a los enunciados de partida se hace totalmente relativa. Ya no se funda en la sencillez o en el mayor grado de evidencia, sino exclusivamente en la comodidad. La elección de los enunciados iniciales se hace totalmente arbitraria. En principio, cualquier sistema de enunciados puede ser adoptado como sistema de axiomas: lo único que importa es que de ellos pueda deducirse toda la teoría. Dicho en otros términos, el sistema axiomático deja de tener como fin la reproducción del orden natural que existe entre los enunciados de una teoría, para limitarse a introducir un orden que, en sí, puede ser cualquiera. La única exigencia que se impone al

sistema es que responda a ciertas condiciones de sencillez y de claridad, y serán estos criterios los que condicionarán la elección de los axiomas: lo que se trata de conseguir es la eliminación de toda ambigüedad.

17. Definición y estructura de un sistema formal.

Un *sistema formal* es un conjunto de teoremas engendrado mediante reglas precisas y objetivas. Algunas de estas reglas dan *leyes de construcción* (indicando las agregaciones de signos que poseen sentido) [35] y otras dan *leyes de deducción* (indicando las agregaciones de signos que se consideran válidas) [36].

En términos precisos, un sistema formal se compone de dos partes: una parte *morfológica,* que describe los constituyentes del sistema, y una parte *axiomática* que define la clase de los teoremas.

La morfología de un sistema indica:

1) Cuáles son las *componentes* del sistema.

2) Cuáles son las combinaciones de componentes que constituyen *proposiciones* (combinaciones dotadas de sentido).

1. Para las componentes, la morfología comporta:

a) Una lista de *componentes primitivas.*

b) Una lista de *operaciones* relativas a las componentes.

c) Unas *reglas de formación* que indican cómo por medio de estas operaciones se pueden construir nuevas componentes partiendo de las componentes primitivas.

2. En cuanto a las proposiciones, la morfología comporta:

a) Una lista de *operadores proposicionales* relativos a las proposiciones.

b) Unas *reglas de formación* que indican cómo se pueden formar, mediante las componentes del sistema, las *proposiciones elementales* —y cómo, partiendo de éstas, se puede llegar, utilizando los operadores proposicionales, a las *proposiciones complejas.*

La *parte axiomática* indica cuáles son las proposiciones que se consideran válidas, y supone:

a) Una lista de proposiciones (*axiomas* propiamente dichos) postuladas como válidas.

b) Unas *reglas de derivación* que permiten obtener, partiendo de proposiciones válidas, otras proposiciones válidas.

Las reglas de derivación pueden representarse mediante *esquemas de derivación*

[35] Ejemplo: las reglas 1 *a* a *f* del § 6.
[36] Ejemplo: las reglas 1 a 3 del § 6.

que indican las proposiciones de que se parte, y, debajo de una línea horizontal, las proposiciones que se pueden obtener a partir de ellas [37].

Las proposiciones situadas sobre la línea horizontal se denominan *proposiciones antecedentes,* y la que está situada bajo la línea horizontal se dice *proposición consecuente.*

El empleo de tales esquemas permite dar una definición cómoda del término *derivación.*

Una *derivación* es una sucesión de proposiciones, cada una de las cuales es o un axioma o la proposición consecuente de un esquema de derivación cuya (o cuyas) proposición (o proposiciones) antecedente (o antecedentes) figura (o figuran) antes que ella en la sucesión.

Una proposición es *derivable* si existe una derivación de la cual constituye la proposición final. Todo axioma es una proposición derivable, pues debe ser considerada como la proposición final de una derivación de la que constituya única componente.

Un *teorema* es una proposición derivable.

Cuando un sistema incluye un operador de negación, es posible definir lo que se llama una proposición *refutable* según este sistema: se trata de una proposición cuya negación (proposición formada anteponiendo a una proposición el operador de negación) se deriva del sistema.

En un determinado sistema (que incluya un operador de negación) se dice que una proposición es *indecidible* si no es ni derivable ni refutable en tal sistema.

Existen, pues, tres clases de reglas que determinan, respectivamente:

a) La clase de las *componentes.*
b) La clase de las *proposiciones.*
c) La clase de los *teoremas.*

Las reglas del tipo *a* y *b* deben estar formuladas de tal manera que se pueda reconocer sin ambigüedad las combinaciones de signos que forman componentes y las combinaciones de componentes que forman proposiciones.

Estas reglas presentan la forma de definiciones recurrentes (que permiten construir gradualmente las expresiones de que se trata).

18. Presentación más abstracta.

Es posible adoptar un cuadro todavía más abstracto en el que ya no existe distinción entre morfología y axiomática, sino solamente entre *ideas primitivas* y *teoremas primitivos.* Todas las operaciones se engloban bajo la rúbrica de las ideas primitivas. La rúbrica de teoremas primitivos incluye los axiomas propiamente dichos (combina-

[37] Ejemplo: las reglas 1 a 3 del § 6.

ciones de componentes consideradas válidas) y la totalidad de las reglas. Según esto, tendremos:

1. Ideas primitivas:

a) Componentes primitivas.

b) Operaciones.

2. Teoremas primitivos:

a) Axiomas.

b) Reglas.

19. Sistema formal y teoría intuitiva.

Una teoría deductiva intuitiva (basada en una axiomática intuitiva o abstracta) permite formular ciertos *enunciados*. Entre estos enunciados, unos son *verdaderos* y otros *falsos*. Los enunciados verdaderos son los *axiomas* y los *teoremas*. Un teorema es un enunciado que puede deducirse de los axiomas o teoremas ya demostrados por medio de una concatenación de enunciados intermedios que constituye una *demostración*.

Estos diferentes elementos poseen un sentido dado intuitivamente. En un sistema formal se encuentran elementos análogos, pero su significación está rigurosamente determinada por las reglas del sistema.

Una teoría intuitiva puede ser expresada mediante un sistema formal. La teoría de grupos que se ha presentado en el § 16 puede expresarse mediante el sistema ilustrado en el § 6.

Así, en el curso de esta exposición deberemos considerar, de una parte, la aritmética bajo su forma intuitiva habitual, y por otra un sistema formal en el que sea posible expresarla. Será útil destacar la correspondencia entre los elementos de la teoría intuitiva y los de la teoría formal.

La noción de *proposición* (en el sistema formal) es análoga a la de *enunciado* (en la teoría intuitiva). La de *derivación* es análoga a la de *demostración*. La noción de *proposición derivable* es análoga a la de *enunciado cierto*, y la de *proposición refutable* análoga a *enunciado falso*. Finalmente, los *teoremas* del sistema formal son evidentemente análogos a los de la teoría intuitiva.

Los resultados de Gödel se refieren en parte a la naturaleza de correspondencia que se puede establecer entre las proposiciones de un determinado sistema formal y los enunciados de la Aritmética intuitiva (Aritmética no formalizada).

Para precisar la noción de sistema formal hay que distinguir, como ha establecido Curry, *presentación*, *representación* e *interpretación* de un sistema [38].

[38] Curry 4.

20. Presentación de un sistema.

Un sistema no está ligado, evidentemente, a la naturaleza de los símbolos adoptados, aunque se deban utilizar ciertos símbolos para designar sus componentes. No obstante, la elección que se hace no tiene nada de esencial: se trata, simplemente, de una cierta formulación del sistema. Esta observación se refiere a la distinción que debe establecerse entre los dos usos posibles de un símbolo: un símbolo puede utilizarse para designar un objeto (función designativa) o bien puede ser considerado él mismo como un objeto dotado de ciertas propiedades.

En la descripción de un sistema el sentido de los símbolos queda precisado por las condiciones de su empleo: se utilizan en su función designativa, para representar las componentes primitivas y las operaciones del sistema, a la manera de nombres para designar las componentes primitivas y las operaciones. Se llamará *presentación* de un sistema a una formulación mediante una particular elección de los símbolos.

Para el sistema del § 6, los símbolos utilizados para designar las variables podrían reemplazarse por otros símbolos, por ejemplo: $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Igualmente, el símbolo U podría reemplazarse por los símbolos E o I, y así sucesivamente. En nada se modificaría la naturaleza del sistema; la presentación que de él se hace constituye una presentación particular.

21. Representación de un sistema.

Por otra parte, dado un sistema, se puede atribuir un sentido determinado a sus componentes primitivas poniéndolas en correspondencia con determinados objetos perfectamente definidos. Se trata de una concretización del sistema en la cual todos los teoremas continúan siendo válidos, pero particularizados a una determinada clase de objetos. Se denomina *representación* de un sistema a una correspondencia biunívoca entre sus componentes primitivas y una clase de objetos.

Así se puede operar una representación del sistema descrito en el § 6 mediante las siguientes correspondencias:

Las variables están en correspondencia con las rotaciones de una esfera, la constante U con la rotación del ángulo 0 y la función $\times$ con la composición de dos rotaciones. Los términos de nuestro sistema se convierten entonces en rotaciones; los teoremas de nuestro sistema no se ven afectados en nada por la correspondencia (biunívoca) así establecida, como es evidente.

Un sistema formal puede considerarse como una abstracción de sus representaciones y de sus presentaciones.

22. Interpretación de un sistema.

Finalmente, se pueden hacer corresponder las proposiciones elementales de un sistema con una determinada clase de enunciados cuya verdad o falsedad se determina independientemente del sistema (ya se trate de proposiciones pertenecientes a otros sistemas o de enunciados de una teoría no formalizada), de manera que a las proposiciones derivables del sistema correspondan enunciados verdaderos. Tal correspondencia es una *interpretación,* y no es necesariamente *isomórfica* (en tanto que una representación lo es siempre).

Sea, por ejemplo, una representación en la cual las componentes primitivas Ec_1 y Ec_2 son puestas en correspondencia con los objetos e_1 y e_2, y la operación Op con la operación Op^*.

Sea Ec_3 la componente obtenida mediante la aplicación de Op^* a e_1 y e_2. En nuestra representación, e_3 corresponde a Ec_3.

En general, sea una interpretación en las que las proposiciones elementales Pr_1 y Pr_2 de un sistema *LF* se hacen corresponder con los enunciados A_1 y A_2 de una teoría *Th* y en las que los operadores proposicionales de *LF* son los mismos que los de *Th.* Sea A_3 un enunciado complejo formado, por medio de estos operadores, a partir de A_1 y A_2, y sea Pr_3 la proposición de *LF* formada de la misma manera a partir de Pr_1 y Pr_2.

Supongamos también que A_3 sea un enunciado verdadero de *Th.*

Pr_3 no será necesariamente, por tanto, una proposición derivable de *LF.*

El Teorema de Gödel permite dar un ejemplo de una interpretación no isomórfica.

23. La noción del cálculo.

La noción de *sistema formal* debe aproximarse a la de *cálculo,* que es más corriente, aunque corresponde a un grado menos elevado de abstracción.

Un cálculo es un conjunto de reglas operatorias y supone:

1) Una lista de símbolos.

2) Un conjunto de reglas de construcción, formuladas bajo forma recurrente, que especifique cuáles son las series de símbolos dotados de sentido (estas series o conjuntos de símbolos se denominan *fórmulas bien formadas* del cálculo).

3) Un conjunto de reglas de transformación que especifiquen cuáles son las fórmulas bien formadas que se consideran válidas: estas reglas suponen una lista perfectamente definida de fórmulas bien formadas —los axiomas— y reglas, formuladas en forma recurrente que permiten obtener otras fórmulas bien formadas a partir de ellas.

Un sistema formal puede convertirse en un cálculo mediante un procedimiento de tipo mecánico e, inversamente, un cálculo puede convertirse en un sistema formal. Se trata, por tanto, de nociones equivalentes, pero un sistema formal constituye una extensión del lenguaje que utiliza para su formulación [39], mientras que un cálculo se superpone a este lenguaje.

SECCIÓN 4.—INTERPRETACION Y MODELO.

24. LA NOCIÓN DE MODELO.

A la noción de interpretación va ligada la de *modelo.*

Un *modelo* es un conjunto *En* de elementos que se encuentran en correspondencia con las componentes de un sistema formal *LF* de manera que:

1.° A las proposiciones del sistema *LF* correspondan enunciados formados mediante elementos del conjunto *En.*

2.° Sea posible determinar, independientemente del sistema *LF,* si un determinado enunciado es verdadero o falso.

3.° A las proposiciones derivables de *LF* correspondan enunciados verdaderos.

Como puede verse, dar una interpretación de un sistema se reduce a dar un modelo de este sistema.

De manera más precisa, la determinación de un modelo para un sistema *LF* supone los datos siguientes:

1.° Una familia de campos, correspondiendo cada campo a una categoría de símbolos del sistema (en general, uno de estos campos tiene por elementos objetos considerados como individuos —un *campo de individuos*— y los restantes tienen por elementos funciones: *campos funcionales*).

2.° Una función (metateórica) de correspondencia que asocia cada componente del sistema a un elemento del modelo (tomado del interior del campo apropiado).

3.° Una regla de interpretación que permita determinar el valor de verdad (verdad o falsedad) de cada enunciado formado con elementos del modelo.

Observación sobre el punto 1.°.—La familia de campos debe incluir un campo de individuos para la categoría de las componentes primitivas que puedan desempeñar el papel de individuos (es decir, servir de temas a los predicados) y uno o varios campos funcionales correspondientes a las operaciones y a los predicados del sistema.

---

[39] El sistema del § 6, por ejemplo, utiliza para su formulación el idioma francés, pero añade un cierto número de símbolos y nuevas posibilidades de expresión.

No debe incluir necesariamente un campo correspondiente a los operadores proposicionales.

Basta con mencionar, en la 3.ª regla de interpretación, una cláusula que indique cómo deben interpretarse los operadores proposicionales (generalmente según su significado intuitivo).

Sin embargo, se puede proceder de otra forma y hacer corresponder a los operadores proposicionales un campo especial constituido por funciones adecuadamente definidas. Tales funciones son leyes de correspondencia que asocian proposiciones o parejas de proposiciones con uno de los dos valores de verdad: *falso* o *verdadero.*

(Así, a la disyunción se podrá hacer corresponder la siguiente ley:

A una pareja formada por dos proposiciones verdaderas se asocia el valor *verdadero.*

A una pareja formada por dos proposiciones falsas se asocia el valor *falso.*

A una pareja formada por una proposición verdadera y una proposición falsa se asocia el valor *verdadero*).

Las operaciones lógicas intuitivas pueden considerarse como funciones de este tipo (esto es lo que haremos en el ejemplo que sigue).

Procediendo de esta manera puede bastar con indicar, en las reglas de interpretación, un criterio que permita determinar el valor de la verdad de los enunciados y corresponda a las proposiciones del sistema en las que no figure ningún operador proposicional.

25. Ejemplo de modelo.

A título de ejemplo, he aquí un modelo del sistema descrito en el § 6.

Adoptaremos los siguientes campos:

a) Los números racionales positivos.

b) El producto aritmético y la igualdad aritmética.

c) Las operaciones de la Lógica elemental.

Establecemos la correspondencia siguiente:

a) A las variables tomadas en el orden $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$) corresponden los números racionales positivos diferentes de 1.

b) A la constante U corresponde el número 1.

c) A la función $\times$ corresponde el producto aritmético.

d) Al predicado $=$ corresponde la igualdad aritmética.

e) A los operadores proposicionales corresponden las operaciones lógicas intuitivas que ellos designan.

Nosotros consideraremos los enunciados formados mediante los elementos de nuestro modelo verdaderos o falsos según que constituyan enunciados aritméticos verdaderos o falsos.

Fácilmente se ve que, mediante la correspondencia adoptada, los axiomas del sistema se convierten en enunciados aritméticos verdaderos, y que la aplicación de las reglas de derivación mantiene la verdad de los enunciados. De ello se sigue que todas las proposiciones derivables del sistema se convierten en enunciados verdaderos.

26. Presentación más abstracta.

Para construir un modelo no es necesario basarse, como en el ejemplo precedente, en una teoría intuitiva determinada. Basta con establecer la correspondencia entre objetos del modelo y objetos del sistema de tal manera que a toda proposición del sistema se pueda asociar el símbolo *Vri* (verdadero) o el símbolo *Fal* (falso).

La correspondencia así establecida determina un modelo si toda proposición derivable del sistema va asociada al símbolo *Vri.*

Llamaremos *función de interpretación* a una función (metateórica) que sirve para establecer una correspondencia de esta naturaleza.

Es cómodo considerar los símbolos *Vri* y *Fal* como elementos de un campo del modelo. En cuanto a los operadores proposicionales vale la misma observación hecha en el parágrafo precedente.

Apliquemos, por ejemplo, este método al sistema del § 4.

Distinguimos los dos campos siguientes:

1) El campo *En* formado por los objetos *Vri* y *Fal.*

2) El campo funcional formado por las funciones *Mdj* y *Mip,* definidas por el conjunto producto del conjunto *En* por sí mismo y que toma sus valores en *En.*

La función *Mdj* queda definida por el cuadro siguiente:

Mdj (Vri, Vri) = Vri
Mdj (Vri, Fal) = Vri
Mdj (Fal, Vri) = Vri
Mdj (Fal, Fal) = Fal

La función *Mip* queda definida por el cuadro siguiente:

Mip (Vri, Vri) = Vri
Mip (Vri, Fal) = Fal
Mip (Fal, Vri) = Vri
Mip (Fal, Fal) = Vri.

Ahora definimos una función de interpretación *Mdl* de la forma siguiente:

Mdl aplica el conjunto de variables de nuestro sistema sobre el campo *En* (de manera arbitraria), el símbolo V sobre la función *Mdj* y el símbolo $\longrightarrow$ sobre la función *Mip.*

Se puede comprobar fácilmente que, mediando esta correspondencia, los axiomas del sistema quedan asociados al objeto *Vri,* y que si se parte de proposiciones asociadas a *Vri* la aplicación de las reglas de derivación no puede conducir sino a proposiciones asociadas a *Vri.* De aquí se sigue que todas las proposiciones derivables del sistema están asociadas a *Vri.* (En sentido intuitivo: toda proposición derivable del sistema es verdadera).

Observemos que esto se produce cualquiera que sea la manera con que la función *Mdl* aplique las variables sobre el campo *En.*

27. Modelos isomorfos.

Dos modelos Md_1 y Md_2 se denominan *isomorfos* si entre los elementos de sus campos respectivos existe una correspondencia biunívoca (a cada elemento de Md_1 corresponde un elemento de Md_2 y sólo uno, y recíprocamente) tal que si un enunciado formado por los elementos de Md_1 es cierto, entonces el enunciado formado mediante elementos de Md_2, que debido a la dicha correspondencia son imagen de los primeros, es igualmente cierto, y recíprocamente.

28. Campo de interpretación.

El concepto de modelo puede ser presentado de manera ligeramente diferente.

Sea un sistema formal *LF.*

Denominaremos *campo de interpretación* a una familia de dominios tal que se pueda hacer corresponder a toda proposición de *LF* un enunciado formado por elementos pertenecientes a estos dominios. (En lo que concierne a los operadores proposicionales, se puede prever un dominio funcional que les corresponde o bien dar una regla que indique cómo deben interpretarse).

Un modelo es un campo de interpretación, pero la inversa no es necesariamente cierta.

Dado un campo de interpretación, se puede dar una regla de interpretación que permita determinar si un enunciado compuesto por elementos de este campo es verdadero o falso. Por otra parte, se puede establecer una regla de correspondencia entre los elementos de este campo y los objetos del sistema *LF,* de tal manera que a las proposiciones de *LF* correspondan enunciados formados de elementos del campo.

Procediendo de manera más abstracta, se pueden reemplazar estas dos reglas por una sola que establezca una correspondencia entre los objetos *LF* y los elementos del campo, y que permitan asociar, sobre la base de esta correspondencia, toda proposición de *LF* a uno de los símbolos *Vri* o *Fal.*

Se puede formular una regla semejante con gran comodidad previendo, entre los dominios del campo, uno constituido por los dos objetos *Vri* y *Fal.*

29. Definiciones referentes a la interpretación.

Diremos que una proposición es *verdadera en un campo de interpretación* si el enunciado que le corresponde dentro de la ley de correspondencia es verdadero (o si va asociada, según tal correspondencia, al símbolo *Vri*).

Se dice que una proposición es *realizable en un campo de interpretación* si es posible determinar una regla de interpretación y una regla de correspondencia (o una regla única de interpretación) tales que esta proposición sea verdadera en este campo.

Una proposición se denomina *realizable* si existe un campo de interpretación en el que sea realizable. Una proposición no es realizable si no es realizable dentro de ningún campo de interpretación.

Se dice que una proposición es *válida en relación a un campo de interpretación* si es cierta en este campo, cualquiera que sea la manera con que las variables que contiene se aplican a los dominios correspondientes del campo [40].

Esta definición corresponde a la interpretación elegida para los operadores proposicionales.

Una proposición válida en relación a un campo puede dejar de serlo si se cambia esta interpretación. En todos los casos en que se utiliza la noción de validez, la interpretación elegida es siempre la que asocia a los operadores proposicionales sus significaciones intuitivas.

Se dice que una proposición es *válida* si lo es en relación a todo campo de interpretación posible del sistema a que pertenece [41]. Si el sistema incluye un operador de negación, la condición necesaria y suficiente para que una proposición de este sistema sea válida es que su negación no sea realizable.

Definidas estas nociones, se puede definir un modelo de la siguiente manera: dado un sistema *LF*, se denomina *modelo* de este sistema a un campo de interpretación de este sistema tal que toda proposición derivable de *LF* sea válida en relación a ese campo.

Se dice que un sistema es *realizable* si posee, al menos, un modelo [42].

---

[40] El término inglés correspondiente es *valid in a given donain*; el término alemán, *gültig*.
[41] El término inglés correspondiente es *valid*; el término alemán, *allgemeingültig*.
[42] El término inglés correspondiente es *satisfiable*; el término alemán, *erfüllbar*.

Capítulo II

Sistema formal y metateoría

Sección 1.—LAS PROPIEDADES DEL SISTEMA FORMAL.

30. Lengua-objeto y metalengua.

El empleo del método formal ha llevado a distinguir diferentes niveles de lenguaje. Es necesario realizar claramente esta distinción para poder hablar de las propiedades de un sistema formal.

Un sistema formal se presenta como un instrumento de expresión de una forma particular: que permite formar expresiones y encadenarlas según reglas precisas, constituyendo una lengua de un tipo especial, una lengua formalizada. Por otra parte, puede ser considerado como un objeto cuyas propiedades se estudian: para este fin hay que utilizar otra lengua que proporcione los términos con que designar los elementos del sistema. Así se ha llegado a distinguir *lengua-objeto y metalengua*. La forma más inmediata de proceder es considerar como metalengua el lenguaje usual, añadiéndole ciertos símbolos para designar los elementos del sistema (por ejemplo, se podrán tomar los símbolos del sistema situados entre comillas).

Así, si estudiamos las propiedades del sistema descrito en el § 6, lo hemos adoptado como lengua-objeto. Podemos describir las características de este sistema utilizando la lengua francesa, a condición de añadir ciertas expresiones para designar los elementos del sistema: podemos utilizar el símbolo *Va* para indicar una variable, el símbolo *Pr* para designar una proposición, el símbolo E para designar la constante individual del sistema, y así sucesivamente.

El sistema de expresiones así constituido es una metalengua [1].

---

[1] Se simplifica mucho las notaciones recurriendo a lo que se denomina el uso de la *autonimia* de los símbolos. Un símbolo se utiliza de manera autonímica cuando sirve para designarse a sí mismo. En la metalengua de nuestro sistema, el símbolo *U* puede emplearse para designar la constante individual, el símbolo $\mathfrak{X}$ para designar la variable $\mathfrak{X}$, y así sucesivamente. Esto evita el uso de comillas o de nuevos símbolos. Siempre que pueda hacerse sin ambigüedad, recurriremos al uso de la autonimia.

Pero la metalengua, a su vez, es susceptible de formalización, pudiendo obtenerse toda una jerarquía de sistemas formales.

Evidentemente, habrá que preguntarse en qué medida la metalengua de un sistema puede formalizarse en el propio ámbito del sistema. Habrá que preguntarse, por ejemplo: el sistema del § 6, ¿comprende suficientes medios de expresión y de deducción para que sea posible describir, por medio de los teoremas de este sistema, sus propiedades? Por ser este sistema muy limitado, la respuesta a esta pregunta es negativa.

De manera general, este problema puede plantearse como sigue:

Sea un sistema formal LF_1.

Para estudiar las propiedades de este sistema, añadimos a la lengua española un cierto número de expresiones, constituyendo así una lengua que denominaremos *lengua de base* y que designaremos por la notación *LB*.

LB es una metalengua respecto a LF_1.

Para el estudio de las propiedades de LF_1 sólo utilizamos, naturalmente, una parte muy limitada de *LB*, a la que llamaremos LB_0.

Podemos proponernos formalizar LB_0, es decir, construir un sistema formal LF_2 en cuyo interior podamos obtener derivaciones correspondientes a los razonamientos de LB_0. Más técnicamente, podemos proponernos hallar un sistema formal LF_2 y una ley de correspondencia entre LF_2 y LB_0, tales que a todo enunciado verdadero de LB_0 corresponda una proposición derivable de LF_2.

Si pretendemos estudiar las propiedades de LF_2 deberemos utilizar de nuevo una metalengua que tendrá que ser más rica que la LB_0, pues deberá comprender símbolos que designen los elementos de LF_2 (esto, en la hipótesis en que LF_2 es diferente de LF_1, que es el caso general). Sea LB_1 esta metalengua.

Podemos formalizar nuevamente LB_1 mediante un sistema formal LF_3.

Y así sucesivamente.

No obstante, podemos preguntarnos si es posible formalizar LB_0 por medio de LF_1. La respuesta dependerá de la naturaleza de LB_0 y de LF_1.

Puede suceder que sea posible formalizar según LF_1 (a condición de que este sistema sea suficientemente capaz) el estudio de algunas de sus propiedades, pero que sea imposible formalizar en él el estudio de las restantes propiedades. En otros términos, puede que sea factible formalizar LB_0 según LF_1 a condición de que LB_0 sea suficientemente reducida.

Los teoremas de limitación muestran precisamente que la formalización de la metalengua de un sistema en el interior de tal sistema sólo es parcialmente realizable.

31. Los metateoremas.

A las investigaciones que se desarrollan en el interior de un sistema se superponen, pues, investigaciones metateóricas. Una teoría relativa a un sistema formal considerado como lengua-objeto (y formulada esta teoría en una metalengua) es una *metateoría.*

Los enunciados demostrados a este nivel adoptan el nombre de *metateoremas*: se trata de teoremas pertenecientes a una metalengua y referentes a las propiedades de una lengua-objeto.

Los metateoremas proporcionan resultados de conjunto, válidos para clases enteras de proposiciones e incluso para la totalidad del sistema. Ciertos metateoremas pueden adoptar la forma de reglas derivadas, otros enuncian propiedades generales a propósito de los predicados del sistema, otros caracterizan ciertas clases de teoremas del sistema, otros conciernen a propiedades de conjunto y otros, finalmente, a las relaciones del sistema con otros sistemas.

32. Demostraciones metateóricas.

Las demostraciones metateóricas pueden ser *constructivas* o *no-constructivas.*

La noción de demostración constructiva no puede ser definida de manera rigurosa sino mediante la descripción completa de los procedimientos de deducción que se consideran constructivos. No obstante, se puede decir de manera aproximada que un procedimiento constructivo de demostración es el que permite comprobar efectivamente (de manera tangible) el resultado demostrado en cada caso particular. En el plano metateórico, únicamente las demostraciones constructivas se consideran satisfactorias, pues sólo ellas son conformes o adecuadas al método formal. Las demás dependen de hipótesis exteriores y reposan sobre evidencias incontrolables.

Una vez formalizada la metateoría es posible dar un contenido preciso a la noción de *procedimiento constructivo.* Las fronteras de lo constructivo se revelan entonces variables: siguiendo el formalismo que se ha adoptado se imponen exigencias más o menos rigurosas de constructividad. Así, se puede adoptar un formalismo que permita el razonamiento por inducción, el formalismo de la lógica intuicionista o uno que no contenga ni negación ni universalización (Fitch [2], Myhill [3]). No obstante, parece que la noción de constructividad puede representarse más adecuadamente mediante un formalismo que contenga la teoría recursiva de los números y el principio de inducción (eventualmente extendido a un sector de lo transfinito).

El tipo clásico de demostración metateórica es el razonamiento por *inducción estructural.*

Este tipo de inducción puede aplicarse a la construcción de las proposiciones y a la derivación de una proposición.

En el primer caso se establece una propiedad para las proposiciones elementales y se demuestra que dicha propiedad se conserva a través de diferentes reglas de formación.

En el segundo caso se establece una propiedad para los axiomas y se demuestra que tal propiedad permanece aunque se apliquen reglas de derivación diferentes.

[2] Fitch 2.
[3] Myhill 3.

En ambos casos se realiza, etapa tras etapa, una traslación de la propiedad de los casos elementales a los casos generales. Este tipo de razonamiento es posible a condición de que las reglas estén formuladas de manera recurrente.

Un ejemplo lo aclarará:

Supongamos que pretendemos establecer el resultado metateórico siguiente:

Todas las proposiciones del sistema descrito en el § 4 *tienen la propiedad P.*

Para ello es suficiente demostrar:

1) Que las variables de este sistema tienen la propiedad *P.*

2) Que si las proposiciones A y B tienen la propiedad *P,* entonces las proposiciones (A ∨ B) y (A → B) tienen también esta propiedad.

En virtud de las reglas que definen la noción de proposición en este sistema, se sigue inmediatamente que toda proposición de este sistema posee la propiedad *P.*

33. SINTAXIS Y SEMÁNTICA.

Se distinguen dos tipos de consideraciones metateóricas en un sistema formal: las consideraciones sintácticas (relativas a la *sintaxis* del sistema) y las consideraciones semánticas (pertenecientes a la *semántica* del sistema). Una metateoría puede, pues, ser una sintaxis o una semántica.

La *sintaxis* del sistema es el estudio de las propiedades del sistema considerado en sí mismo, en sus posibilidades deductivas. La *semántica* de un sistema es el estudio de las relaciones entre este sistema y ciertos dominios de objetos a los que puede representar: por consiguiente, está ligada necesariamente a las posibilidades interpretativas del sistema.

Los problemas abordados por la semántica son de dos tipos: problemas relativos a la noción de verdad y problemas concernientes a las posibilidades de expresión de un sistema.

"La noción de *verdad* implica una relación entre un sistema lingüístico y un dominio de hechos. Desde el punto de vista formal, esta relación es la que se puede establecer entre un sistema formal y un cierto campo de interpretación que se puede proponer para este sistema. Una vez que se ha dado este campo de interpretación, es posible caracterizar una cierta clase de proposiciones del sistema como *proposiciones verdaderas.* Dada una regla de correspondencia establecida entre las proposiciones del sistema y los enunciados formados por objetos del campo, y una regla de interpretación que permita determinar, para cada enunciado, si es verdadero o falso, la clase de las *proposiciones verdaderas* del sistema estará formada por proposiciones asociadas, sobre esta base, a enunciados verdaderos. O también, dada una regla que establezca una correspondencia entre los elementos del sistema y los del campo y que permita asociar, sobre la base de esta correspondencia, a toda proposición del sistema, uno de los símbolos *Vri* o *Fal,* la clase de *proposiciones verdaderas* del sistema estará formada por proposiciones asociadas, sobre esta base, al símbolo *Vri.*

Una metalengua semántica debe comportar, por tanto, además de una lógica apropiada (como todo sistema lingüístico), símbolos que designen los elementos de su sistema, símbolos que designen los elementos del campo de interpretación y símbolos que designen las relaciones que existen entre estas dos categorías de elementos".

Por otra parte, la semántica puede estudiar en qué medida tal sistema es capaz de representar formalmente tal o cual noción intuitiva (que, por lo demás, puede pertenecer también a la metalengua de este sistema; por ejemplo, la noción de verdad de que acabamos de hablar).

La distinción entre sintaxis y semántica no es rigurosa, pues hasta la fecha no se ha conseguido idear un criterio formal de diferenciación. El recurso a la idea de interpretación no basta evidentemente, pues el método sintáctico hace referencia constantemente a interpretaciones. Acaso pudiese adoptarse el criterio siguiente: los métodos sintácticos son de tipo aritmético, los métodos semánticos son de tipo topológico.

Esto llevaría a restringir considerablemente el alcance de la distinción: se trataría más bien de una diferencia de métodos que de una diferencia de objetos. Según los problemas, se puede juzgar tal o cual método más o menos práctico, pero nada indica hasta aquí que algunos problemas solamente se susciten, por razones de principio, de uno solo de estos métodos.

En cualquier caso, esta dificultad no es esencial y no la tendremos en cuenta en los desarrollos que siguen.

34. Las propiedades de los sistemas.

El estudio de las relaciones entre sistemas tiene su origen en el Algebra. El objeto de su estudio son las relaciones de homomorfismo, de automorfismo y de isomorfismo que se consideran en el álgebra abstracta.

El estudio de las propiedades de conjunto de los sistemas ha exigido la creación de métodos propios, algunos de ellos de tipo aritmético, otros de tipo algebraico, otros, incluso, relativos a la teoría de conjuntos (y hasta topológicos).

De estas propiedades, las principales son las siguientes: *coherencia, saturación, resolubilidad y categoricidad.* Las tres primeras pueden ser de tipo sintáctico o de tipo semántico, la última es de tipo semántico.

35. Coherencia.

Coherencia sintáctica.

Se pueden dar dos definiciones.

1) Un sistema es *coherente* (en sentido sintáctico) si toda proposición del sistema no es derivable en él.

2) Un sistema es *coherente* (en sentido sintáctico) si no es posible derivar de él a la vez una proposición y su negación. (Noción clásica de la no-contradicción) [4].

Naturalmente, la segunda definición sólo es aplicable a los sistemas que incluyen la operación de negación.

Para la mayoría de los sistemas de este tipo, las dos definiciones son equivalentes. (Se demuestra que si se puede obtener una proposición y su negación, es posible obtener una proposición cualquiera).

Coherencia semántica.

Un sistema es *coherente* (en sentido semántico) si es realizable. La coherencia semántica se refiere, evidentemente, a la interpretación de que se trata.

36. La ω-COHERENCIA.

En los capítulos que siguen tendremos que considerar un tipo particular de coherencia sintáctica: la ω-coherencia. Este concepto ha sido introducido por TARSKI partiendo de consideraciones semánticas [5].

Sólo es aplicable para sistemas que contienen una formalización de la Aritmética, el operador negación y el cuantificador de universalización. (Se dice que un sistema contiene una formalización de la Aritmética si es posible establecer entre los enunciados de la Aritmética y una cierta clase de proposiciones de este sistema una correspondencia tal que a un enunciado aritmético verdadero corresponda una proposición derivable de este sistema.)

Consideremos un sistema formal, *LF*, que responda a estas condiciones.

Supongamos que este sistema contiene las constantes individuales N_0, N_1, N_2, ... (correspondientes a los enteros), las variables individuales $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, ..., el operador de negación $\sim$ y el cuantificador (Θ).

Consideremos, por otra parte, una teoría intuitiva *Th* y una correspondencia entre los enunciados de *Th* y las proposiciones *LF*.

Si *LF* es no-coherente, es evidente que a proposiciones derivables de *LF* pueden corresponder enunciados falsos de *Th*. (Dicho de otra forma: la correspondencia en cuestión no podrá ser una interpretación.)

Pero en determinados casos, esta situación puede producirse cuando *LF* es coherente.

TARSKI ha presentado el ejemplo de un sistema *LF* que se puede poner en correspondencia con la Aritmética intuitiva de tal manera que a ciertas proposiciones derivables de *LF* correspondan enunciados aritméticos falsos. (Dicho de otra forma,

---

[4] DOPP 3 (pág. 177) utiliza la expresión *no-contradiction* para expresar esta propiedad.

El término correspondiente en inglés es *consistency*.

El término alemán correspondiente es *Widerspruchsfreiheit*. (El adjetivo es *widerspruchsfrei*. Sin embargo, los autores de lengua alemana utilizan también los adjetivos *konsistent, nicht-konsistent*.)

[5] TARSKI 3.

ha ejemplificado un sistema *LF* que contiene proposiciones derivables que no son válidas: existe al menos un campo de interpretación en el que las negaciones de estas proposiciones son realizables.)

TARSKI ha demostrado —para expresarlo aún en términos más precisos— que en tal sistema se puede derivar, para un predicado aritmético convenientemente elegido *P*, una sucesión infinita de proposiciones a las que corresponden los enunciados aritméticos siguientes:

— Todos los números enteros no tienen la propiedad *P*,
— el número 1 tiene la propiedad *P*,
— el número 2 tiene la propiedad *P*,
— etcétera...

Es evidente que, entre estos enunciados, algunos son falsos (sea el primero, o al menos uno de los que siguen), puesto que no pueden ser simultáneamente ciertos. Se puede exigir de un sistema que no pueda dar lugar a una situación de este género. Cuando un sistema satisface esta exigencia, se dice que es *ω-coherente.*

Un sistema *LF* que responda a las condiciones anunciadas arriba, se dice que es *ω-coherente* si no contiene ningún predicado Λ^2 tal que [6]:

1) todas las proposiciones
$\Lambda^2\ \kappa$ [7]

sean derivables en *LF.*

2) exista una proposición
$\sim\ (\Theta)\ \Lambda^2\ \Theta$ [8]

que sea igualmente derivable en *LF.*

Si un sistema es ω-coherente, es también coherente. Pero la inversa no es necesariamente cierta. La noción de ω-coherencia es, por tanto, más compleja que la de coherencia.

37. SATURACIÓN.

Saturación sintáctica.

Se distinguen dos tipos de saturación sintáctica de diferente alcance.

---

[6] Utilizamos aquí una notación sintáctica: Λ^2 es un símbolo que puede ser reemplazado por otro cualquiera del segundo tipo de *LF.* (Ver INDICE DE NOTACIONES, 2.25.2.5.).

Un predicado referente a individuos se designa mediante un símbolo del segundo tipo, considerándose los símbolos individuales pertenecientes al primer tipo. (Ver INDICE DE NOTACIONES, 2.31.1.11.).

[7] En esta expresión, κ es una variable sintáctica que puede reemplazarse por una de las constantes individuales N_0, N_1, N_2, ..., de *LF.* (Ver INDICE DE NOTACIONES, 2.25.2.1.).

Las proposiciones $\Lambda^2\ \kappa$ son todas las que pueden obtenerse reemplazando κ por una constante individual de *LF.*

[8] En esta expresión, Θ es una variable sintáctica que puede reemplazarse por una variable cualquiera de *LF.* (Ver INDICE DE NOTACIONES, 2.25.2.2.).

1. *Saturación* (sintáctica) *en sentido fuerte*: se dice que un sistema es *saturado en sentido fuerte* si toda proposición perteneciente a este sistema es derivable o refutable.

Un sistema en el que se den estas condiciones lo denominaremos también *completo* (en sentido sintáctico)[9]. Esta definición sólo es aplicable a los sistemas que comportan una operación de negación.

2. *Saturación* (sintáctica) *en sentido débil*: se dice que un sistema está *saturado en sentido débil* si, añadiendo a los axiomas una proposición no derivable del sistema, se hace a éste no-coherente[10].

Saturación semántica.

Se distinguen dos tipos de saturación semántica: saturación propiamente dicha, o absoluta, y saturación relativa a una interpretación.

1. *Saturación* (semántica) *absoluta*: en este sentido, un sistema se dice *saturado* si toda proposición válida de este sistema es derivable, y recíprocamente.

Si un sistema es saturado en este sentido, existe una correspondencia biunívoca entre sus proposiciones derivables y los enunciados verdaderos que les corresponden en las diferentes interpretaciones del sistema.

Para evitar recargar inútilmente el lenguaje, diremos simplemente, cada vez que sea posible hacerlo sin riesgo de ambigüedad, que un sistema saturado absolutamente (en sentido semántico) es *saturado*[11].

2. *Saturación* (semántica) *relativa a una interpretación.*

En lugar de considerar todas las interpretaciones de un sistema se puede considerar solamente una de ellas.

Se dice que un sistema es *saturado en relación a una interpretación* si toda proposición correspondiente a un enunciado cierto en esta interpretación es derivable en el sistema.

Intuitivamente, esto quiere decir que este sistema constituye una formalización completa de un cierto cuerpo de enunciados. (Por ejemplo, si un sistema se interpreta desde el punto de vista de la Aritmética de las números racionales y se ha saturado en relación a esta teoría, se podrá decir que constituye una formalización completa de esta teoría.)[12].

Se puede obtener una formalización más precisa de esta propiedad utilizando la noción de campo de interpretación: se dice que un sistema está *saturado en relación a un campo de interpretación* si toda proposición del sistema, válida en relación a este campo, es derivable, y recíprocamente.

---

[9] El término inglés correspondiente es *completeness*. El término alemán, *Vollständigkeit*.
DOPP (pág. 183) utiliza la expresión "*categorique*" *en un sens absolu.*
CAVAILLES 3 (II, pág. 83) utiliza la expresión *saturation au sens fort.*

[10] DOPP 3 (pág. 182), denomina a tal sistema *saturé* o *inextensible*. El término en alemán es *nicht gabelbar.*

[11] El término inglés correspondiente es *completeness*. El término alemán, *Vollständigkeit.*

[12] DOOP 3 (pág. 184), utiliza en este sentido el término *complet.*

38. RESOLUBILIDAD.

Resolubilidad sintáctica.

Un sistema es *resoluble* en sentido sintáctico si se puede dar un procedimiento efectivo que permita decidir, para toda proposición del sistema, si ésta es derivable o no.

El problema que se ocupa en encontrar tal procedimiento se conoce con el nombre de *problema de decisión*[13]. Por consiguiente, un problema es resoluble si es posible dar, dentro de su ámbito, una solución al problema de la decisión.

Resolubilidad semántica.

Dado un sistema *LF* y un campo de interpretación, se dice que este sistema es *resoluble* en sentido semántico si se puede encontrar un procedimiento efectivo que permita decidir, para toda proposición del sistema, si es cierta en este campo (válida respecto a este campo) o no. (Es preciso, por tanto, que la regla de correspondencia y la de interpretación sean tales que permitan decidir, para toda proposición de *LF*, si es cierta en el campo o no lo es.)

En un sentido más general, un sistema se dice *resoluble* en sentido semántico si se puede dar un procedimiento efectivo que permita decidir, para toda proposición del sistema, si es o no es válida.

39. CATEGORICIDAD.

Se distingue una *categoricidad absoluta* y una *categoricidad relativa.*

Categoricidad absoluta.

Se dice que un sistema es *categórico en sentido absoluto* (emplearemos simplemente la palabra *categórico*) si todos sus modelos son isomorfos entre sí.

Categoricidad relativa.

Un sistema se dice *categórico respecto a una cierta clase de objetos Cl* pertenecientes a él si todos los modelos de este sistema en los cuales esta clase *Cl* recibe la misma interpretación son isomorfos.

40. LA UTILIZACIÓN DE UN SISTEMA.

Un problema de índole muy diferente que puede plantearse a propósito del sistema formal es el de su utilización. No se trata ahora de estudiar el sistema en sí mis-

[13] La expresión inglesa correspondiente es *decision problem*, y la alemana *Entscheidungsproblem.*

mo, sino de enfocarlo según su perspectiva práctica, en relación a determinados resultados que nos proponemos obtener. Este tipo de problema forma parte de lo que algunos lógicos denominan *pragmática.*

El problema se puede plantear de dos maneras.

1) Dado un determinado sistema, ¿para qué tipo de investigaciones puede servir y qué género de problemas permite resolver? Este problema se reduce, en suma, a buscar las interpretaciones posibles del sistema.

2) Inversamente, dado un cierto orden de problemas, nos podemos proponer encontrar un sistema formal conveniente gracias al cual estos problemas puedan ser formulados de manera precisa y a continuación (eventualmente) resueltos. El problema se centra, en suma, a formalizar en un sistema apropiado un cierto dominio de enunciados intuitivos.

Desde el punto de vista de la utilización de los sistemas se impone admitir una gran relatividad. Un sistema no debe preferirse a otro por razones apriorísticas, sino solamente en función de una determinada problemática. Y según sea la índole de los problemas a tratar, la formalización deberá ser más o menos intensa.

Así, en el estado actual de la ciencia, el análisis clásico constituye un formalismo perfectamente apropiado a los problemas de la física teórica.

Para resolver el problema de las paradojas es necesario recurrir a un sistema formalizado de manera más completa y rigurosa. (Por ejemplo, a uno de los sistemas mencionados al principio del § 42.) El formalismo intuicionista será utilizado cuando se pretenda operar siguiendo demostraciones puramente constructivas, independientemente de toda idea "a priori" sobre las matemáticas.

Y así sucesivamente.

41. Observaciones terminológicas.

En lo que ha de seguir, nos encontraremos frecuentemente ante correspondencias entre expresiones pertenecientes a lenguas diferentes. Es necesario, pues, dejar perfectamente clara la terminología. Distinguirmos dos casos.

1. Correspondencia entre dos lenguas cualesquiera cuya naturaleza no se precisa.

Diremos que un enunciado A_2 perteneciente a una lengua Ln_2 es una *traducción* a la Ln_2 de un enunciado A_1 perteneciente a una lengua A_1 si existe entre los elementos constitutivos de estas dos lenguas una correspondencia tal que los enunciados A_1 y A_2 se construyan partiendo de elementos correspondientes de Ln_1 y Ln_2 mediante las operaciones correspondientes.

Traducir un enunciado A_1 de una lengua Ln_1 a otra Ln_2 es establecer entre ambas una correspondencia tal que se pueda encontrar un enunciado A_2 de Ln_2 que sea traducción de A_1 en Ln_2.

2. Correspondencia entre un sistema formal y una lengua no formalizada.

Utilizaremos en todos nuestros razonamientos una *lengua básica LB* compuesta

de la lengua española más un cierto número de expresiones [14]. Las lenguas no formalizadas que utilizaremos pueden considerarse como partes de *LB*.

Sea *LF* un sistema formal, LB_n una parte de *LB*, y *A* un enunciado de LB_n.

Diremos que la lengua LB_n es *formalizable* en *LF* si es posible establecer entre LB_n y *LF* una correspondencia tal que a todo enunciado cierto de LB_n corresponda una proposición derivable de *LF*.

Dos elementos pertenecientes respectivamente a LB_n y a *LF* que se correspondan a través de una correspondencia establecida entre LB_n y *LF* se dicen *asociados* por esta correspondencia (cualquiera que sea la naturaleza de ésta).

Si es posible establecer entre LB_n y *LF* una correspondencia tal que los individuos de LB_n se correspondan biunívocamente con las constantes individuales de *LF*, diremos que éstas *representan* a estos individuos en *LF*.

Diremos que una función *F* de LB_n es *representable* en *LF* si hay medio de hacer corresponder a los individuos de LB_n una clase de componentes de *LF* de tal forma que si se aplica *F* a determinados individuos de LB_n y *Fn* a los elementos asociados de *LF*, se obtiene un individuo de LB_n y un elemento de *LF* que están asociados entre sí.

La expresión *Fn* se denomina *representación* en *LF* de la función *F*.

Diremos que una operación de LB_n es *representable* en *LF* si hay medio de hacerla corresponder una operación de *LF* (denominada *representación* de la primera en *LF*) tal que ambas operaciones, aplicadas a elementos asociados, darán elementos asociados.

Diremos que un predicado *P* de LB_n es *representable* en *LF* si es posible hacerle corresponder una expresión *Pd* de *LF* (denominada *representación* de *P* en *LF*) tal que, cuando el predicado *P* se da para ciertos individuos de LB_n, la expresión *Pd* se verifica para los elementos asociados de *LF* (o, más exactamente, que la proposición formada aplicando esta expresión a los elementos asociados de *LF* es derivable).

Nosotros diremos que un enunciado *A* de LB_n es *representable* en *LF* por medio de una proposición A si se puede establecer entre LB_n y *LF* una correspondencia tal que *A* y A queden asociados por esta correspondencia. Una proposición A se denomina *representación* del enunciado *A* si está asociada a *A* mediante una correspondencia entre LB_n y *LF*.

Dado un elemento cualquiera *Ec* de *LF*, podemos hacerle corresponder un elemento determinado de LB_n.

A esta correspondencia la llamaremos *interpretación* de *Ec*, y diremos que mediante esta correspondencia *interpretamos* el elemento *Ec* en LB_n.

Dos elementos pertenecientes respectivamente a *LF* y a LB_n que se hacen corresponder de esta forma se dice que están *asociados por esta interpretación.*

La noción de interpretación de un *elemento* y la de un *sistema* deben distinguirse cuidadosamente una de otra.

---

[14] Ver § 30 e INDICE DE NOTACIONES, 1.1.

SECCIÓN 2.—PRINCIPALES SISTEMAS FORMALES Y FORMALIZACION DE LAS MATEMATICAS.

42. SISTEMAS BÁSICOS Y SISTEMAS CONEXOS.

Existen actualmente numerosos formalismos que abarcan dominios más o menos amplios de la Lógica y las Matemáticas clásicas. No obstante, sólo dos sistemas permiten una representación del conjunto de las matemáticas: los *Principia Mathematica* de RUSSELL y WHITEHEAD [15], caracterizados por la utilización de una *teoría de los tipos* (por medio de una jerarquización de las diferentes categorías de propiedades) [16] y la axiomática de la teoría de conjuntos (ZERMELO, FRAENKEL, VON NEUMANN, BERNAYS [17]).

Estos son los dos sistemas básicos que continúan sirviendo de referencia a todas las investigaciones formales.

Ambos se fundamentan en la utilización de axiomas y reglas (de construcción y de derivación).

Los restantes sistemas —numerosísimos— utilizan una técnica análoga. Así, la lógica de proposiciones y la lógica de predicados, tales como han sido formuladas por HILBERT y BERNAYS [18] o por HILBERT y ACKERMANN [19], la lógica intuicionista de HEYTING [20], los sistemas propuestos por FITCH [21], la teoría de los números reales de MYHILL [22], la teoría de conjuntos de MYHILL [23].

43. LAS LÓGICAS DE ESQUEMAS.

Pero hay que registrar la existencia de otras dos grandes clases de formalismos fundados sobre técnicas diferentes: las *lógicas de esquemas* y las *lógicas combinatorias*. Las *lógicas de esquemas* no utilizan axiomas, sino solamente reglas de derivación.

---

[15] RUSSELL y WHITEHEAD 1.

[16] Las diferentes propiedades se ordenan en una serie infinita de categorías o *tipos*. El sistema incluye una categoría de objetos considerados como individuos, de los que se dice que pertenecen o no al tipo. Por otra parte incluye objetos que corresponden a las propiedades de los individuos y que pertenecen al tipo 1, objetos que corresponden a propiedades de propiedades y que pertenecen al tipo 2, y así sucesivamente. Las reglas de formación de las proposiciones están formuladas de tal manera que una propiedad de tipo n no puede ser aplicada a objetos de un tipo inferior al n.

[17] Ver las notas 15, 16 y 17 del capítulo 1.

[18] HILBERT y BERNAYS 1.

[19] HILBERT y ACKERMANN 1.

[20] HEYTING 1.

[21] FITCH 2 a 4 y 6 a 12.

[22] MYHILL 3.

[23] MYHILL 4 y 5.

VON NEUMANN [24], HILBERT y BERNAYS [25] y más recientemente ACKERMANN [26], han aplicado este método utilizando esquemas de proposiciones.

GENTZEN ha introducido una lógica de esquemas que no opera sobre proposiciones, sino sobre *secuencias* cuyo sentido intuitivo es el siguiente: tal proposición es válida, bajo tales o cuales hipótesis [27]. Las reglas de derivación se transforman en esquemas de demostración que permiten ciertas transformaciones de las secuencias. Ya no se trata de una teoría de proposiciones, sino de demostraciones. Sobre tales bases, GENTZEN ha construido diversos formalismos correspondiendo, respectivamente, a la lógica de proposiciones [28], a la lógica elemental de predicados [28], a la lógica intuicionista [28], a una forma de la teoría de tipos [29], a la aritmética [30] y a una parte de la teoría de los ordinales transfinitos [31].

El método de GENTZEN ha sido desarrollado por JOHANSSON [32] y por CURRY [33].

El método de los esquemas ha sido igualmente utilizado por FITZ (FITZ 13, ver a este respecto GRIZE 1) y por BETH, en su método de los *cuadros semánticos* (véase BETH 12).

44. LAS LÓGICAS COMBINATORIAS.

Las lógicas combinatorias parten de un análisis de la noción de sustitución y se esfuerzan en eliminar las ambigüedades ligadas a esta noción [34].

En tanto que las lógicas clásicas (del tipo de los *Principia Mathematica*) se esfuerzan en hallar equivalentes formales a las expresiones y a los razonamientos del discurso intuitivo (proposiciones analizadas como sujeto y predicado, relaciones, descripciones individuales), y mientras que las lógicas de esquemas tratan de crear un cálculo próximo al de *razonamiento natural*, las lógicas combinatorias sólo alcanzan la intuición al nivel de las operaciones. Se basan, efectivamente, en el estudio de ciertas combinaciones de tipo elemental que se pueden efectuar sobre una serie de signos (aplicación, agrupación, inversión, repetición). De tal manera, constituyen una especie de lógica de segundo grado que ya no concierne directamente a las expresiones lingüísticas, sino a las operaciones que pueden realizarse sobre expresiones simbólicas.

En general, se presentan en forma de cálculos, aunque es posible describirlas como sistemas formales puros. Estas lógicas se dividen en dos grandes grupos: los cálculos

[24] VON NEUMANN 1.
[25] HILBERT y BERNAYS 1.
[26] ACKERMANN 8.
[27] GENTZEN 1. Ver también FEYS 7 y 8.
[28] GENTZEN 1.
[29] GENTZEN 2.
[30] GENTZEN 3 y 7.
[31] GENTZEN 3 y 8.
[32] JOHANSSON 1.
[33] CURRY 11.
[34] Sobre las lógicas combinatorias, ver FEYS 6.

de la conversión-λ (CHURCH [35], KLEENE [36], ROSSER [37]) y los sistemas puramente combinatorios CURRY [38]. ROSSER [39] ha demostrado el procedimiento de pasar de un grupo a otro.

Hasta el presente, estos sistemas han permitido representar la *aritmética recursiva* [40] y la teoría de los *ordinales constructivos* (segmento de los ordinales de la segunda clase de CANTOR) [41]. La introducción de axiomas adecuados para formalizar la distribución de las expresiones en categorías (teoría de la *funcionalidad*) permitirá sin duda abarcar sectores mucho más amplios y finalizar en un formalismo suficiente para el análisis.

Por otra parte, al aclarar ciertos conceptos absolutamente fundamentales (y en particular el de sustitución), los métodos combinatorios permitirán indudablemente poner al día el mecanismo fundamental de las antinomias y abordar por nuevas vías el problema de la no-contradicción.

45. POTENCIA RELATIVA DE LOS SISTEMAS.

Los sistemas formales pueden clasificarse de otro modo, situándose no desde el punto de vista de la técnica utilizada, sino desde el punto de vista de su *potencia*. Un sistema es tanto más potente como rico en medios de expresión y de demostración. Situándonos en la perspectiva de la formalización de las matemáticas —uno de los objetos más importantes del estudio de los fundamentos— podemos decir que un sistema es tanto más potente a medida que pueda ser interpretado bajo la forma de una teoría matemática más vasta. Así, un sistema que puede ser interpretado mediante la teoría de los números reales es más potente que otro que sólo puede ser interpretado mediante una teoría de la aritmética ordinaria.

46. VARIABLES Y CONSTANTES.

Entre las componentes primitivas de un sistema, unas son *variables* y otras *constantes*. Cuando se describe un sistema no es necesario dar una definición rigurosa de estas categorías de objetos: las reglas del sistema deciden el sentido que hay que atribuirles, determinando las condiciones de su empleo.

Desde un punto de vista intuitivo, una constante puede considerarse como un símbolo que designa un objeto perfectamente determinado (por ejemplo, un número

[35] CHURCH 1, 4 y 12. CHURCH y ROSSER.
[36] KLEENE, 1 y 2.
[37] ROSSER 1 y 6.
[38] CURRY 1, 3, 7.
[39] ROSSER 1.
[40] CHURCH 4 y 12. KLEENE 2.
[41] CHURCH 10, KLEENE 8 y 11. CHURCH y KLEENE 1.

entero, la función de *adición*, etc.), y una variable (de determinada categoría) como un símbolo que puede ser reemplazado por una constante (perteneciente a la misma categoría). (Así, una *variable funcional* es un símbolo que puede ser reemplazado por una función cualquiera).

47. SISTEMAS LÓGICOS PUROS.

Ciertos sistemas —aparte de los operadores proposicionales y los signos que se utilizan para agrupar los símbolos (paréntesis)— contienen solamente variables. Tales sistemas sólo permiten expresar generalidades. (Así el sistema del § 4). Son los *sistemas lógicos puros*. (Corresponden a partes más o menos extensas de la lógica intuitiva, no formalizada, y proporcionan simplemente esquemas de razonamiento).

Añadiendo a estos sistemas constantes, se obtienen otros que pueden ser utilizados para la formalización de teorías matemáticas. (Así, el sistema del § 6 incluye constantes.)

El sistema lógico puro que presenta mayor interés es la *lógica de proposiciones*. Este sistema corresponde a la teoría pura de las proposiciones (no analizadas como sujeto y predicado). Existen varias versiones del sistema en cuestión. El presentado en el § 4 constituye una simplificación del sistema enunciado por RUSSELL y WHITEHEAD para la lógica de proposiciones [42].

Si se pretende analizar las proposiciones como sujeto y predicado hay que recurrir a una lógica más potente, dotada de expresiones relativas a los predicados. Existe una serie infinita de lógicas de predicados, jerarquizadas según la naturaleza de los predicados que incluyen y de las operaciones que hacen posibles.

La *lógica de predicados de primer orden, llamada también cálculo funcional de primer orden o cálculo de predicados de primer orden* [43], supone, además de los elementos de la lógica de proposiciones, *variables individuales* (que corresponden a objetos que se consideran como individuos en relación a los predicados), *variables predicativas de orden 1* (correspondientes a predicados de individuos) y los dos cuantificadores; las operaciones de cuantificación sólo pueden afectar a variables individuales. Las variables predicativas se refieren a variables individuales, y pueden tener uno o varios significados.

Esta lógica permite construir proposiciones que pueden traducirse, por ejemplo, en enunciados del siguiente tipo:

a) Cualquiera que sea el objeto α, posee la propiedad *P*.
b) Hay un objeto α que posee la propiedad *P*.

---

[42] Los axiomas del § 4 son los cuatro primeros axiomas de RUSSELL y WHITEHEAD. Estos dan un quinto axioma, pero se ha demostrado que puede deducirse de los anteriores, RUSSELL y WHITEHEAD introducen por vía de definición otros tres operadores proposicionales.

[43] En inglés: *functional calculus of first order*. También se utiliza la expresión: *calcul restreint des prédicats*. (En inglés: *restricted predicate calculus*. En alemán: *engere Prädikatenkalkül*).

c) Cualquiera que sea el objeto α, existe un objeto β y un objeto γ tales que entre ellos se da la relación *R*.

La *lógica de predicados de segundo orden* admite las operaciones de cuantificación para las variables predicativas. Por tanto, permite construir proposiciones que pueden traducirse en enunciados del tipo: cualquiera que sea la propiedad *P*, si el objeto α posee esta propiedad, el objeto β también la posee.

La *lógica de predicados de tercer orden* incluye, además de los elementos de la lógica de predicados de segundo orden, *variables prdicativas de orden 2* (correspondientes a predicados de predicados), que tienen por argumentos variables individuales o variables predicativas de orden 1.

Y así sucesivamente.

La *lógica de predicados de orden* ω es un sistema que contiene todas las lógicas de predicados de orden finito, y supone la teoría de tipos.

El sistema que vamos a considerar en el CAPITULO III es un sistema que comporta la lógica de predicados de orden ω, además de ciertas constantes.

48. Principales resultados metateóricos positivos.

Precisados los anteriores conceptos, indiquemos brevemente cuáles son los resultados metateóricos más importantes.

La *lógica de proposiciones* constituye un sistema coherente, saturado sintácticamente en sentido débil y resoluble.

La *lógica de predicados de primer orden* es coherente. (Demostración debida a Hilbert y Ackermann [44]. Gentzen ha dado otra demostración basada en su método de los esquemas [45].)

La demostración de coherencia ha sido extendida por Gentzen a un sistema mucho más vasto, que corresponde prácticamente al de los *Principia Mathematica,* pero sin el axioma de infinitud y con una teoría simple de los tipos (el sistema incluye, pues, el axioma de elección [46]). Fitch [47], Lorenzen [48] y Schütte [49], han demostrado la coherencia de la *teoría ramificada de los tipos* [50]. Se dan igualmente las demostraciones de coherencia por la teoría de tipos en Beth (Beth 1 bis) y en Tarski (Tarski 3).

---

[44] Hilbert y Ackermann 1.
[45] Gentzen 1.
[46] Gentzen 2.
[47] Fitch 1.
[48] Lorenzen 3.
[49] Schütte 3.
[50] La *teoría ramificada de tipos* es una versión de la *teoría de tipos* en que las propiedades de cada tipo se distribuyen en niveles jerarquizados: cada tipo se *ramifica,* por así decir, en un número infinito de niveles. Ver § 79.

GÖDEL ha demostrado la saturación semántica (absoluta) de la lógica de predicados de primer orden [51]. Pero la demostración de GÖDEL no es totalmente constructiva, pues utiliza la aritmética clásica y la "exclusión de tercero".

El mismo resultado se ha conseguido más recientemente mediante otros procedimientos de tipo algebraico por HENKIN [52], RASIOWA y SIKORSKI [53].

El problema de la decisión ha quedado resuelto para ciertas clases de proposiciones de la lógica de predicados de primer orden [54].

GENTZEN ha demostrado la coherencia de un formalismo correspondiente a la aritmética clásica [55].

ACKERMANN [56] ha formulado una nueva demostración de la aritmética clásica, estableciendo igualmente la coherencia de diversos formalismos correspondientes a determinadas partes del Análisis [57].

49. PRINCIPALES RESULTADOS METATEÓRICOS NEGATIVOS.

Junto a estos resultados positivos hay que considerar un cierto número de resultados negativos, que podemos clasificar en tres grupos:

1) Teorema de GÖDEL y sus generalizaciones, sobre la existencia de proposiciones indecidibles [58] y consecuencias de estos teoremas en relación con las demostraciones de coherencia [59].

2) Teorema de CHURCH y teoremas relacionados sobre los problemas de decisión [60].

3) Teoremas sobre las propiedades semánticas de los sistemas [61].

Algunos trabajos, debidos a KLEENE establecen una conexión entre los Teoremas de GÖDEL y CHURCH [62], en tanto que otros, debidos a TARSKI y a MOSTOWSKI, establecen una conexión entre el Teorema de GÖDEL y algunos resultados pertenecientes al tercer grupo [63]. Las relaciones existentes entre estos diferentes grupos indican que los hechos de limitación van ligados a mecanismos muy fundamentales pertenecientes a la naturaleza misma de los formalismos.

---

[51] GÖDEL 2.
[52] HENKIN 2.
[53] RASIOWA y SIKORSKI 1.
[54] Ver sobre este punto § 169.
[55] GENTZEN 3 y 7.
[56] ACKERMANN 7.
[57] Por ejemplo FITCH 11.
[58] Ver CAPITULOS III y IV.
[59] Ver CAPITULO V.
[60] Ver CAPITULO VI.
[61] Ver CAPITULOS VIII y IX.
[62] Ver CAPITULO VII.
[63] Ver CAPITULO VIII.

SECCIÓN 3.—LAS PARADOJAS.

50. TEOREMAS DE LIMITACIÓN Y PARADOJAS.

Las demostraciones de los diferentes teoremas que acaban de ser citados en el parágrafo anterior recurren todos a la utilización de *paradojas*. Los razonamientos que llevan a las paradojas pueden constituir mecanismos de prueba absolutamente correctos, a condición de ser depurados de las ambigüedades que originan las contradicciones. Es perfectamente legítimo construir proposiciones del tipo que origina las paradojas; la verdadera dificultad comienza en el momento en que se trata de analizarlas. La contradicción es el resultado de una formulación incorrecta o de una interpretación incorrecta de ciertos enunciados.

La principal originalidad del método de GÖDEL ha consistido precisamente en utilizar una proposición paradójica sin conducir a una contradicción.

A decir verdad, el iniciador de este tipo de demostraciones fue FINSLER [64]. Pero la demostración de FINSLER era puramente esquemática y dejaba en pie dificultades que sólo fueron allanadas mediante el método de GÖDEL.

51. LAS DOS CATEGORÍAS DE PARADOJAS.

Se distinguen dos grandes categorías de paradojas: *paradojas sintácticas* y *paradojas semánticas*.

Las primeras (entre las que hay que incluir, por ejemplo, las paradojas de RUSSELL [65] y de BURALI-FORTI [66], comportan solamente conceptos matemáticos (tales como el de conjunto) y operaciones pertenecientes a la lógica de predicados, como las operaciones de generalización [67]. Estas paradojas hacen desembocar en contradicciones cuando no se establece ninguna distinción entre las categorías de expresiones que incluyen. La *teoría de tipos*, incluso en su forma ramificada (RAMSEY), que establece una jerarquía de niveles de expresiones, permite eliminarlas.

Por el contrario, no permite eliminar las *paradojas semánticas*, que hacen intervenir relaciones entre los elementos lógicos considerados y las entidades exteriores al sistema a que pertenecen y que tratan de representar (así los conceptos de *definible* y *cierto*).

---

[64] FINSLER 1.
[65] RUSSELL 2. Ver CAPITULO IX, nota 74.
[66] BURALI-FORTI 1.
[67] Ver INDICE DE NOTACIONES, 2.22.1.3; 2.22.1.4 y 2.22.1.5.

Estas paradojas sólo pueden eliminarse estableciendo una distinción entre lengua y metalengua.

Los modelos de paradojas utilizados en las demostraciones de los teoremas de limitación son de tipo semántico. Se trata esencialmente de la *paradoja del embustero* y de la *paradoja de* RICHARD.

52. LA PARADOJA DEL EMBUSTERO.

La *paradoja del embustero* o *paradoja de* EPIMÉNIDES puede formularse como sigue:

El cretense EPIMÉNIDES *dice que los cretenses son embusteros.*

Este enunciado, tomado de manera inmediata, lleva a una contradicción. Supongamos, en efecto, que EPIMÉNIDES dice la verdad; entonces, puesto que es cretense, es embustero, y lo que dice es falso.

Supongamos, por el contrario, que miente: entonces los cretenses no son embusteros, ni tampoco EPIMÉNIDES. Por consiguiente, lo que dice es cierto.

En general, se podría formular este enunciado de la siguiente manera, para hacer destacar más directamente la noción de verdad: *EPIMENIDES el cretense, dice que lo que dice es falso.*

La paradoja del embustero es esencialmente un enunciado que afirma su propia falsedad.

Si este enunciado lleva a una contradicción es porque envuelve una confusión entre lengua y metalengua.

Sea un enunciado A, perteneciente a una lengua Ln_1 [68].

Para hablar de la verdad o la falsedad de este enunciado debemos evadirnos de la lengua Ln_1 y utilizar otra en la que sea posible a la vez representar los elementos de la lengua Ln_1 y la noción de verdad correspondiente a los enunciados de Ln_1.

Llamemos Ln_2 a la lengua que cumple dichos requisitos, y sea A^* el término de Ln_2 que designa el enunciado A, y sea A^* *es falso* el enunciado de Ln_2 que expresa la falsedad de A. Por el hecho de distinguir las lenguas Ln_1 y Ln_2 ya no podemos construir un enunciado que afirme su propia falsedad; todo enunciado que afirme la falsedad de un enunciado de Ln_1 pertenece, en efecto, a Ln_2.

Así, para analizar correctamente nuestro ejemplo, debemos distinguir dos estratos en las afirmaciones de EPIMÉNIDES: en primer lugar, lo que dice EPIMÉNIDES en un primer nivel y, posteriormente, el juicio que emite, en un segundo nivel, sobre lo que ha dicho en el primero. El círculo vicioso proviene de confundir estos dos niveles, y se los confunde porque se utiliza una sola lengua: el español.

La utilización de un lenguaje formal permitiría introducir explícitamente las necesarias distinciones.

[68] Para las notaciones, ver INDICE DE NOTACIONES, 2.28.

Mientras se permanece en esta disociación de los niveles no será ya posible formular un enunciado que afirme su propia falsedad. Sin embargo, existe un rodeo que permite, en las condiciones indicadas, formular correctamente un enunciado de esta naturaleza. Tal rodeo consiste en el paso de la lengua Ln_2 a la lengua Ln_1.

Supongamos que sea posible trasladar a la lengua Ln_1 en anunciado A^* *es falso*, perteneciente a Ln_2.

Entonces obtenemos un enunciado de Ln_1 que afirma la falsedad de un enunciado de Ln_1. Bastará con aplicar tal enunciado a sí mismo para obtener, en forma correcta, la antinomia del embustero.

El problema se presenta así:

Sea A^{**} la traducción a Ln_1 del símbolo A^* de Ln_2. Y sea *Fal* (A^{**}) la traducción a Ln_1 del enunciado de Ln_2: A^* *es falso.*

Si pudiésemos construir un enunciado A de suerte que A coincidiese con *Fal* (A^{**}), tendríamos un enunciado de Ln_1 que afirmaría su propia falsedad.

La antinomia del embustero, en su forma inmediata, sólo constituye un enunciado correcto cuando se la considera perteneciente a la metalengua de la lengua básica de que se ha partido, pero puede volver a constituir un enunciado correcto de esta lengua básica mediante una doble traducción.

Lo esencial del Método de GÖDEL consiste precisamente en establecer un sistema de correspondencia que permita realizar esta doble traducción.

53. La paradoja de Richard.

La *paradoja* de RICHARD no utiliza ya el concepto de verdad, sino el de *definición* [69]. Esta paradoja está en estrecha relación con el procedimiento de la diagonal [70].

---

[69] RICHARD 1 y 2.

[70] Este procedimiento ha sido utilizado por CANTOR para demostrar que no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1.

Todo número real comprendido entre 0 y 1 puede ponerse en forma de una fracción decimal ilimitada cuya parte entera es nula. Supongamos que todas las fracciones de este tipo hayan podido ordenarse en una sucesión ilimitada, es decir, hayan podido ser puestas en correspondencia biunívoca con la serie de números enteros.

Esta serie de fracciones se presenta en la forma de un cuadro del tipo:

$$0, a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0, a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0, a_n\ b_n\ c_n\ d_n\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde las letras a_1, b_1, etc., representan los números enteros.

Entonces se puede definir de la manera siguiente una fracción decimal ilimitada del mismo tipo, y por tanto un número real comprendido entre 0 y 1, que no forma parte ciertamente de este cuadro.

Se adopta por primer decimal el entero obtenido añadiendo una unidad al primer decimal

El conjunto *En-F* de las fracciones decimales que se puede definir en lengua española por medio de un número finito de signos es, evidentemente, *numerable* [71]. Podemos ordenar este conjunto colocando sus elementos según el número de signos que intervienen en sus respectivas definiciones (suprimiendo las posibles repeticiones) y clasificando los elementos definidos por un mismo número de signos según el orden lexicográfico [72]. Entonces podemos, mediante el procedimiento de la diagonal, definir una fracción decimal *Fd* que no pertenece a este conjunto: la que, en la *n-ésima* fila, difiere en una unidad de la *n-ésima* fracción del conjunto considerado. La definición que acabamos de dar sólo requiere un número finito de signos, y la fracción *Fd*, por tanto, forma parte del conjunto *En-F*, contrariamente a su definición.

Nuevamente nos encontramos con una contradicción que resulta de la confusión entre lengua y metalengua.

Efectivamente, la definición de *Fd* no es del mismo nivel que las definiciones de las fracciones pertenecientes al conjunto *En-F*, y hace intervenir una propiedad de estas definiciones: la de hacer corresponder una determinada cifra a una determinada fila [73].

Si las fracciones del conjunto *En-F* se definen en una lengua Ln_1, la definición de la fracción *Fd* pertenece a una lengua Ln_2 en el interior de la cual es posible hablar de las propiedades de los enunciados de la lengua Ln_1. Esta lengua Ln_2 debe ser una metalengua de Ln_1. Al no pertenecer a la categoría de los enunciados de Ln_1 el enunciado que sirve de definición a *Fd*, la contradicción desaparece.

No obstante, será posible formular correctamente la antinomia de RICHARD por el mismo procedimiento que ha sido señalado a propósito de la antinomia del embustero, disponiendo de una representación de los enunciados de Ln_2 en la lengua Ln_1.

---

de la primera fracción de la serie; por segundo decimal, el entero obtenido añadiendo una unidad al segundo decimal de la segunda fracción de la serie, y, en general, se adopta por *n-ésimo* decimal al entero obtenido añadiendo una unidad al *n-ésimo* decimal de la *n-ésima* fracción de la serie. (Se supone que añadiendo una unidad a 9 se obtiene 0).

Continuando esta construcción, se sigue, por tanto, la diagonal del cuadro, partiendo de la primera fracción y descendiendo hacia la derecha. (Esta diagonal pasa por a_1, b_2, c_3, etc.).

De esta forma se obtiene la fracción:

$$0, (a_1 + 1)\ (b_2 + 1)\ (c_3 + 1)\ \ldots\ldots\ (n_n + 1)\ldots,$$

que es ciertamente diferente de cada una de las fracciones de la serie, puesto que difiere de la primera al menos en su primera cifra decimal; de la segunda, al menos en su segunda cifra decimal, y así sucesivamente.

[71] Se dice que un conjunto es *numerable* si se puede establecer una correspondencia entre sus elementos y la serie de números enteros.

[72] Los signos utilizados se ordenan según una ley determinada (por ejemplo, en orden alfabético). Las definiciones consideradas son series formadas por medio de estos signos. Si dos series no comienzan por el mismo signo, se ordenan siguiendo el orden de sus signos iniciales. Si dos series tienen sus signos iniciales idénticos, se ordenan según el orden de sus segundos signos. Y así sucesivamente. Las fracciones referidas se ordenan según sus definiciones.

[73] La definición de una fracción permite, en efecto, indicar cuál es la cifra que ocupa el primer puesto, el segundo, etc.

Como puede verse, el problema se reduce a transportar los enunciados de una metalengua a la lengua con la que está relacionada.

Existe una forma simplificada de la paradoja de RICHARD: la paradoja de BERRY, que podemos presentar de la siguiente forma:

De todo número natural, es posible dar una descripción en lengua francesa que le defina unívocamente mediante un número finito de signos (letras, cifras, signos de puntuación, paréntesis). Entre las diferentes descripciones que se pueden dar de un número, existirá una que utilice un mínimo de signos. Hagamos corresponder, entonces, a cada número natural su forma de descripción más abreviada.

Consideremos ahora el conjunto de los números naturales cuya descripción (mínima) requiera menos de mil palabras. Como sólo cabe un número finito de combinaciones finitas de los elementos de un conjunto finito, estos números forman un conjunto finito. Existen, por tanto, números naturales que no formarán parte de este conjunto. Sea m el más pequeño de ellos.

Este número m lo podremos definir como el número natural más pequeño que es posible definir con menos de mil palabras. Pero entonces tenemos una descripción del número m que lo define en menos de mil palabras, con lo que terminamos en una contradicción.

SECCIÓN 4.—LA ARITMETIZACION Y LAS FUNCIONES RECURSIVAS.

54. EL PRINCIPIO DE ARITMETIZACIÓN Y LA NOCIÓN DE FUNCIÓN RECURSIVA.

Para acometer un transporte de este género, GÖDEL ha recurrido al *método de la aritmetización,* que consiste en asociar biunívocamente números enteros a los objetos del sistema formal que se estudia.

Este método hace posible formular, mediante procedimientos aritméticos, un extenso número de enunciados y razonamientos metateóricos. La idea de aritmetización se encontraba ya en LEIBNIZ, *pero fue* GÖDEL quien la puso en práctica por primera vez de forma sistemática.

La utilización práctica de este método descansa en la *teoría de funciones recursivas.* Por tanto, resulta indispensable hacer una breve referencia.

Intuitivamente, la noción de recursividad corresponde a la de un cálculo que se puede acometer por aproximaciones sucesivas y que debe llevar necesariamente a un resultado. Una *función recursiva* es una función cuyos valores pueden ser calculados progresivamente, partiendo de valores previamente conocidos. Tal función se define mediante un *esquema de recursión,* estando dados:

1) El valor de la función por el valor 0 de su argumento.

2) La forma de calcular el valor de la función para el valor $(n + 1)$ de su argumento cuando se conoce previamente su valor para el valor n de dicho argumento.

Para definir una función por medio de un esquema de recursión, resulta cómodo servirse de la función *sucesor*. Esta función puede definirse de manera rigurosa por medio de axiomas. (Ver, por ejemplo, § 2). Pero se la puede definir intuitivamente como una función que, aplicada a un entero, le hace aumentar una unidad. Designándola con el símbolo *Scc*, tendremos:

$Scc\ \alpha = \alpha + 1$ [74].

Todas las funciones aritméticas elementales son recursivas. La *suma* puede definirse por medio del esquema siguiente:

$$\alpha + 0 \quad = \alpha$$
$$\alpha + Scc\ n = Scc\ (\alpha + n).$$

Este esquema hace posible calcular por aproximaciones sucesivas el valor de toda expresión del tipo $(\alpha + \beta)$, en donde α y β pueden ser reemplazadas por números enteros cualesquiera.

La *multiplicación* puede ser definida por medio del esquema siguiente:

$$\alpha \times 0 \quad = 0$$
$$\alpha \times Scc\ n = (\alpha \times n) + \alpha.$$

(La utilización de este esquema supone que se disponga previamente de un esquema recursivo para la suma.)

Esta definición permite, a su vez, definir mediante un esquema de recursión otra función elemental: la *exponenciación* (o elevación a potencia), que designaremos mediante el símbolo *Exp.*

Sea el esquema siguiente:

$$Exp.\ \alpha\ 0 \quad = 1$$
$$Exp.\ \alpha\ (Scc\ n) = (Exp.\ \alpha\ n) \times \alpha.$$

Utilizando la notación aritmética usual, tendríamos:

$$\alpha^0 \quad = 1$$
$$\alpha^{Scc\ n} = \alpha^n \times \alpha.$$

55. El esquema de recursión primitiva.

Las funciones definidas en estos ejemplos son funciones de dos argumentos. Para cada uno de los esquemas, uno de los argumentos conserva un valor fijo; el cálculo se realiza solamente sobre el otro argumento. De manera general, se pueden conside-

[74] α es un símbolo sintáctico que puede ser reemplazado por cualquier entero. (Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.23.1.1.)

rar funciones de $(n + 1)$ argumentos. En el caso más simple, n argumentos conservan un valor fijo, y el cálculo se realiza sobre el argumento $(n + 1)$-ésimo.

Dicho de forma más precisa, el esquema indica cómo se pasa del valor de la función para el valor m de este argumento, al valor de la función para el valor $(m + 1)$ del mismo argumento. Un esquema de recursión de este género se denomina *esquema de recursión primitiva.* Nosotros denominaremos a la forma general de los esquemas de este tipo el *esquema de recursión primitiva.*

Para formular correctamente los esquemas de recursión debemos distinguir tres categorías de expresiones:

— *Constantes individuales* (números enteros).
— *Variables individuales* (símbolos que pueden ser reemplazados por constantes individuales).
— *Funciones* (que designaremos mediante símbolos sintácticos)[75].

El esquema de recursión primitiva se presenta como sigue:

$$F\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,0 \quad = G\,X_1\,X_2 \ldots X_n$$
$$F\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,(Scc\,\alpha) = H\,X_1\,X_2 \ldots X_n\;\alpha\,(F\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,\alpha).$$

En este esquema, F representa una función de $(n + 1)$ argumentos (definida por el esquema), G una función de n argumentos y H una función de $(n + 2)$ argumentos; $X_1, X_2, \ldots X_n$ son variables, y α es un símbolo que puede ser reemplazado por un entero cualquiera. Las funciones G y H se suponen previamente definidas.

56. Otros esquemas de recursión.

Existen esquemas de recursión más complicados. Por ejemplo: el *esquema de recursión indirecta,* en el que la función depende de la variable a través de relaciones previamente definidas; el *esquema de recursión simultánea,* en el que simultáneamente se definen dos o más funciones que dependen unas de otras; el *esquema de recursión cruzada,* en el cual la recursión se manifiesta no en una, sino en dos variables (en cuyo caso tal esquema supone al menos tres ecuaciones).

Ejemplo de un *esquema de recursión indirecta*:

$$F\,0 \quad = a$$
$$F\,(Scc\,n) = G\,n\,[F\,(H_1\,n)]\;[F\,(H_2\,n)] \ldots [F\,(H_r\,n)].$$

En este esquema, G es una función ya definida de $(r + 1)$ argumentos, $H_1, H_2, \ldots H_r$ son funciones (ya definidas) de un argumento, y tales que: $H_1\,n \leqq H_2\,n \ldots \leqq H_r\,n \leqq n$.

---

[75] Para las notaciones, véase INDICE DE NOTACIONES, 2.21.1.11; 2.21.1.14; 2.21.1.2; 2.21.3.1 y 2.23.1.

Ejemplo de un *esquema de recursión simultánea*:

$$\begin{aligned} F_1\,0 &= a \\ F_1\,(Scc\,n) &= G_1\,n\;(F_1\,n)\;(F_2\,n) \\ F_2\,0 &= b \\ F_2\,(Scc\,n) &= G_2\,n\;(F_1\,n)\;(F_2\,n) \end{aligned}$$

En este esquema F_1 y F_2 son las funciones a definir; G_1 y G_2 son funciones (ya definidas) de tres argumentos.

Adoptaremos como ejemplo de una función definida por un *esquema de recursión cruzada* la *función de* ACKERMANN [76]. El esquema de definición de esta función utiliza tres funciones auxiliares, que son definidas por esquemas de recursión primitiva:

$$\begin{aligned} Akn_a\,0 &= 0 \\ Akn_a\,(Scc\,n) &= 1, \\ Akn_b\,0 &= 1 \\ Akn_b\,(Scc\,n) &= 0, \\ Akn_c\,0 &= 0 \\ Akn_c\,(Scc\,n) &= n. \end{aligned}$$

La función *Akn* queda definida como sigue:

$$\begin{aligned} &Akn\;\alpha\;0\;(Scc\,n) = [Akn_b\,(Akn_c\,n) \\ &\qquad \times Akn_a\,n] + [\alpha \times Akn_a\,(Akn_c\,n)]. \\ &Akn\;\alpha\;(Scc\,\beta)\;(Scc\,n) = Akn\;\alpha\;[Akn\;\alpha\;\beta\;(Scc\,n)]\;n. \end{aligned}$$

($Akn\;\alpha\;0\;(Scc\,n)$ es una expresión que es igual:

a 0 cuando $n = 0$ (cualquiera que sea α);
a 1 cuando $n = 1$ (cualquiera que sea α);
a α cuando $n > 1$),

y, en particular:

$$\begin{aligned} &Akn\;\alpha\;\beta\;1 = \alpha \times \beta \\ &Akn\;\alpha\;\beta\;2 = \alpha\,. \end{aligned}$$

La segunda línea del esquema permite pasar del valor de la función para el valor n del tercer argumento al valor de la función para el valor $(n + 1)$ de este argumento. La tercera línea del esquema permite pasar del valor de la función para el valor n del segundo argumento al valor de la función para el valor $(n + 1)$ de este argumento.

ACKERMANN ha demostrado que esta función no puede definirse mediante un esquema de recursión primitiva. La existencia de este tipo de funciones ha hecho idear a HILDEBRAND la generalización de la noción de recursividad, en el que ya no se utilizan dos o tres ecuaciones definidoras, sino un sistema finito de ecuaciones sometidas a determinadas condiciones.

[76] ACKERMANN 2.

57. Las funciones recursivas primitivas.

Dadas ciertas funciones elementales, se puede definir iterativamente mediante un esquema de recursión primitiva, toda una clase de funciones. GÖDEL, partiendo del esquema de recursión primitiva, ha definido una clase de funciones denominadas *funciones recursivas primitivas* [77].

Como funciones básicas utiliza:

— *la función sucesor Scc*;

— *la función constante Cnt*, cuyo valor es siempre 0 ($Cnt\ \alpha = 0$);

— *la función de selección* $Sel^{(in)}$, que despeja la i-ésima variable ($Sel^{(in)}\ X_1\ X_2 \ldots X_n = X_i$).

Una función recursiva primitiva es la que puede obtenerse partiendo de estas tres funciones básicas mediante las tres operaciones siguientes:

1) aplicación de una función a una serie de argumentos;

2) aplicación del *esquema de sustitución*:

$$F\ X_1\ X_2 \ldots X_n = G\ (H_1\ X_1\ X_2 \ldots X_n)\ (H_2\ X_1\ X_2 \ldots X_n) \ldots (H_m\ X_1\ X_2 \ldots X_n),$$

donde $G, H_1, H_2, \ldots H_m$ son funciones previamente definidas.

3) Aplicación del *esquema de recursión primitiva.*

Todas las funciones elementales de la Aritmética entran en esta clase (suma, diferencia, multiplicación, elevación a potencia, etc.).

58. Aritmetización recursiva.

Existe una parte importante de la Aritmética en la que se utilizan exclusivamente procedimientos puramente constructivos: recursión e inducción. Esta es la *Aritmética recursiva.*

En términos precisos, la Aritmética recursiva es la parte de la teoría de números enteros que se puede obtener por medio de operaciones lógicas elementales [78] (salvo las operaciones de generalización), de la relación de igualdad (con los axiomas que la caracterizan), del principio de inducción y de definición recursivas (definiciones de funciones mediante un esquema de recursión primitiva).

La teoría de la división, la del máximo común divisor, la de la descomposición en factores primos (con el teorema de la unicidad de la descomposición) derivan de la Aritmética recursiva. Si se la formaliza en un sistema apropiado, es posible repre-

[77] GÖDEL 3, pág. 179.

[78] Estas operaciones son: la negación, la conjunción, la implicación y la equivalencia. Por tanto, no se puede hacer uso de cuantificadores.

sentar el cálculo de valores de una función recursiva cualquiera mediante derivaciones operadas en este formalismo.

El método de GÖDEL hace uso de la Aritmética recursiva, y fue GÖDEL quien dio a ésta un carácter totalmente constructivo.

59. LAS FUNCIONES RECURSIVAS GENERALES.

La noción de recursión primitiva ha sido generalizada, siguiendo directrices independientes entre sí, por KLEENE, CHURCH y TURING. Como para la exposición del teorema de GÖDEL no vamos a utilizar las generalizaciones de CHURCH y TURING, sólo nos ocuparemos ahora de la generalización de KLEENE [79].

El concepto de *función recursiva general* [80] fue introducido por KLEENE siguiendo una sugerencia hecha por HERBRAND a GÖDEL y aceptada por éste con ciertas modificaciones [81]. Para aquel autor, este tipo de función es el que puede definirse mediante un sistema de *ecuaciones.*

Nosotros definiremos un *término aritmético* de la siguiente forma:

1) Toda constante individual es un término aritmético.

2) Toda variable individual es un término aritmético.

3) Si F es una función de n argumentos, y si $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ son términos aritméticos,

$F\ \delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$ es también un término aritmético.

Una *ecuación* es una expresión de la forma $\delta_1 = \delta_2$, donde δ_1 y δ_2 son términos aritméticos.

Si estos términos contienen las funciones $G_1, G_2, \ldots G_r$, la ecuación se denomina *ecuación en* $G_1, G_2, \ldots, G_r$.

KLEENE considera dos operaciones:

1) Operación On_1, *sustitución*: consiste en reemplazar las variables de una expresión por constantes;

2) Operación On_2, *cálculo de un valor*: consiste en reemplazar una expresión de la forma $F\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$, en el segundo miembro de una ecuación por la constante β, si se dispone previamente (sea en el sistema inicial, sea por aplicación de las operaciones On_1 y On_2 a este sistema) de la ecuación $F\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta$.

Si se puede obtener una cierta ecuación a partir de un sistema dado de ecuaciones mediante las operaciones On_1 y On_2, se dice que tal ecuación es *deducible* de dicho sistema.

Una función F de n argumentos se dice que es *recursiva general* si existe un sistema de ecuaciones tal que para toda serie de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se pueda obtener

---

[79] Las generalizaciones de CHURCH y de TURING se utilizarán en el Capítulo VI y serán explicadas en el mismo.

[80] KLEENE 5, págs. 727-731.

[81] En un curso dado en Princeton, en 1934.

mediante operaciones On_1 y On_2 una ecuación de la forma $F\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots\ \alpha_n = \beta$ para una constante única β.

El sistema que define la función debe ser, por consiguiente, tal que para todo sistema de argumentos se pueda, efectivamente, obtener el valor de la función, y que este valor sea único. El sistema de ecuaciones puede incluir, además de la función que se va a definir, otras funciones que actúan como funciones auxiliares. El sistema está dispuesto de tal forma, que permite calcular sus valores. Estas funciones pueden superponerse unas a otras de diversas maneras, pero en el curso del cálculo de la función principal (que se trata de definir) son sucesivamente eliminadas.

La función de ACKERMANN, definida en el § 56, da un ejemplo de función recursiva general.

Esta noción de función recursiva puede utilizarse para extender el concepto de recursividad a otras categorías de objetos: predicados, clases, conjuntos.

60. La noción de predicado recursivo.

Se denomina *función representativa* de un predicado a una función de los mismos argumentos que toma el valor 0 cuando el predicado se verifica, y el valor 1 cuando no se verifica, y que no puede tomar otros valores. Se dirá, pues, que la función F es la función representativa del predicado P si se da la equivalencia:

$$P\,X_1\,X_2 \ldots X_n \leftrightarrow F\,X_1\,X_2 \ldots X_n = 0.$$

Ejemplo: el predicado *divisible por 2* tiene por función representativa *resto de la división por 2.* En efecto: si un número es divisible por 2, el resto de su división es 0, y si no es divisible por 2, el resto de su división por 2 es 1. (Se trata ahora solamente de división entera.)

Se dice que un predicado es *recursivo* (primitivo o general) si posee una función representativa recursiva (primitiva o general).

61. La noción de clase recursiva.

La noción de *clase recursiva* es muy parecida a la de *predicado recursivo.* En efecto, una clase puede definirse por un predicado: conjunto de individuos en los que se da un determinado predicado. Una clase recursiva es la que puede definirse por un predicado recursivo o, también, puede representarse por una función recursiva.

Una clase de enteros Cl se denomina *recursiva* (primitiva o general) si existe una función recursiva F (primitiva o general) de un argumento que, aplicado a un entero α, toma el valor 0 ó 1 según que este entero pertenezca o no a esta clase.

Por consiguiente, tendremos:

$F\,\alpha = 0$ si —y solamente si— α pertenece a Cl.

La función F se denomina *función representativa* de la clase Cl. La función representativa de una clase recursiva puede depender de varias variables, pero en tal caso todas estas variables, salvo una, deben ir ligadas a cuantificadores [82].

Así, si F es una función de cuatro argumentos, se puede considerar la clase Cl de las X tales que:

$(Y_1)\,(EY_2)\,(EY_3)\,[F\,X\,Y_1\,Y_2\,Y_3 = 0]$.

(Cualquiera que sea Y_1, para un valor al menos de Y_2 y para un valor al menos de Y_3, $F\,X\,Y_1\,Y_2\,Y_3 = 0$.)

La clase Cl así definida está constituida por los enteros que satisfacen esta expresión.

Si F es la función representativa de un predicado P, esta clase Cl corresponde al predicado:

$\hat{X}\,[(Y_1)\,(EY_2)\,(EY_3)\,P\,X\,Y_1\,Y_2\,Y_3]$ [83].

Una clase cualquiera se denomina *recursiva* si es posible hacer corresponder biunívocamente a sus elementos enteros tales que éstos formen una clase recursiva.

Las mismas definiciones pueden formularse para conjuntos.

62. La enumerabilidad recursiva.

Se denomina *serie recursiva* (primitiva o general) de enteros a los valores sucesivos de una función recursiva (primitiva o general) de un argumento (es decir, los valores sucesivos que adopta esta función para la serie de los argumentos 0, 1, 2...).

Enumerar recursivamente un conjunto de elementos (de forma primitiva o general) es hacer corresponder a estos elementos de manera biunívoca enteros que constituyan una serie recursiva (primitiva o general).

Se dice que una serie de enteros es *recursivamente enumerable* (de manera primitiva o general) si existe una función recursiva de enteros (primitiva o general) de un argumento que la enumere, es decir, si los miembros de esta clase forman una serie recursiva de enteros.

Una clase cualquiera se dice que es *recursivamente enumerable* (de manera primitiva o general) si se la puede enumerar recursivamente (de manera primitiva o general).

La enumeración de una clase puede hacerse con o sin repeticiones. La *enumerabilidad recursiva general sin repeticiones* es una noción más general que la *enumerabilidad recursiva primitiva sin repeticiones*. Pero si se permiten las repeticiones ya no ocurre lo mismo. En efecto, Rosser ha demostrado que si una clase puede ser numerada (permitiendo las repeticiones) por una función recursiva general, puede

[82] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.22.1.5.
[83] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.22.1.6.

serlo también por una función recursiva primitiva (permitiendo las repticiones) [84] En lo que sigue, cuando no especifiquemos expresamente lo contrario, entenderemos siempre la enumerabilidad recursiva que permite las repeticiones (y, por consiguiente, siendo lo mismo primitiva que general).

Cuando se considera únicamente la enumerabilidad recursiva general, no es necesario tener en cuenta eventuales repeticiones. KLEENE ha establecido la siguiente propiedad: si una clase infinita es enumerable recursivamente (en el sentido de la recursividad general) con repeticiones, es enumerable recursivamente sin repeticiones [85].

La relación entre recursividad general y la enumerabilidad recursiva ha sido precisada en otro teorema de KLEENE: la condición necesaria y suficiente para que una clase infinita sea enumerable recursivamente sin repeticiones según el orden de magnitud, es que sea recursiva (en el sentido de la recursividad general) [86].

Por tanto, se tiene la equivalencia entre las nociones de *recursividad* (general) y *enumerabilidad recursiva* (general) *sin repeticiones* siguiendo el orden de magnitud.

Así, una clase recursiva general es siempre recursivamente enumerable. Pero el inverso no es cierto: una clase recursivamente enumerable cualquiera no es recursiva. KLEENE ha dado un ejemplo explícito de una clase no-recursiva que es recursivamente enumerable [87].

POST ha demostrado que la condición necesaria y suficiente para que una clase recursivamente enumerable de enteros sea recursiva es que su complemento en relación al conjunto de los números enteros sea recursivamente enumerable [88].

Todas estas nociones pueden expresarse en términos de conjuntos como en términos de clases.

63. EL OPERADOR MIN Y SU UTILIZACIÓN.

KLEENE ha obtenido otra definición de la recursividad general utilizando el *operador Min,* que corresponde a la noción intuitiva del *número menor que disfruta de una propiedad.*

Si un predicado P de $(n + 1)$ argumentos es tal que, para todo el sistema $X_1, X_2, \ldots, X_n$, existe al menos un Y tal que $P X_1 X_2 \ldots X_n Y$ se verifique, la expresión $Min\ Y\ [P X_1 X_2 \ldots X_n Y]$ designa el menor Y para el cual se tiene $P X_1 X_2 \ldots X_n Y$. Este operador puede servir de base a un esquema de definición de una función F.

Tal esquema se escribirá:

(1) $F X_1 X_2 \ldots X_n = Min\ Y\ [P X_1 X_2 \ldots X_n Y]$.

---

[84] ROSSER 3, pág. 88, Corolario 1 del Lema 1.
[85] KLEENE 5, pág. 738, Teorema VIII.
[86] KLEENE 5, pág. 737, Teorema VII.
[87] KLEENE 5, pág. 741, Teorema XV. V. § 155.
[88] POST 4, § 1, Teorema 1.

Consideremos, por ejemplo, el predicado de tres argumentos *divisible por* β_1 *y por* β_2.

Este predicado puede definirse de la manera siguiente:

α es divisible por β_1 y por β_2
si existe un γ_1 tal que $\alpha = \beta_1 \times \gamma_1$
y un γ_2 tal que $\alpha = \beta_2 \times \gamma_2$,

es posible demostrar que este predicado es recursivo.

Entonces podemos definir la función de dos argumentos *mínimo común múltiplo de* β_1 *y de* β_2 de la manera siguiente:

El mínimo común múltiplo de β_1 y de β_2 es el menor α tal que α sea divisible por β_1 y por β_2.

Escribiendo esto en forma de esquema, mediante variables, tendremos:

Mínimo común múltiplo $X_1 X_2 = Min\ Y$ [Y *divisible por* X_1 *y por* X_2].

KLEENE ha demostrado que toda función recursiva general F de n argumentos puede expresarse en la forma:

$G\ (Min\ Y\ [P X_1 X_2 \ldots X_n Y])$,

donde G es una función recursiva primitiva (de un argumento) y P un predicado recursivo primitivo (de $(n + 1)$ argumentos) tal que $(X_1)\,(X_2) \ldots (X_n)\,(EY)\,\mathrm{P}\,X_1 X_2 \ldots X_n Y$ [89].

También ha demostrado que toda función F definida mediante un esquema del tipo 1(63) es recursiva en general [90].

De aquí se sigue que el dominio de las funciones definibles mediante el operador *Min* corresponde exactamente al de las funciones recursivas generales.

64. LAS FUNCIONES PARCIALMENTE RECURSIVAS.

La noción de función recursiva general es susceptible de ampliación. En efecto, no es necesario que el sistema de ecuaciones que define la función permita obtener un valor determinado para todos los sistemas de valores de los argumentos.

Así, la función *cociente exacto de* α *por* β no está definida para todo par de enteros: sólo tiene un valor cuando α es divisible por β.

Se dirá que una función F de n argumentos es *parcialmente recursiva* si existe un sistema de ecuaciones tal que, por medio de los operadores On_1 y On_2, se puede obtener una ecuación de la forma $F\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta$, para una constante β a lo más [91].

Es posible, pues, que existan series de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ para las cuales no exista ninguna constante que satisfaga una ecuación de esta forma.

Como en el caso de la recursividad general, esta noción permite introducir la de *predicado parcialmente recursivo* y la de *clase parcialmente recursiva.*

---

[89] KLEENE 5, pág. 736, Teorema IV.
[90] KLEENE 5, pág. 737, Teorema V.
[91] KLEENE 8, págs. 151-152. Véase también KLEENE 10, § 6, págs. 50-51.

Igualmente, se puede definir una función parcialmente recursiva por medio de un esquema del tipo 1(63) suprimiendo la condición restrictiva del predicado *P*. Se admite, pues, que puedan existir sistemas $X_1 X_2, \ldots, X_n$ para los cuales no se pueda encontrar un Y tal que $P X_1 X_2 \ldots X_n Y$.

Para estos sistemas, la función F no queda definida.

65. La utilización metateórica de las funciones recursivas.

La utilización de las funciones recursivas constituye una técnica mediante la cual es posible expresar en forma aritmética determinados conceptos y razonamientos metateóricos. Como ya se ha visto (§ 17), las reglas de un sistema formal son enunciados bajo forma recurrente, y las propiedades metateóricas deben establecerse por aproximaciones sucesivas, partiendo de casos elementales para finalizar en casos generales, ya se trate de propiedades de determinadas categorías de expresiones o de propiedades de ciertos tipos de demostraciones (razonamientos por *inducción estructural*) [92].

Es, pues, muy conveniente servirse, cuando se pretende expresar las propiedades metateóricas, de funciones y predicados recursivos. Esto exige que se pueda establecer una correspondencia entre los elementos del sistema formal que se estudia y los números enteros. El método de la aritmetización permite, precisamente, llevar a cabo tal correspondencia.

Diremos que una operación aplicable a una cierta categoría de objetos es *representable recursivamente* si hay medio de establecer una correspondencia biunívoca entre estos objetos y una determinada clase de números enteros (a veces la serie completa de los enteros) y encontrar una función recursiva F tal que, cuando se aplica esta función y esta operación a los elementos correspondientes, se encuentran los elementos correspondientes.

Diremos, pues, que la función F es una *representación recursiva* de esta operación (o que la representa recursivamente).

Una propiedad aplicable a una determinada categoría de objetos es *representable recursivamente* si hay medio de establecer una correspondencia biunívoca entre estos objetos y una cierta clase de números enteros (a veces la serie completa) y encontrar un predicado recursivo P tal que, cuando esta propiedad se da en determinados objetos, el predicado P se da en los enteros correspondientes. Diremos entonces que el predicado P es una *representación recursiva* de esta propiedad (o que la *representa recursivamente*).

[92] Véase § 32.

Capítulo III

El Teorema de Gödel

Sección 1.—PRIMERA IDEA DEL TEOREMA.

66. Alcance general del Teorema de Gödel.

El teorema de Gödel [1] establece la existencia, para una clase de formalismos que responda a condiciones muy generales, de *proposiciones indecidibles* [2]. Estas condiciones generales se reducen esencialmente a las dos siguientes: el formalismo debe ser no-contradictorio, y debe ser lo suficientemente amplio para que la Aritmética recursiva sea formalizable en él [3].

Gödel no se limita a indicar la posibilidad de proposiciones indecidibles, sino que construye efectivamente una proposición cuyo carácter indecidible establece. Esta proposición es del mismo tipo que la antinomia del embustero, pero su construcción utiliza el concepto de derivación, en lugar del de certeza. Se trata de una proposición que afirma su propia inderivabilidad.

Sea *LF* un formalismo que satisfaga las condiciones mencionadas.

Lo esencial de la demostración consiste en establecer que la proposición indecidible, que afirma su propia inderivabilidad, pertenece al sistema *LF*.

Consideremos en *LF* las proposiciones de una variable individual.

Dispongamos de un medio para ordenarlas, es decir, para ponerlas en correspondencia biunívoca con la serie de números enteros. Por consiguiente, se puede designar cada una de estas proposiciones —en el plano de la metateoría— por un cierto número entero.

Construyamos después el enunciado metateórico siguiente: *la proposición correspondiente al número* n *no es derivable en* LF. (En este enunciado, *n* designa un número cualquiera.)

---

[1] Gödel 3 y 14.
[2] Ver § 17.
[3] Ver § 41.

Se puede representar este enunciado en el sistema *LF* mediante una proposición $\mathfrak{C}$ de una variable. Si, en esta proposición, se reemplaza la variable por el símbolo de *LF* correspondiente a un determinado número *k*, se obtendrá una proposición cuyo sentido es el siguiente: *La proposición coordinada al número k no es derivable en LF.* Pero se puede demostrar que existe un número *a* tal que, cuando se reemplaza, en la proposición $\mathfrak{C}$, la variable por el símbolo de *LF* correspondiente a este número *a*, esta proposición posee el sentido siguiente: *la proposición coordinada al número a no es derivable en LF.* Como ésta es, precisamente, coordinada al número *a*, afirma su propia *inderivabilidad.*

67. La demostración de Finsler.

Gödel no ha sido el primero en demostrar la existencia de proposiciones indecidibles. Finsler le había precedido en esta empresa, utilizando una forma de paradoja de Richard [4]; pero, en lugar de utilizar, como Richard, la noción de *definición*, utilizó, como después lo haría Gödel, la noción de *derivación* [5].

Llamemos *serie dual* a una serie formada por cifras 0 y 1 en número infinito, admitiendo las repeticiones.

Consideremos un conjunto infinito *En* de series duales, numeradas mediante los enteros.

Llamemos *serie antidiagonal* a la sucesión formada de la manera siguiente: el *n*-ésimo término de esta serie es ocupado por 0 o por 1, según que el *n*-ésimo término de la *n*-ésima serie del conjunto *En* esté ocupado por 1 o por 0. Esta serie es, pues, diferente de cualquiera de las demás series del conjunto.

Sea entonces un sistema formal *LF.* En este sistema, una derivación está constituida por una cierta sucesión finita de signos del sistema.

Supongamos que este sistema sea lo suficientemente completo para permitir el estudio de las propiedades de nuestras series duales.

Consideremos el conjunto de las derivaciones de *LF* que establecen que, en una determinada serie dual, no hay infinitas cifras 0. Cada una de estas derivaciones determina una cierta serie dual (aquella para la cual establece la propiedad en cuestión). Es posible ordenar estas derivaciones y las correspondientes series duales. Es posible también formar la serie antidiagonal del conjunto *En* así obtenido. Sea *Sy* esta serie.

Formemos entonces, en *LF*, la proposición que corresponde al enunciado siguiente: *en la serie antidiagonal Sy, la cifra* 0 *no interviene un número infinito de veces.*

Esta proposición no es decidible. Como la serie *Sy* no pertenece al conjunto de series *En*, no existe ninguna derivación que establezca que la cifra 0 no interviene

[4] Finsler 1. Ver a este propósito Locher 1.

[5] Finsler utiliza la expresión *Formal Beweis.*

un número infinito de veces en *Sy*. (Todas las derivaciones de este género quedan agotadas, en virtud de la hipótesis, por las series del conjunto *En*.)

La demostración de FINSLER debe considerarse insuficiente, pues no está formalizada y no distingue el sistema *LF* y el metasistema en el que se estudian las propiedades del *LF*. Por tanto, está sujeta a las mismas críticas que las antinomias en su forma inmediata.

La verdadera dificultad consiste en demostrar que la proposición indecidible que se construye pertenece efectivamente al sistema considerado. En este punto centraría, precisamente, GÖDEL su demostración. La herramienta principal es la aritmetización.

68. LA ARITMETIZACIÓN.

Consideremos un formalismo *LF*: un cierto sistema de signos, con sus reglas de formación y de derivación.

Si queremos estudiar las propiedades de *LF*, debemos recurrir a una metalengua [6]. Esta metalengua debe incluir expresiones que designen los signos de *LF* y las combinaciones de signos *LF* que estén dotados de sentido, así como los predicados que corresponden a los diversos tipos de series de signos *LF* (*componentes primitivas, proposiciones elementales, proposiciones, derivaciones*), y relaciones que expresen las propiedades de *LF*.

Para construir esta metalengua podemos servirnos simplemente de la lengua española, añadiéndole un cierto número de símbolos (por ejemplo, los símbolos de *LF* entre comillas). Pero también podemos proponernos formalizarla, lo que se hace indispensable si queremos introducir relaciones de una cierta complejidad y, al mismo tiempo, pretendemos analizar estas relaciones de forma precisa.

Tratando, precisamente, de llegar a una formalización de este tipo, inventó GÖDEL su método de aritmetización [7].

GÖDEL ha utilizado este método en el caso de un formalismo particular, pero puede ser aplicado a cualquier tipo de formalismo.

Un sistema formal *LF* se compone de un número finito de signos, y todas sus expresiones están constituidas de series finitas de estos signos.

Para *aritmetizar* un sistema formal, se hace corresponder a cada uno de sus signos (componentes primitivas) un número entero determinado. Después se adopta un procedimiento que haga corresponder un número entero perfectamente determinado a toda serie de signos o expresiones de *LF*.

Sea *Sy* una expresión de *LF* constituida por una sucesión de signos k, y sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ los números enteros que se hace corresponder a estos signos.

[6] Véase § 30.
[7] Véase § 54.

El número correspondiente a *Sy* será:

$$2^{n1} \times 3^{n2} \times \ldots \times p_k^{nk},$$

donde p_k representa el k-ésimo primer número diferente de 1.

Sea igualmente *Sp* una serie de k expresiones de *LF* (por ejemplo, una derivación) y sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ los números correspondientes a estas expresiones.

El número correspondiente a *Sp* será:

$$2^{n1} \times 3^{n2} \times \ldots \times p_k^{nk}.$$

En virtud del teorema sobre la unicidad de la descomposición de un número en sus factores primos, la correspondencia así establecida es perfectamente biunívoca: a todo elemento de *LF* (signo, expresión o serie de expresiones) corresponde un número entero, y sólo uno, y a un número entero corresponde un elemento de *LF* cuando más.

Llamaremos a tal correspondencia *correspondencia de Gödel,* y al número entero correspondiente a un elemento *Ec* de *LF* por una *correspondencia de Gödel, número de Gödel* o *número-G* de *Ec.*

La operación que consiste en pasar de un elemento *Ec* (perteneciente a un sistema formal *LF*) a su número de GÖDEL puede considerarse como una función metateórica. La operación que consiste en pasar del número de Gödel de un elemento a este elemento mismo puede considerarse como la función inversa de la anterior.

Denominaremos a estas dos funciones *funciones de Gödel* y las representaremos por las siguientes notaciones abreviadas:

función *directa*: $Ngd\ (Ec)$: número-G del elemento *Ec*;
función *inversa*: $Ngd^{-1}\ (a)$: elemento de *LF* cuyo número-G es a [8].

69. ARITMETIZACIÓN Y METATEORÍA.

Establecida de esta forma una *correspondencia de Gödel,* las propiedades de los elementos de *LF* pueden expresarse en forma de propiedades de los enteros y las relaciones que pueden existir entre los elementos de *LF* en forma de relaciones aritméticas.

En la medida en que se procede en forma estrictamente constructiva [9], los predicados aritméticos que expresan estas propiedades y estas relaciones son recursivos. El punto de vista estrictamente constructivo exige, en efecto, que los conceptos metateóricos utilizados puedan verificarse en un número finito de etapas. En otros términos, obliga a recurrir a operaciones y propiedades que sean *representables recursivamente* [10].

---

[8] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.25.4.2.

[9] En el capítulo V tendremos que considerar la ampliación del punto de vista estrictamente constructivo, tal como lo consideramos aquí.

[10] Véase § 65.

Se tiene entonces la siguiente correspondencia: un predicado metateórico P^* es satisfecho por los elementos $Ec_1, Ec_2, \ldots, Ec_n$ si el predicado recursivo que lo representa es satisfecho por los números enteros correspondientes a estos elementos, y recíprocamente.

Mediante tal sistema de correspondencia, la metateoría del sistema *LF* se encuentra expresada en *Aritmética recursiva* [11]. (Se puede decir, en general, recíprocamente, que si es posible expresar la metateoría de un sistema por medio de la Aritmética recursiva, tal metateoría es estrictamente constructiva.)

La Aritmética recursiva puede también ser formalizada. En particular, si el sistema *LF* es suficientemente capaz, puede ser formalizada en este sistema. Entonces se obtiene una formalización de la metateoría de *LF* en *LF*.

Si no nos limitamos al punto de vista estrictamente constructivo, se puede recurrir a procedimientos de demostración que rebasan el marco de la Aritmética recursiva. Si el sistema *LF* es suficientemente capaz, también será posible, incluso en este caso, formalizar la metateoría de *LF* en *LF*. (Naturalmente, esto dejará de ser posible si el sistema *LF* no permite formalizar una teoría más vasta que la Aritmética recursiva.)

Para comprender cumplidamente el alcance del procedimiento de aritmetización, es necesario considerar simultáneamente dos distinciones: por una parte, entre *sistema formal* y *metateoría*, y, por otra parte, entre *sistema formal* y *teoría intuitiva*.

La metateoría de un sistema formal que vamos a estudiar, está formulada por una *lengua básica LB*, que comporta: el español, los símbolos de la Aritmética ordinaria, símbolos para designar las operaciones lógicas elementales, símbolos sintácticos de la Aritmética ordinaria, símbolos para designar ciertos objetos y propiedades metateóricas y símbolos sintácticos de nuestro sistema formal [12].

Respecto de este sistema, la Aritmética recursiva debe ser considerada como una teoría intuitiva que forma parte de la Aritmética ordinaria y, por consiguiente, está incluida en la lengua básica.

Por otra parte, el sistema formal utilizado por GÖDEL incluye una formalización de la Aritmética recursiva.

La demostración de GÖDEL presenta, en resumen, el siguiente ciclo:

a) Se considera un sistema formal que contiene una formalización de la Aritmética recursiva.

b) Gracias a la aritmetización, la metateoría de este sistema puede ser expresada mediante la Aritmética recursiva [13].

---

[11] Véase § 58.

[12] Véase INDICE DE NOTACIONES, 1.1, 1.2, 1.3 y 2.2.

[13] Si se quisiese detallar completamente el proceso de aritmetización, se podría decir: las propiedades metateóricas, que son formuladas primeramente en español, se expresan después en forma aritmética.

Pero como la aritmética forma parte de la lengua básica se puede considerar que las propiedades metateóricas son formuladas de una vez en forma aritmética. Hablando con propiedad, no existe *traducción* del español a la aritmética (como si se considerase el español y la

c) Esta metateoría se encuentra, así, formalizada dentro del mismo sistema.

También se podría expresar esto mismo diciendo que, sobre la base de la aritmetización, GÖDEL interpreta una parte de su sistema dentro de su metateoría [14].

70. NOTACIONES UTILIZADAS POR LA ARITMÉTICA RECURSIVA.

Para formular la Aritmética recursiva utilizaremos los siguientes elementos:

1) Una sucesión infinita de *constantes individuales*: los *números enteros*: 1, 2, 3, ...;

2) Una sucesión infinita de *variables individuales*: X, Y, Z, y estas mismas letras afectadas de índices;

3) Unas *funciones elementales*:

adición: $+$,
multiplicación: $\times$,
exponenciación: *Exp.*,
función Min [15],

y las tres funciones básicas utilizadas por GÖDEL para definir la noción de *función recursiva primitiva* [16];

4) Unos *predicados elementales*:

igual: $=$,
mayor que: $>$,
menor que: $<$,
mayor o igual: $\geqq$;

5) Las *operaciones lógicas elementales*:

negación: $\sim$,
conjunción: $\&$,
disyunción: $\vee$,
implicación: $\rightarrow$,
equivalencia: $\leftrightarrow$,
universalización: (X),
particularización: (EX).

Nosotros utilizaremos los símbolos *a, b, c, ...* y estos mismos símbolos afectados de índices para designar números enteros perfectamente determinados que, por una razón o por otra, nos abstengamos en expresar de forma numérica.

---

aritmética como dos lenguas diferentes), sino expresión aritmética acertada de las propiedades estudiadas.

[14] Una parte solamente, pues *todas* las proposiciones derivables del sistema no están asociadas a enunciados metateóricos ciertos.

[15] Véase § 63.

[16] Véase § 57.

Finalmente, utilizaremos unas *variables sintácticas* para las constantes individuales, las funciones y los predicados, y *constantes sintácticas* para designar enunciados perfectamente determinados [17].

Sólo consideraremos como *enunciados aritméticos* propiamente dichos las expresiones formadas por medio de símbolos enumeradas arriba, en que no figuran variables libres. (Una expresión en que figuran variables libres debe ser considerada como una forma que puede convertirse en un enunciado si se reemplazan estas variables por números enteros).

71. Un criterio de verdad para los enunciados aritméticos.

En todos los razonamientos que van a seguir se supone que existe un procedimiento que permite decidir, para todo enunciado perteneciente a la aritmética recursiva, si es *verdadero* o *falso*.

Como en el caso de la aritmética ordinaria no se dispone de criterios formales, este procedimiento debe hacerse corresponder al sentido intuitivo de las operaciones y predicados utilizados. Se le puede extender al caso de los enunciados que llevan cuantificadores.

Brevemente, se le puede describir como sigue:

1. Los símbolos 1, 2, 3, ... pueden considerarse como notaciones abreviadas para sucesiones formadas por 1, 2, 3, ... trazos verticales.

Si α y β designan números enteros diferentes de 0, el enunciado $\alpha = \beta$ es *verdadero* si α y β designan el mismo número entero, es decir, si se tiene el mismo número de trazos verticales a un lado y otro del signo $=$.

Es *falso* en el caso contrario.

Si α designa un cierto número entero diferente de 0, el enunciado $0 = \alpha$ es *falso*. El enunciado $0 = 0$ es *verdadero*.

2. Si α y β designan números enteros diferentes de 0, el enunciado $\alpha > \beta$ es *verdadero* si α representa un número de trazos verticales más elevado que β.

Es *falso* en el caso contrario.

Si α designa un número entero diferente de 0, el enunciado $\alpha > 0$, es *verdadero*, y los enunciados $0 > \alpha$ y $0 > 0$ son *falsos*.

3. Para el predicado $<$ se dan condiciones simétricas.

4. Un enunciado $\alpha \geqq \beta$ es *verdadero* si $\alpha > \beta$ es *verdadero* o si $\alpha = \beta$ es *verdadero*. Es *falso* si $\alpha > \beta$ y $\alpha = \beta$ son ambos *falsos*.

5. Reintroduzcamos la noción de *término aritmético* definida en el § 59 y consideremos únicamente términos aritméticos en que no figuren variables.

Calculando los valores de las funciones que figuran en un término de este tipo se puede transformar este término, de aproximación en aproximación, en un número

[17] Para todo lo que se refiere a las notaciones, véase el INDICE DE NOTACIONES, 1.31, 1.32, 1.33 y 2.21, 2.22, 2.23.

entero. (Para funciones recursivas basta con utilizar los esquemas de sustitución y de recursión primitiva; para las funciones básicas y para la función *Min,* la definición intuitiva).

Se puede, por tanto, reducir a uno de los casos precedentes todo enunciado $\delta_1 = \delta_2$ en que $\delta_1 > \delta_2$, o $\delta_1 < \delta_2$, o $\delta_1 \not\equiv \delta_2$ (en donde δ_1 y δ_2 son términos aritméticos).

6. Si el enunciado A es *verdadero,* el enunciado $\sim$ A es *falso,* y si el enunciado A es *falso,* el enunciado $\sim$ A es *verdadero.*

7. Si los enunciados *A* y *B* son ambos *verdaderos,* el enunciado *A* & *B* es *verdadero.* Es *falso* si uno (al menos) de los dos enunciados *A* o *B* es *falso.*

8. Si uno de los enunciados *A* o *B* es *verdadero, A* $\vee$ *B* es *verdadero.* Es *falso* si *A* y *B* son ambos *falsos.*

9. El enunciado *A* $\rightarrow$ *B* es *verdadero* salvo si *A* es *verdadero* y *B falso.*

10. El enunciado *A* $\leftrightarrow$ *B* es *verdadero* si *A* y *B* son *verdaderos* o *falsos* simultáneamente. En caso contrario es *falso.*

11. El enunciado (*X*) *A* (*X*) es *verdadero* si el enunciado *A* (α), obtenido reemplazando la variable *X,* en todos los lugares donde figure, por el número entero α, es *verdadero,* cualquiera que sea el número entero.

Es *falso* si hay un entero α tal que *A* (α) sea *falso.*

12. El enunciado (*EX*) *A* (*X*) es *verdadero* si existe un entero α para el cual *A* (α) es *verdadero.* Es *falso* si no es posible encontrar un entero α que posea esta propiedad.

72. Mecanismo general de la demostración de Gödel.

Antes de introducirnos en la exposición detallada del teorema de Gödel, daremos una ojeada al mecanismo general de su demostración en una presentación no formalizada. Esta presentación sigue muy de cerca la que dio el mismo Gödel en la Introducción de su Memoria [18].

1. El formalismo considerado por Gödel es aproximadamente el mismo de los *Principia Mathematica* de Russell y Withehead. Denominémosle sistema *LFG.*

Es posible representar en este sistema todos los conceptos y relaciones de la Teoría de Números. Por otra parte, supondremos que es *coherente* (en sentido sintáctico).

2. Comencemos por realizar una aritmetización de *LFG.* Sea *Pr* una proposición de *LFG.*

El enunciado metateórico *Pr es derivable en LFG* puede expresarse bajo la forma de un enunciado aritmético que puede ser, a su vez, representado por una proposición de *LFG.*

[18] Gödel 3, págs. 174-176.

3. Consideremos, en *LFG*, todas las proposiciones que contienen una variable individual susceptible de ser reemplazada por una *cifra.* (Las *cifras* son las constantes individuales de *LFG*; representan los números enteros).

El conjunto de estas proposiciones es, a lo sumo, numerable, pues está constituido por combinaciones finitas de signos que pertenecen a una sucesión numerable (las variables individuales forman una sucesión numerable).

Ordenemos este conjunto mediante una relación ordenadora R^* y designemos su n-ésima proposición por $R^*(n)$.

Esta relación R^* es representable en *LFG* por medio de una expresión $\mathfrak{R}$ (que juega el papel de un predicado).

4. Sea $A(\Theta)$ una de las proposiciones de nuestro conjunto.

Designemos por $[A(\Theta); n]$ la proposición B que se obtiene reemplazando la variable individual de A por el símbolo que representa el entero n [19].

El enunciado metateórico $B \leftrightarrow [A(\Theta); n]$ es representable en *LFG* [20].

5. Designemos por *Dem n* el enunciado metateórico: *la proposición cuyo número de* GÖDEL *es n es derivable en LFG.*

Consideremos ahora la clase *Cl* de números enteros definida por la equivalencia siguiente:

$$(n \in Cl) \leftrightarrow \sim Dem\,[\mathfrak{R}(\mathfrak{X}); n].$$

(*El número n, que forma parte de la clase Cl,* equivale *a la proposición obtenida reemplazando la variable* $\mathfrak{X}$ *de* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *por el símbolo que representa en número n; no es derivable en LFG.*)

Se puede demostrar que la propiedad de pertenecer a esta clase *Cl* es representable en *LFG* por una expresión $\mathfrak{C}$ (que desempeña el papel de un predicado) por medio de la cual se puede construir una proposición $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$ de una variable individual, que significa: $\mathfrak{X}$ *pertenece a la clase Cl.*

Esta proposición $\mathfrak{C}(\mathfrak{X})$ pertenece al conjunto de las proposiciones de una variable individual y ocupa un rango determinado en este conjunto: sea r este rango. La proposición se designa entonces $R^*(r)$ y se tiene:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{X}) \leftrightarrow R^*(r)\ [21].$$

6. Formemos ahora la proposición $[\mathfrak{R}(\mathfrak{X}); r]$, es decir, la proposición obtenida reemplazando la variable $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ por el símbolo de *LFG* que representa el número entero r.

Esta proposición pertenece a *LFG.* Pero su sentido es el mismo que el de la $[\mathfrak{C}(\mathfrak{R}); r]$, que significa:

El número entero r pertenece a la clase Cl, es decir, la proposición obtenida reemplazando la variable $\mathfrak{X}$ *de* $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ *por el símbolo que representa r, no es derivable en LFG, o también:*

---

[19] La expresión $[A(\Theta); n]$ es una descripción sintáctica de la proposición B.

[20] En este enunciado, el símbolo B es un símbolo sintáctico que designa una proposición (cualquiera) del tipo descrito más arriba.

[21] Esta equivalencia constituye un enunciado metateórico y no pertenece a *LFG.*

La proposición [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] *no es derivable en LFG.*

La proposición [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] afirma, pues, su propia *inderivabilidad.* Se puede demostrar que no es *decidible.*

7. Supongamos, en efecto, que [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] sea derivable.

En tal caso se puede deducir, en *LFG,* [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] que significa *r pertenece a Cl,* o también, en virtud de la definición de Cl,

$\sim$ *Dem* [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*], es decir,

la proposición [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] *no es derivable en LFG,* lo que contradice la hipótesis.

8. Supongamos, por otra parte, que [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] sea *refutable,* es decir, que $\sim$ [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] sea derivable.

En tal caso se puede deducir en *LFG,* $\sim$ [$\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{X}$); *r*], que significa *r no pertenece a Cl.*

O también, en virtud de la definición de *Cl,*

$\sim \sim$ *Dem* [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*],

proposición que equivale a *Dem* [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*].

Esta última proposición afirma que [$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{X}$); *r*] es derivable en *LFG.* Si *LFG* es coherente, esto contradice la hipótesis, ya que no es posible derivar a la vez en *LFG* una proposición y su negación.

Así *LFG* contiene al menos una *proposición indecidible.*

73. Condiciones de la demostración.

La demostración no es válida a no ser que se consiga establecer que la proposición indecidible pertenezca efectivamente al sistema *LFG.*

Por consiguiente, la construcción de esta proposición comporta tres operaciones esenciales:

a) Establecimiento de una correspondencia biunívoca entre la sucesión de números enteros y el conjunto de las proposiciones de una variable de *LFG* (§ 72,3).

b) Sustitución, por la variable Θ, del símbolo que representa el número entero *n* (§ 72, 4).

c) Construcción del enunciado metateórico *La proposición correspondiente al número n no es derivable en LFG* (§ 72, 5).

Hay, por tanto, que demostrar que se puede representar en *LFG*:

a) La relación ordenadora.

b) La sustitución de un símbolo que representa un número entero por una variable.

c) El predicado no derivable en *LFG.*

Dicho de otra manera, hay que establecer:

a) Que *R** puede representarse en *LFG.*

b) Que el enunciado $B \leftrightarrow [A\ (\Theta);\ n]$ puede representarse en *LFG*.

c) Que la propiedad de pertenecer a la *clase Cl de las proposiciones no derivables en LFG* puede ser representada en *LFG*.

GÖDEL ha demostrado en detalle cómo se producen las representaciones buscadas. Como *LFG* contiene por hipótesis una formalización de esta teoría, si se demuestra que las operaciones *a*, *b* y *c* mencionadas pueden expresarse mediante predicados recursivos, quedan satisfechas todas las exigencias de la demostración dentro de las exigencias de una metateoría estrictamente constructiva.

Ahora estamos en situación de exponer detalladamente el Teorema y su demostración. Para ello será preciso:

1) Dar la descripción del formalismo estudiado por GÖDEL e indicar la hipótesis que establece sobre este formalismo.

2) Indicar cómo se hace la aritmetización.

3) Desarrollar la demostración propiamente dicha.

SECCIÓN 2.—EL FORMALISMO LFG [22].

74. LAS CONSTANTES DEL SISTEMA.

GÖDEL considera un formalismo *LFG* obtenido añadiendo los axiomas de PEANO (que caracterizan los números enteros) al sistema de los *Principia Mathematica*. Esto viene a reducirse a considerar a los números enteros como *constantes individuales* del sistema, añadiendo a éstos la *constante funcional* (que corresponde a la función *sucesor*) [23].

---

[22] Utilizaremos una terminología algo diferente a la de GÖDEL (a fin de uniformizar el vocabulario en los diferentes capítulos) y símbolos diferentes de los suyos (con el fin de hacer lo más clara posible la distinción entre el sistema, la sintaxis del sistema y la aritmética recursiva).

[23] Denominaremos *constantes individuales* a las que pueden desempeñar el papel de individuos; *constantes funcionales*, a las que pueden jugar el papel de funciones, y *constantes predicativas*, a las que pueden desempeñar el papel de predicados.

Denominaremos *variables individuales*, *variables predicativas* y *variables funcionales* a las que pueden ser reemplazadas respectivamente por *constantes individuales*, *constantes predicativas* y *constantes funcionales*.

Las *constantes predicativas* (y, por consiguiente, también las *variables predicativas*) pueden ser de niveles diferentes, según que desempeñen el papel de predicados de individuos, de predicados de predicados, y así sucesivamente.

Igualmente se pueden distinguir *constantes funcionales* (y, por tanto, *variables funcionales*) de niveles diferentes según la naturaleza de sus argumentos.

Para evitar toda ambigüedad conviene distinguir claramente los números enteros de los elementos de *LFG* que les corresponden. Los números enteros son elementos de la Aritmética intuitiva. En *LFG* se representan por expresiones del tipo:

$$\sigma\,(\,\sigma\,(\ldots(\sigma\ N_0\ldots)\,)\,),\ \text{llamadas } \textit{cifras.}$$

Para simplificar las notaciones introduciremos los símbolos N_0, N_1, N_2 ... para designar expresiones correspondientes, respectivamente, a los enteros 0, 1, 2, etc.

N_0 es una constante individual no definida.

Las constantes individuales N_1, N_2, ..., se introducen por vía de definición:

$$N_1 \equiv \sigma\ N_0,$$
$$N_2 \equiv \sigma\ \ (\sigma\ N_0),$$

etcétera. [24].

75. Las variables del sistema.

El sistema *LFG* comporta la *teoría de tipos.*

Las variables de *LFG* no se limitan a dos categorías solamente (*variables individuales* y *variables predicativas de orden* 1) como en la *lógica de predicados de primer orden,* sino que se distribuyen en una serie infinita (numerable) de *tipos.*

Las *variables del primer tipo* son las *variables individuales*; representan individuos cualesquiera y se las puede sustituir por *constantes individuales,* o sea, por *cifras.*

Las variables del *segundo tipo* son *variables predicativas* de un argumento: representan clases de individuos, y pueden, por consiguiente, representar *predicados* (de individuos) puesto que un predicado está determinado por el conjunto de los individuos en los cuales es verifica; pueden ser sustituidas por *constantes predicativas* (de individuos) de un argumento.

Las *variables del tercer tipo* son también *variables predicativas* de un argumento de un nivel más elevado: representan clases de clases de individuos, o también predicados de predicados.

Las *variables de cuarto tipo* son *variables predicativas* de un argumento que representan clases de clases de clases de individuos, o también predicados de predicados de predicados.

Y así sucesivamente.

Una variable de tipo $(n + 1)$ no puede tener argumentos de tipo superior a n.

No es necesario introducir *variables funcionales* ni *variables predicativas* de varios argumentos.

Una función de n argumentos hace, en efecto, corresponder a cada sistema de n objetos (tomados como argumentos) un cierto objeto (el valor que toma para estos

[24] El símbolo $\equiv$ es un símbolo sintáctico. Situado entre dos expresiones, significa: la expresión de la izquierda debe ser considerada como sinónimo de la de la derecha, es decir, que siempre puede sustituir a la de la derecha, sin ninguna restricción, en cualquier expresión de la que forme parte.

argumentos). Puede, por tanto, ser considerada como un predicado de $(n + 1)$ argumentos que se da cada vez que el $(n + 1)$-ésimo argumento es el valor asociado por la función a los n primeros.

Así, si F es una función de enteros de n argumentos, podemos hacerle corresponder un predicado P de $(n + 1)$ argumentos, tal que:

$P\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n\ \alpha_{n+1}$ se verifica si
$F\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n = \alpha_{n+1}$, y sólo en este caso.

Por otra parte, sea P un predicado de enteros de dos argumentos. Este predicado puede considerarse como la clase de todos los pares ordenados (α, β) tales que $P\ \alpha\ \beta$ se verifique. Un par ordenado (α, β) puede ser considerado como una clase Cl_1 formada a su vez por dos clases, Cl_2 y Cl_3: Cl_2 es la clase formada por el individuo α y Cl_3 es la formada por los individuos α y β. (No podemos considerar simplemente el par (α, β) como la clase formada por dos individuos α y β, pues esto no nos permitiría tener en cuenta el orden de los elementos de este par).

Así, el par (α, β) es una clase de clases de individuos y el predicado P puede ser considerado como una clase de clases de clases de individuos. Por consiguiente, un predicado de este género puede ser representado en *LFG* por una variable del cuarto tipo.

Sea P un predicado de enteros de n argumentos. Puede ser considerado como la clase de todos los sistemas ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n)$ tales que $P\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$ no se verifique.

En un sistema ordenado $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ puede ser considerado como un sistema ordenado $(Cl_1, Cl_2 \ldots Cl_{n-1})$, donde Cl_i es la clase correspondiente al par ordenado (α_i, α_{i+1}).

Procediendo de esta forma por aproximaciones sucesivas, se puede considerar finalmente el sistema ordenado $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ como una clase de clases ... de clases de individuos.

Estas ideas pueden generalizarse al caso de predicados de n argumentos, y así sucesivamente.

76. Morfología de LFG.

Primera parte: componentes primitivas [25].

1. *Variables.*

Variables del primer tipo : $\mathfrak{X}^1, \mathfrak{Y}^1, \mathfrak{Z}^1,$
o simplemente : $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z},$
y estos mismos símbolos afectados de índices [26].

[25] Para todo problema de notaciones, consúltese el INDICE DE NOTACIONES, 1.41, 1.42, 1.43 y 2.3. Aquí indicaremos solamente lo esencial.

[26] Para tener una notación perfectamente homogénea deberíamos utilizar únicamente los símbolos $\mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y}^1$, $\mathfrak{Z}^1$. Pero nos autorizamos a suprimir los índices superiores para evitar

Variables del segundo tipo: $\mathfrak{X}^2$, $\mathfrak{Y}^2$, $\mathfrak{Z}^2$,
y estos mismos símbolos afectados de índices.
.....

Variables del n-ésimo tipo : $\mathfrak{X}^n$, $\mathfrak{Y}^n$, $\mathfrak{Z}^n$,
y estos mismos símbolos afectados de índices.
.....

2. *Constantes.*

Constante individual : N_0 (corresponde a 0).
Constante funcional : σ (corresponde a la función *sucesor*).

3. *Signos de agrupación*: (,) (paréntesis).

4. *Operadores proposicionales.*
De un argumento : $\sim$ (*negación*)
$\mathfrak{X}^i$ (*cuantificador de universalización*).
Estos operadores se colocan delante de su argumento.
De dos argumentos : $\vee$ (*disyunción*).
Este operador se coloca entre sus argumentos.

77. Morfología de LFG.

Segunda parte: reglas de formación.

Estas reglas se formulan de forma que puedan suministrar la nomenclatura de las categorías de expresiones del sistema. Se formulan por medio de *variables sintácticas* [27].

1. *Cifras.*
   1.1. N_0 es una *cifra.*
   1.2. Si κ_i es una cifra, $\sigma\ \kappa_i$ es una *cifra.*

2. *Términos.*
   2.1. Una *cifra* es un *término.*
   2.2. Una *variable del primer tipo* es un *término.*
   2.3. Si τ es un *término*, $\sigma\ \tau$ es un *término.*

3. *Expresiones del n-ésimo tipo.*
   3.1. Un *término* es una *expresión del primer tipo.*
   3.2. Para $n > 1$, *una variable del n-ésimo tipo* es una *expresión del n-ésimo tipo.*
   (Esta denominación se introduce con el fin de uniformizar el vocabulario.)

---

complicaciones inútiles de índices y también para hacer resaltar la correspondencia entre las variables del primer tipo de *LFG* y las variables de la Aritmética, *X*, *Y*, *Z*.

[27] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.25.2.

4. *Proposiciones elementales.*

Toda expresión de la forma $\Lambda^{n+1}\ \Lambda^n$, donde Λ^{n+1} es una expresión del tipo $(n + 1)$ y Λ^n una expresión del tipo n es una *proposición elemental.*

5. *Proposiciones.*

5.1. Toda *proposición elemental* es una *proposición.*

5.2. Toda expresión de la forma $\sim A$, en donde A es una *proposición* (elemental o no) es una *proposición.*

5.3. Toda expresión de la forma $A \vee B$, donde A y B son *proposiciones* (elementales o no) es una *proposición.*

5.4. Toda expresión de la forma $(\Theta^n)\ A\ (\Theta^n)$, donde $A\ (\Theta^n)$ es una proposición que contiene la variable Θ^n y que no contiene un cuantificador de universalización en nombre de Θ^n, es una *proposición.*

6. *Proposiciones cerradas.*

Una proposición que no contiene variables libres es una *proposición cerrada.*

Se ve que una proposición cualquiera puede convertirse en una proposición cerrada cuando se ligan mediante cuantificadores todas las variables libres que contiene.

Una proposición no cerrada se denomina *abierta.*

La categoría de las *proposiciones* contiene, por tanto, a la vez, las *proposiciones abiertas* y las *proposiciones cerradas.*

Cada vez que sea necesario distinguir proposiciones abiertas y proposiciones cerradas lo indicaremos explícitamente. Para ello utilizaremos una notación especial para las proposiciones cerradas, haciendo acompañar a las letras de asteriscos [28].

78. Componentes introducidas por vía de definición.

Para simplificar la escritura se introducen nuevas *componentes,* denominadas *componentes primitivas.*

Componentes introducidas por vía de definición:

a) las *constantes individuales* $N_1, N_2, \ldots$, etc.;

b) la *constante predicativa* = (igualdad);
los *operadores proposicionales*
de un argumento : $(E\mathfrak{x}^i)$ *(cuantificador de particularización),*
de dos argumentos: $\&$ *(conjunción),*
$\rightarrow$ *(implicación),*
$\leftrightarrow$ *(equivalencia).*

Definiciones de estas componentes:

1. *Constantes individuales*: Ver § 74.

[28] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.25.2.7, 2.25.2.8, 2.31.2.1, y 2.31.2.2.

2. *Igualdad*:

$$(\Lambda_1^i = \Lambda_2^i) \equiv (\Theta^{i+1})\ (\Theta^{i+1}\Lambda_1^i \rightarrow \Theta^{i+1}\Lambda_2^i)$$

($i = 1, 2, \ldots$).

(Dos expresiones del i-ésimo tipo son iguales si toda propiedad que se verifica en la una se verifica también en la otra.) Hablando estrictamente, se tiene un predicado de igualdad para cada i, es decir, para cada tipo de expresión (términos, expresiones del 2.° tipo, etc...).

3. *Cuantificador de particularización*:

$$(\mathrm{E}\,\Theta^i)\ \mathrm{A}\,(\Theta^i) \equiv \sim (\Theta^i) \sim \mathrm{A}\ (\Theta^i).$$

4. *Conjunción*:

$$\mathrm{A}\ \&\ \mathrm{B} \equiv \sim (\sim \mathrm{A} \vee \sim \mathrm{B}).$$

5. *Implicación*:

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \equiv \sim \mathrm{A} \vee \mathrm{B}.$$

6. *Equivalencia*:

$$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B} \equiv (\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})\ \&\ (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}).$$

79. Axiomas de LFG.

Los axiomas están formulados en forma de *esquemas* que utilizan las constantes del sistema, los operadores proposicionales y *variables sintácticas.*

El uso de esquemas permite evitar las reglas de sustitución (como la regla 1 del § 4).

Para los esquemas que siguen utilizaremos las siguientes variables *sintácticas*:

τ_1, τ_2	,	por términos,
Λ^n	,	por expresiones del n-ésimo tipo,
Λ^i	,	por expresiones del i-ésimo tipo,
$\Lambda_1^{n+1}, \Lambda_2^{n+1}$	,	por expresiones del $(n + 1)$-ésimo tipo,
Θ	,	por variables del primer tipo,
Θ^i	,	por variables del i-ésimo tipo [29],
Θ^{i+1}	,	por variables del $(i + 1)$-ésimo tipo,
A, B, Γ	,	por proposiciones.

Los axiomas de *LFG* son todas las proposiciones que se pueden obtener a partir de los esquemas siguientes, reemplazando las variables sintácticas que en ellos figuran por las expresiones correspondientes de *LFG.* Estos esquemas se clasifican en cinco grupos.

[29] Nosotros consideraremos Θ^1 con la misma significación que Θ.

Algunos de estos esquemas irán acompañados de un comentario para indicar su sentido intuitivo.

1. *Esquemas correspondientes a los axiomas de* PEANO [30].

Sirven para caracterizar la constante N_0 y la constante σ.

1.1.- $\sim (\sigma\, \tau_1 = N_0)$.

(El número cero no es el sucesor de ningún número.)

1.2.- $(\sigma\, \tau_1 = \sigma\, \tau_2) \rightarrow (\tau_1 = \tau_2)$.

(Si los sucesores de dos números son iguales, éstos son iguales entre sí.)

1.3. $\Lambda^2\, N_0\, \&\, (\Theta)\, [\Lambda^2\, \Theta \rightarrow \Lambda^2\, (\sigma\, \Theta)] \rightarrow (\Theta)\, \Lambda^2\, \Theta$.

(Esquema de inducción.)

2. *Esquemas de la lógica proposicional.*

Sirven para caracterizar a los operadores proposicionales $\vee$ y $\sim$. En lugar de utilizar esquemas en los cuales no figuren más que estos operadores, GÖDEL utiliza esquemas en los que figuran los operadores $\vee$ y $\rightarrow$ que son más sencillos.

Como el operador $\rightarrow$ está ligado al operador $\sim$ por vía de definición, estos esquemas caracterizan efectivamente los operadores $\vee$ y $\sim$.

2.1.- $A \vee A \rightarrow A$.

2.2.- $A \rightarrow A \vee B$.

2.3.- $A \vee B \rightarrow B \vee A$.

2.4.- $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Gamma \vee A \rightarrow \Gamma \vee B)$.

3. *Esquemas para el cuantificador de universalización.*

Para formular el primero de estos esquemas nos serviremos del operador sintáctico de sustitución [31].

3.1.- $(\Theta^i)\, A\, (\Theta^i) \rightarrow [\Theta^i / \Lambda^i]\, A$
$(i = 1, 2, 3, \ldots,)$.

La utilización de este esquema está sometida a la condición siguiente:

Si Λ^i es una variable, la variable Θ^i no puede figurar en una parte de A que sea de la forma $(\Lambda^i)\, B\, (\Lambda^i)$,
si Λ^i contiene una variable $\mathfrak{X}$ (lo que se puede dar cuando Λ^i es un término de la forma $\sigma\, (\sigma(\ldots\, (\sigma\, \mathfrak{X})\, \ldots))$), la variable Θ^i no puede figurar en una parte de A que sea de la forma $(\mathfrak{X})\, B\, (\mathfrak{X})$.

(De lo contrario, el resultado de la sustitución es ligar una variable que no lo sería, lo que modifica el sentido de la expresión.)

3.2.- $(\Theta^i)\, (A \vee B) \rightarrow A \vee (\Theta^i)\, B$
$(i = 1, 2, 3, \ldots)$. (Θ^i no puede figurar en A como variable libre.)

---

[30] Véase el sistema de axiomas del § 2. Nosotros no debemos prever esquemas correspondientes a los axiomas 1 y 3 de este sistema, pues la morfología *LFG* nos asegura: 1) Que N_0 forma parte de *LFG*; 2) que si κ pertenece a *LFG*, $\sigma\, \kappa$ también pertenece.

[31] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.25.4.1.

4. *Esquema correspondiente al axioma de reductibilidad.*

$$(E\,\Theta^{i+1})\,(\Theta^{i})\,(\Theta^{i+1}\,\Theta^{i} \leftrightarrow A)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

La proposición A que figura en este esquema está sometida a la condición de no poder comprender a la variable Θ^{i+1} como variable libre, pero, en general, comprende a Θ^{i} como variable libre.

Literalmente, este esquema se lee de la manera siguiente: existe un predicado de tipo $(i + 1)$ tal que, para todo objeto de tipo i, afirmar la proposición A (en la que este predicado no figura literalmente) es equivalente a decir que este predicado se verifica en este objeto.

Lo que significa: dada la proposición A, que puede considerarse que caracteriza a un determinado objeto (representado por la variable Θ^{i} que figura libremente en A), existe un medio de encontrar un predicado Θ^{i+1} que no figure libremente en A y que es equivalente a A en cuanto a su dominio de validez (es decir, si se da un campo de interpretación y una regla de interpretación calesquiera, la proposición A es verdadera o falsa en este campo, según que el predicado Θ^{i+1} se verifique o no en los objetos del campo que están asociados a sus argumentos).

Este esquema corresponde al *axioma de reductibilidad* de RUSSELL y WHITEHEAD y al *axioma de selección* de la Teoría de Conjuntos.

POINCARÉ y RUSSELL han demostrado que algunas paradojas (como la de RICHARD) hacen intervenir *definiciones no-predicativas.* En sentido estricto, una *definición no-predicativa* es la que caracteriza a un individuo perteneciente a un cierto conjunto haciendo intervenir a este mismo conjunto. (Así, la paradoja de BURALI-FORTI introduce el ordinal del conjunto de todos los ordinales.) En un sentido algo menos estricto, es una definición que caracteriza a un individuo que posee una cierta propiedad utilizando el conjunto de todos los individuos a los cuales esta propiedad es susceptible de aplicarse. (Así, cuando se habla del valor mínimo adoptado por una función en un intervalo.)

Para eliminar las definiciones no-predicativas, RUSSELL y WHITEHEAD introducen en el interior de cada *tipo* una jerarquía de niveles. De esta manera obtienen lo que se ha llamado *teoría ramificada de tipos.*

La clasificación en tipos y en niveles utilizada por RUSSELL y WHITEHEAD se refiere a las proposiciones abiertas. Toda *proposición abierta* (que contenga variables libres) puede ser considerada como un predicado: en efecto, permite caracterizar objetos eventuales, representados por las variables libres que dicha proposición contiene.

Una proposición abierta es de *tipo 1* si puede tomar por argumentos constantes individuales.

Es de *tipo 2* si puede tomar por argumentos proposiciones abiertas de tipo 1.

Y así sucesivamente.

Una proposición abierta de un tipo dado es de *nivel 1* si no contiene ninguna variable ligada (y, por tanto, ningún cuantificador).

Es de *nivel 2* si contiene una variable ligada que es una variable individual.

Es de *nivel 3* si hace intervenir al menos una proposición abierta de nivel 2.

Y así sucesivamente.

La teoría ramificada de los tipos impide que una proposición abierta de un nivel determinado adopte por argumento una proposición abierta de su mismo nivel o de nivel superior. Esta restricción permite eliminar las paradojas, pero al mismo tiempo sacrifica una gran parte del análisis. Para remediar esta situación, RUSSELL y WHITEHEAD han recurrido a un axioma especial, el *axioma de reductibilidad.* Este axioma afirma que toda proposición abierta de un nivel determinado es equivalente a una proposición abierta del nivel 1 (y del mismo tipo). Por tanto, permite hacer corresponder a toda proposición abierta que contiene al menos una variable ligada, otra proposición abierta que es equivalente y que no contiene ya más que variables libres.

Más sencillamente, afirma que a todo predicado definido de manera no predicativa corresponde un predicado que se verifica de los mismos objetos y que no posee este carácter no-predicativo.

En nuestro esquema, si la proposición A contiene la variable libre Θ^i, puede ser considerada como aplicando un cierto predicado al objeto Θ^i. En general, puede contener variables ligadas. El esquema le hace corresponder un predicado que le es equivalente (en el sentido que hemos dicho más arriba) y que, aplicándose igualmente al objeto Θ^i, debe ser de nivel $(i + 1)$. Este predicado, al reducirse a una sola variable, no menciona evidentemente ninguna variable ligada.

Por otra parte, en su teoría de conjuntos, ZERMELO introduce un axioma denominado *axioma de selección.*

Un predicado *P* se dice *definido* para un dominio de objetos si es posible decidir sin ambigüedad, para cada uno de los objetos de este dominio, si este objeto verifica o no este predicado.

El *axioma de selección* puede formularse como sigue:

Si un predicado P está definido para todos los elementos de un conjunto En, existe un subconjunto de En que contiene todos los elementos de En que poseen la propiedad P, y ésta solamente.

En nuestro esquema, si la proposición A contiene la variable libre Θ^i, ésta puede considerarse como aplicando un predicado *P* al objeto Θ^i. El predicado Θ^{i+1} puede ser considerado como definidor de un cierto conjunto (el conjunto de los objetos en que se verifica). La equivalencia planteada por el esquema nos permite afirmar la existencia del conjunto que contiene todos los objetos a los cuales se aplica el predicado *P* (y solamente éste).

5. *Esquema correspondiente al axioma de determinación.*

$$(\Theta^i)\ (\Lambda_1^{i+1}\ \Theta^i \leftrightarrow \Lambda_2^{i+1}\ \Theta^i) \rightarrow (\Lambda_1^{i+1} = \Lambda_2^{i+1})$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Este esquema puede formularse así:

Dados dos predicados de un determinado tipo, si las proposiciones obtenidas al aplicarlos a un mismo objeto son equivalentes cualquiera que sea este objeto, ambos

predicados son idénticos. Dicho de otra forma: dos predicados que se verifican de los mismos objetos pueden ser considerados idénticos.

Este esquema significa, por consiguiente, que una clase está enteramente determinada por sus elementos.

80. Reglas de derivación de LFG.

El sistema *LFG* incluye dos reglas de derivación.

1. *Regla de la consecuencia.*

$$\frac{\begin{array}{l}\mathrm{A}\\ \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{B}} \quad .$$

2. *Regla para el cuantificador de universalización.*

$$\frac{\mathrm{A}\,(\Theta^i)}{(\Theta^i)\;\mathrm{A}\,(\Theta^i)}$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Estas reglas definen la relación de *consecuencia inmediata en LFG.*

a. Una proposición Γ es una *consecuencia inmediata* de las proposiciones A y B en *LFG* si la proposición B tiene la forma $(\mathrm{A} \rightarrow \Gamma)$.

b. Una proposición Γ es una *consecuencia inmediata de una proposición* B en *LFG* si la proposición Γ tiene la forma $(\Theta^i)\,\mathrm{A}\,(\Theta^i)$ y la proposición B la forma $\mathrm{A}\,(\Theta^i)$.

Sirviéndonos de esta noción podemos formular como sigue la noción de *derivación* (definida en forma general en el § 17); una derivación de *LFG* es una serie de proposiciones de *LFG,* cada una de las cuales es o un *axioma* de *LFG* o una *consecuencia inmediata* de una o dos proposiciones que la preceden en la serie.

81. La noción de derivabilidad en LFG.

Ahora podemos definir la noción de *derivabilidad en LFG.*

Consideremos una cierta clase de objetos $a_1, a_2, \ldots$, y una operación *On* que, aplicada a *n* objetos de esta clase, da un cierto objeto de esta clase.

Diremos que esta clase es *cerrada en relación a esta operación* si, cuando contiene los objetos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, contiene también el objeto a_j que le es asociado por la operación *On.*

Así, un grupo forma una clase de objetos *cerrada* en relación a la operación *producto* del grupo: como el producto de dos elementos del grupo pertenece siempre a este grupo, si dos objetos pertenecen a un grupo, también pertenece su producto.

Dada una operación *On* podemos definir una relación R^* de la manera siguiente: la relación R^* se verifica entre los objetos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, a_j$, si la operación *On* asocia el objeto a_j al sistema de objetos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$.

Diremos que una clase es *cerrada* en relación a esta *relación* si está cerrada respecto a la operación correspondiente.

Así, podemos hacer corresponder a la relación de *consecuencia inmediata* una operación que asocie una cierta proposición a toda proposición de una forma dada y a todo par de proposiciones de una forma dada.

La clase de *proposiciones derivables de LFG* es la menor clase de proposiciones de *LFG* que incluye todos los axiomas de *LFG* y que es cerrada respecto a la relación de *consecuencia inmediata en LFG*. Esta clase incluye, pues, todos los axiomas de *LFG* y todas las proposiciones que es posible obtener a partir de ellas mediante reglas de derivación de *LFG*:

— Cuando contiene A (Θ^i), contiene también (Θ^i) A (Θ^i).
— Y cuando contiene A y (A → B), contiene también B.

Una proposición es *derivable en LFG* si forma parte de esta clase.

Observación. Siempre podremos reemplazar a una proposición una variable del primer tipo por un término cualquiera, y en particular por una cifra.

Sea, en efecto, A (Θ) una proposición que contiene la variable Θ. Si esta proposición es derivable, la proposición A (τ), obtenida reemplazando Θ por el término τ, es igualmente derivable.

A (Θ) se ha obtenido a partir de ciertos esquemas de axiomas mediante ciertas sustituciones y reglas de derivación. Modificando convenientemente las sustituciones realizadas en los esquemas, se puede derivar de ellos de la misma manera A (τ).

82. Símbolos abreviativos.

Todos los razonamientos que van a seguir pueden ser formulados por medio de *símbolos sintácticos*. Sin embargo, para hacer más clara la exposición, utilizaremos símbolos abreviativos que consideraremos pertenecientes al sistema y que podremos manejar según las reglas del sistema. Estos símbolos son simplemente notaciones abreviadas para unas expresiones determinadas que sería posible, en principio, escribir explícitamente por medio de componentes primitivas del sistema.

Denominaremos *expresiones funcionales* a una expresión que puede servir para representar una función, y *expresión predicativa* a la que puede representar un predicado.

Toda proposición que contenga variables libres del primer tipo y no contenga ninguna variable libre del tipo superior, puede ser considerada como una *expresión predicativa.* (Se trata, en efecto, de una expresión que puede ser aplicada a individuos, como un predicado: basta reemplazar las variables por cifras para realizar tal aplicación.)

Nosotros utilizaremos:

— los símbolos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, y estos mismos símbolos afectados de índices, para designar proposiciones determinadas;

— Los símbolos $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{D}^*$, y estos mismos símbolos afectados de índices, para designar proposiciones cerradas determinadas;

— Los símbolos $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, y estos mismos símbolos afectados de índices, para designar expresiones funcionales determinadas;

— Y los símbolos $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, y estos mismos símbolos afectados de índices, para designar expresiones predicativas determinadas.

También utilizaremos símbolos especiales (formados mediante letras góticas) para designar ciertas expresiones funcionales y predicativas particulares [32].

83. Hipótesis hechas sobre LFG.

El sistema *LFG* se supone que es *ω-coherente* [33].

No contiene, por tanto, ninguna *expresión del segundo* tipo tal que, a la vez:

1) todas las proposiciones

$$\Lambda^2\,\kappa$$

son derivables en *LFG,*

2) la proposición

$$\sim(\Theta)\ \Lambda^2\,\Theta$$

es igualmente derivable en *LFG.*

Y tampoco contiene ninguna *expresión predicativa* de un argumento $A(\Theta)$ tal que, a la vez:

1) todas las proposiciones cerradas del tipo

$$A(\kappa)$$

(es decir, todas las proposiciones que se pueden obtener reemplazando en $A(\Theta)$ la variable Θ por una cifra cualquiera)
son derivables en *LFG,*

2) la proposición cerrada

$$\sim(\Theta)\ A(\Theta)$$

es igualmente derivable en LFG.

Puesto que *LFG* es ω-coherente, es también coherente.

---

[32] Véase INDICE DE NOTACIONES, 1.41 y 2.31.2.

[33] Véase § 36.

SECCIÓN 3.—ARITMETIZACION DE LFG Y LEMA DE GÖDEL.

84. ARITMETIZACIÓN DEL SISTEMA LFG.

La aritmetización de *LFG* se opera de la siguiente manera:

1. A las *componentes primitivas* que no son variables se hacen corresponder los siete primeros números enteros impares:

1 corresponde a N_0,
3 " " σ,
5 " " $\sim$,
7 " " $\vee$,
9 " al sistema de paréntesis del cuantificador de universalización,
11 " a (,
13 " ").

El cuantificador de universalización eleva indivisiblemente un sistema de paréntesis y la mención de una variable. Convendremos considerarle como formado de la sucesión $\mathfrak{X}^i$ ( ) y le haremos corresponder un número determinado como si se tratase de una sucesión de dos símbolos.

2. A una *variable* $\mathfrak{X}^n$ de tipo n se hace corresponder un número de forma p^n donde p es un número primo mayor que 13.

Las variables de cada tipo se supone que están situadas en un cierto orden [34] y se utilizan los números primos sucesivos mayores que 13 (que se eleva, por tanto, a la potencia correspondiente al tipo considerado).

3. Expresiones cualesquiera de *LFG*.

Toda expresión de *LFG* es una serie de componentes primitivas de *LFG*.

Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ los números coordinados a las componentes primitivas de una expresión *Sy* en el orden en que estas componentes figuran en ella.

A la sucesión *Sp* se hará corresponder el número

$$2^{n1} \times 3^{n2} \times \ldots \times p_k^{nk},$$

donde p_k representa el k-ésimo número primo diferente de 1 (estando clasificados los números primos según su magnitud).

---

[34] Se podrá tomar, por ejemplo, el orden alfabético y para las variables designadas por una misma letra, el orden de los índices inferiores.

Tendremos, por ejemplo, para las variables individuales:

$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots\ldots, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \ldots\ldots, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots$

4. Sucesión de proposiciones.

Sean n_1, n_2, ..., n_k los números que se ha hecho corresponder a las proposiciones de la sucesión *Sp*.

A la sucesión *Sp* se hará corresponder el número

$$2^{n1} \times 3^{n2} \times \ldots \times p_k^{nk}$$

como en el caso anterior.

Si *Ec* es una componente primitiva, una expresión o una sucesión de proposiciones de *LFG*, y si *n* es el número correspondiente a *Ec* por la correspondencia que acaba de ser descrita, tendremos:

$$Ngd\ (Ec) = n$$

y $$Ngd^{-1}\ (n) = Ec$$ [35].

La correspondencia realizada es biunívoca, pues las correspondencias 1 y 2 lo son evidentemente, y las correspondencias 3 y 4 lo son en virtud de las propiedades de los números primos.

El número-G de una expresión cualquiera (o de una serie de expresiones) de *LFG* determina, pues, enteramente esta expresión (o serie de expresiones).

Sea, por ejemplo, *n* el número-G de una serie *Sy* de símbolos que constituyen una expresión de *LFG*.

Descompongamos *n* en sus factores primos. Esta descomposición es única y obtendremos un resultado del tipo

$$2^{n1} \times 3^{n2} \times \ldots \times p_k^{nk} :$$

n_1, es decir, el número de factores 2, es el número-G del primer símbolo de *Sy* (por ejemplo, si $n_1 = 5$, *Sy* comienza por el símbolo $\sim$).

n_2, es decir, el número de factores 3, es el número-G del segundo símbolo de *Sy*, y así sucesivamente.

Por consiguiente, podemos reconstruir *Sy* unívocamente a partir de su propio número-G.

85. Representación de las propiedades metateóricas en LFG.

Sean $Ec_1, Ec_2, \ldots, Ec_{k-1}, Ec_k$ elementos de *LFG* entre los cuales existe una cierta relación *R** (por ejemplo, Ec_k *es derivable a partir de axiomas* $Ec_1, Ec_2, \ldots, Ec_{k-1}$).

Podemos hacer corresponder a estos elementos sus números-G y expresar la relación *R** mediante una relación aritmética cuyos argumentos serán estos números-G.

---

[35] Sobre el sentido de estas notaciones, véase el § 68.

Recordemos que se trata simplemente de notaciones sintácticas abreviadas y no de funciones aritméticas.

Por consiguiente, la aritmetización permite expresar por medio de la aritmética un cierto número de enunciados metateóricos [36].

Como se ha visto [37], para establecer la existencia de proposiciones indecidibles en *LFG,* hay que demostrar que se pueden representar en *LFG* ciertas propiedades metateóricas. Para ello, GÖDEL se sirve de la teoría de funciones recursivas y demuestra:

1) que las propiedades y operaciones metateóricas que utiliza son *recursivamente representables.*

2) que todo predicado recursivo es *representable en LFG.*

La primera parte de este programa se realiza en una serie de etapas. La segunda es objeto de un Lema, clave del Teorema.

86. TEOREMAS PREPARATORIOS.

Para demostrar que una operación o propiedad es recursivamente representable, GÖDEL da en forma explícita la función o el predicado aritmético mediante el cual puede expresarse, y comprueba que esta función o este predicado tiene carácter recursivo. Para ello se apoya en cuatro teoremas relativos a las funciones y predicados recursivos.

GÖDEL se sirve únicamente de funciones y predicados *recursivos primitivos.* En todo este capítulo, el término *recursivo* deberá entenderse siempre en el sentido de *recursivo primitivo.*

GÖDEL parte de las funciones recursivas elementales.

$+$ (adición),
$\times$ (multiplicación),
y *Exp.* (exponenciación),
y de las relaciones recursivas elementales
$<$ (relación de *ordenación*)
y $=$ (relación de *igualdad*).

Estableciendo los siguientes teoremas:

1. (I) *Toda función obtenida a partir de una función recursiva sustituyendo funciones recursivas por variables es recursiva.*

Igualmente, todo predicado obtenido a partir de un predicado recursivo sustituyendo funciones recursivas por variables es recursivo.

---

[36] La existencia de una *correspondencia de Gödel* no nos asegura que toda la metateoría del sistema pueda expresarse aritméticamente. Algunos conceptos y demostraciones metateóricas hacen intervenir medios de expresión o de demostración que rebasan el marco de la aritmética y que pertenecen a teorías más vastas, por ejemplo a la Teoría de Conjuntos.

Sin embargo, todos los conceptos metateóricos que intervienen en la demostración de GÖDEL pueden expresarse en forma aritmética.

[37] Véase § 73.

2. (II) *Si P y Q son predicados recursivos respectivamente de m y n argumentos, los predicados*

$(\hat{X}_1\ \hat{X}_2 \ldots \hat{X}_m\ (\sim P\ X_1\ X_2 \ldots X_m)$
y $\hat{X}_1\ \hat{X}_2 \ldots\ldots X_m\ \hat{Y}_1\ \hat{Y}_2 \ldots \hat{Y}_n\ (P\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m / Q\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n)$
son igualmente recursivos [38].

3. (III) *Si F y G son funciones recursivas respectivamente de m y n argumentos, el predicado*

$\hat{X}_1\ \hat{X}_2 \ldots\ldots \hat{X}_m\ \hat{Y}_1\ \hat{Y}_2 \ldots\ldots \hat{Y}_n\ (F\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m = G\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n)$
es recursivo.

(Este predicado significa: *la propiedad que las funciones F y G toman el mismo valor.* Este predicado se da para los enteros

$\alpha_1\ \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, si
$F\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_m = G\ \beta_1\ \beta_2 \ldots\ \beta_n$, y sólo en este caso.)

4. (IV) *Si la función F (de m argumentos) y el predicado P (de n + 1 argumentos) son recursivos, lo mismo sucede con los predicados* R_1 y R_2

$R_1\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n \leftrightarrow (E\,Z)\ [(Z \leqq F\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m)$ y $P\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n\ Z]$.

$R_2\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n \leftrightarrow (Z)\ [(Z \leqq F\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m) \rightarrow P\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n\ Z]$,

y de la función G definida por la siguiente ecuación:

$G\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n = Min\ Z\ [(Z \leqq F\ X_1\ X_2 \ldots X_m)\ \&\ P\ Y_1\ Y_2 \ldots Y_n\ Z]$.

87. Ejemplo de representación recursiva.

Indiquemos mediante un ejemplo la posibilidad de utilización de estos teoremas.

Consideremos la propiedad metateórica *ser una variable del tipo n.* Esta propiedad puede expresarse bajo la forma de un predicado aritmético de dos argumentos que

---

[38] $\hat{X}_1\ \hat{X}_2 \ldots\ldots \hat{X}_m\ (\sim P\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m)$ es un predicado que significa: *el predicado P no se verifica.*

Así, en el caso de un solo argumento, se tendría el predicado $\hat{X}\ (\sim P\ X)$, que significa: *la propiedad de no ser un P.*

$\hat{X}_1\ \hat{X}_2 \ldots\ldots \hat{X}_m\ \hat{Y}_1\ \hat{Y}_2 \ldots\ldots \hat{Y}_n\ (P\ X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m\ v\ Q\ Y_1\ Y_2 \ldots\ldots Y_n)$ es un predicado que significa: se tiene el predicado *P* o el predicado *Q*.

Así, en el caso de un solo argumento, se tendría el predicado $\hat{X}\ (P\ X\ v\ Q\ X)$, que significa: *la propiedad de ser un P o un Q.*

(Para el uso del operador de abstracción, véase INDICE DE NOTACIONES, 2.22.1.6.)

Si *P* (o $\hat{X}\ (P\ X)$) es el predicado *igual a*:
$\hat{X}\ (\sim P\ X)$ es el predicado *diferente de.*
Si *P* (o $\hat{X}\ (P\ X)$) es el predicado *divisible por r,*
y *Q* (o $\hat{X}\ (Q\ X)$) es el predicado *divisible por q,*
$\hat{X}\ (P\ X\ v\ Q\ X)$ es el predicado *divisible por r o por q.*

designaremos con el símbolo *Var*. Este predicado está definido mediante la siguiente equivalencia:

$$Var\ X\ Y \leftrightarrow (E\,Z)\ [(13 < Z \leqq X)\ \&\ Prm\ Z\ \&\ (Cnt\ X = Exp\ Z\ Y)].$$

En esta expresión, el símbolo *Prm* designa el predicado *ser un número primo.*

Esta expresión, por consiguiente, puede leerse: decir que el elemento $Ngd^{-1}\ (X)$ de *LFG* [39] es una variable del tipo *Y*, es decir, que hay un número *Z* mayor que 13 y menor o igual que *X*, que es número primo y tal que $X = Z^Y$ [40].

Hemos visto que a una variable del tipo *n* se hace corresponder la *n*-ésima potencia de un número primo mayor que 13.

Se supone que ya ha sido establecido el carácter recursivo del predicado *Prm* [41].

El predicado $<$ es recursivo.

El predicado $\leqq$ (mayor o igual que) es recursivo en virtud del Teorema II(86).

La expresión $(Cnt\ X = Exp\ Z\ Y)$ proviene de la aplicación a las variables *X*, *Z* e *Y* del predicado $\hat{X}_1\ \hat{X}_2\ \hat{X}_3\ (Cnt\ X_1 = Exp\ X_2\ X_3)$.

Y este predicado es recursivo en virtud del teorema III(86), puesto que *Exp* es una función recursiva y *X* debe ser considerada como una abreviatura de la expresión *Scl* (11) *X*, y por tanto como una función recursiva.

$(Scl\ (11)\ X = X)$.

El predicado *Var* es, pues, recursivo en virtud del teorema IV(86) [42].

88. Operaciones recursivamente representables.

Se puede demostrar, utilizando este procedimiento, que los *operadores proposicionales* son *recursivamente representables.*

1. La *negación* estará representada por la función recursiva *Neg*. Si *a* es el número-G de una proposición A, *Neg* será el número-G de la proposición $\sim$ A.

---

[39] El elemento cuyo número-G es *X*.

[40] La expresión $(X = Exp\ Z\ Y)$ resulta de la aplicación a las variables *X*, *Z* e *Y* del predicado $\hat{X}_1\ \hat{X}_2\ \hat{X}_3\ (X_1 = Exp\ X_2\ X_3)$. La expresión $X_1\ X_2\ X_3\ (X_1 = Exp\ X_2\ X_3)\ X\,Z\,Y$ da, en efecto: $(X = Exp\ Z\ Y)$.

La expresión $\hat{X}_1\ \hat{X}_2\ \hat{X}_3\ (X = Z\ Y)$ designa el predicado que se verifica de los números α_1, α_2 y α_3 si se tiene: $\alpha_1 = Exp\ \alpha_2, \alpha_3$, o también, utilizando la notación habitual de la exponenciación, $\alpha_1 = \alpha_2\,\alpha_3$.

Decir que se da $(X = Exp\ Z\ Y)$, equivale a decir que se da: $X = Z^Y$.

[41] Se demuestra que *Prm* es recursivo por un método análogo al del ejemplo anterior. Para esto debemos utilizar el predicado *divisible por* que es recursivo, puesto que puede ser definido por la equivalencia:

$$[X\ divisible\ por\ Y] \longleftrightarrow (EZ)\ [(Z \leqq X)\ \&\ (X = Y \times Z)].$$

[42] El teorema prevé que *Z* es menor o igual al valor tomado por una función recursiva para un cierto sistema de argumentos. *X* puede ser considerado como el valor adoptado por la función *constante, Cnt,* para el argumento *X*.

2. La *disyunción* estará representada por la función recursiva *Dis*. Si *a* y *b* son los números-G de las proposiciones *A* y *B*, *Dis b* será el número-G de la proposición $(A \vee B)$.

3. El *cuantificador de universalización* estará representado por la función recursiva *Unv*.

Si *t* es el número-G de la variable Θ^i y *a* el número-G de la proposición *A* (Θ^i) que contiene a Θ^i en forma libre, *Unv t a* será el número-G de la proposición (Θ^i) A (Θ^i).

4. La *sustitución* de una expresión por otra puede representarse igualmente en forma recursiva mediante una función *Sub*.

Si *a* es el número-G de una proposición *A*,

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ los números-G de las variables $\Theta^i_1, \Theta^j_2, \ldots, \Theta^p_n$ (variables respectivamente del tipo *i, j, ..., p,* en número *n*) [43].

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ los números-G de las expresiones $\Lambda^i_1, \Lambda^j_2, \ldots, \Lambda^p_n$ (cuyos tipos corresponden respectivamente a los de las variables $\Theta^i_1, \Theta^j_2, \ldots, \Theta^p_n$),

Sub a $v_1\ v_2\ \ldots\ v_n\ e_1\ e_2\ \ldots\ e_n$

será el número-G de la proposición

$[\Theta^i_1, \Theta^j_2, \ldots, \Theta^p_n / \Lambda^i_1, \Lambda^j_2, \ldots, \Lambda^p_n]$ A

obtenida reemplazando, en A, las variables $\Theta^i_1, \Theta^j_2, \ldots, \Theta^p_n$ respectivamente por las expresiones de los tipos correspondientes $\Lambda^i_1, \Lambda^j_2, \ldots, \Lambda^p_n$.

89. Propiedades recursivamente representables.

El método del § 87 permite establecer, por aproximaciones sucesivas, que las propiedades metateóricas siguientes son *recursivamente representables* [44]:

ser una constante, ser un signo de agrupamiento, ser un operador proposicional, ser una variable de un cierto *tipo* [45],
ser una proposición elemental,
ser una proposición,
ser una serie de proposiciones,
ser una proposición obtenida por sustitución a partir del esquema de axiomas 1.1 (§ 79),

[43] Algunos de los índices superiores —e incluso todos los índices superiores— pueden ser iguales entre sí. En otros términos, ciertas variables —e incluso todas las variables— pueden ser del mismo tipo.

[44] Todas estas propiedades conciernen al sistema *LFG*. La propiedad *ser una constante*, debe, por tanto, entenderse *ser una constante de LFG*. Y así sucesivamente.

[45] Véase § 87.

(y así sucesivamente para todos los esquemas de axiomas),
ser un axioma,
ser una proposición que es consecuencia inmediata de una o dos proposiciones,
ser una derivación.

Así se llega a la propiedad *ser una derivación de una proposición* A.

Esta propiedad puede expresarse por medio de un predicado recursivo *Fdr* [46].

Si *s* es el número-G de una serie de proposiciones que constituye una derivación y cuya última proposición tiene por número-G *a*, se tendrá: *Fdr s a.*

Se demuestra finalmente que la propiedad *ser derivable* puede quedar representada por un predicado *Dem.*

Sea *a* el número-G de una proposición A.

El enunciado *Dem a* significa:

Existe una serie de proposiciones cuyo número-G es *s* y tal que *Fdr s a.* (Dicho de otra forma: existe una derivación cuya última proposición es A.)

El predicado *Dem* puede definirse a partir del predicado *Fdr* mediante la equivelencia:

(1) $Dem\ Y \leftrightarrow (E\ X)\ Fdr\ X\ Y.$

Contrariamente a lo que ocurre con el predicado *Fdr,* no se puede afirmar que el predicado *Dem* sea recursivo.

90. Lema de Gödel.

Nos ocuparemos ahora del lema que nos va a asegurar que todos estos predicados y funciones (a excepción del predicado *Dem*) son representables en *LFG.*

(V) *A todo predicado recursivo P de n argumentos, se puede hacer corresponder en LFG una expresión predicativa de n variables libres, de número-G r, tal que, para todo sistema* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de números enteros, se tengan los dos enunciados*

$$P\ a_1\ a_2 \ldots a_n \rightarrow Dem\ [Sub\ r\ Ngd(\Theta_1)\ Ngd(\Theta_2) \ldots Ngd(\Theta_n)\ Ngd(N_{a1})\ Ngd(N_{a2}) \ldots Ngd(N_{an})]$$

y

$$\sim P\ a_1\ a_2 \ldots a_n \rightarrow Dem\ [Ngd\ Sub\ r\ Ngd(\Theta_1)\ Ngd(\Theta_2) \ldots Ngd(\Theta_n)\ Ngd(N_{a1})\ Ngd(N_{a2}) \ldots Ngd(N_{an})]$$

Los dos enunciados que figuran en este lema no pertenecen al sistema *LFG*: son enunciados metateóricos formulados mediante la Aritmética recursiva.

$Ngd(\Theta_1), Ngd(\Theta_2), \ldots, Ngd(\Theta_n), Ngd(N_{a1}), Ngd(N_{a2}), \ldots, Ngd(N_{an})$ son los números-G, respectivamente, de las variables $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$, y de las cifras $N_{a1}, N_{a2}, \ldots, N_{an}$, que representan en *LFG* a los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

[46] Gödel llama *figura de demostración* lo que nosotros hemos llamado *derivación.* El símbolo *Fdr* evoca la expresión utilizada por Gödel.

Sea A (Θ_1, Θ_2, ..., Θ_n) la expresión asociada al predicado *P*.

Y sea A (N_{a1}, N_{a2}, ..., N_{an}) la proposición cerrada obtenida reemplazando, en la expresión precedente, las variables Θ_1, Θ_2, ..., Θ_n por las cifras N_{a1}, N_{a2}, ..., N_{an}, que representan en *LFG* a los números enteros a_1, a_2, a_n.

Nuestro lema afirma:

Si el predicado *P* se verifica de los enteros a_1, a_2, ..., a_n, la proposición cerrada A (N_{a1}, N_{a2}, ..., N_{an}) *es derivable en LFG*;
si este predicado no es verificable de los enteros en cuestión, esta proposición es *refutable en LFG.*

Dicho de otra forma:

Si el enunciado *P* a_1, a_2, ..., a_n es *cierto* (en la aritmética intuitiva) [47], la proposición que representa este enunciado en *LFG* es *derivable en LFG.*

Si este enunciado es *falso,* la proposición que le representa en *LFG* es *refutable en LFG.*

Para demostrar este lema, hay que observar que basta con demostrarlo para todo predicado del tipo $\hat{X}\ \hat{Y}_1\ \hat{Y}_2 \ldots \hat{Y}_n$ (*Cnt* $X = F\ Y_1\ Y_2 \ldots Y_n$), donde *F* es una función recursiva de *n* argumentos, pues todo predicado recursivo puede obtenerse a partir de predicados de este tipo.

A continuación se procede por inducción sobre el *nivel de F.*

Como se ha visto, una función *F* se dice que es *recursiva* (primitiva) si existe una serie finita de funciones $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *F*, tal que cada una de ellas queda definida a partir de las otras, de índice menor, mediante el *esquema de recursión primitiva,* o a partir de una función de índice menor mediante el *esquema de sustitución,* o es la *función constante,* la *función sucesor* o la *función de selección.*

La longitud de la serie más corta de funciones que es necesaria para definir una función *F* se denomina *nivel* de esta función.

La *función constante,* la *función sucesor* y la *función de selección* son del nivel primero. Para estas funciones el lema es inmediato.

Sea *F* una función de nivel *m* y sean $G_1, G_2, \ldots, G_l$ las funciones (de nivel inferior) que se utilizan para definirla. Por hipótesis de inducción, el lema se verifica de estas funciones. *F* se obtiene a partir de estas funciones mediante el esquema de recursión primitiva y el esquema de sustitución. Por consiguiente, estos esquemas pueden ser representados en *LFG.* Aplicando en *LFG* las expresiones que representan a estos esquemas a las que representan las funciones $G_1, G_2, \ldots, G_l$, se obtiene una expresión que representa la función *F* y se verifica directamente el lema para esta función.

Este lema establece, pues, que todo predicado recursivo es representable en *LFG.*

También permite afirmar que toda función recursiva es representable en *LFG.* A toda función *F* de *n* argumentos se puede, efectivamente, hacer corresponder un predicado *P* de (n + 1) argumentos [48].

[47] Véase § 71.
[48] Véase § 75.

Si la función *F* es recursiva, el predicado *P* lo es igualmente. (Se puede construir su función representativa por medio de la función *F*.)

SECCIÓN 4.—EL TEOREMA DE GÖDEL Y SU DEMOSTRACION.

91. ENUNCIADO DEL TEOREMA.

Ahora estamos en situación de abordar el teorema y acometer su demostración rigurosa.

Puede enunciarse así:

(VI) *El sistema LFG contiene*[49] *una expresión predicativa de una variable* $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$, *tal que ni* $(\mathfrak{x})\,\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ *ni* $\sim(\mathfrak{x})\,\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ *son proposiciones derivables en LFG*[50].

Sea $\mathfrak{G}^*$ la proposición (cerrada) $(\mathfrak{x})\,\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$.

El teorema puede también expresarse de la siguiente forma:

El sistema LFG contiene una proposición (cerrada) $\mathfrak{G}^*$ *que es indecidible.*

Esta proposición $\mathfrak{G}^*$ es una proposición cerrada que afirma su propia inderivabilidad. Más exactamente, la proposición $\mathfrak{G}^*$ representa en *LFG* (sobre la base de la correspondencia establecida por el lema del § 90 (V (90)) el enunciado metateórico: *La proposición* $\mathfrak{G}^*$ *es inderivable en LFG.*

La demostración del teorema se realiza en dos etapas:

1) Construcción de la proposición $\mathfrak{G}^*$;
2) Demostración del carácter indecidible de $\mathfrak{G}^*$.

92. LA FUNCIÓN ABREVIADA DE SUSTITUCIÓN.

Para construir la proposición $\mathfrak{G}^*$, GÖDEL se sirve de una función recursiva *Sbs* que corresponde a un tipo especial de sustitución.

Denominaremos a esta función *función abreviada de sustitución.* La función *Sbs* representa recursivamente la sustitución de una cifra por una variable del primer tipo en una proposición.

Sea A una proposición de *LFG* que contiene la variable del primer tipo $\mathfrak{x}_1$.

Sea *a* el número-G de A.

---

[49] Esto significa: es posible construir, sobre la base de la morfología de *LFG*, una expresión predicativa de una variable $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$.

[50] Este enunciado no es exactamente el de GÖDEL. Para la formulación de GÖDEL, véase NOTA 1, § 238, 3.1.

El número-G de $\mathfrak{X}_1$ es 17 [51].

Sea N_n la cifra que representa, en *LFG*, al entero *n*.

El número-G de N_n es $Ngd(N_n)$. (En virtud de los convenios de aritmetización, este número es siempre mayor que *n*. Sea, por ejemplo, $Ngd(N_0) = 1$, $Ngd(N_1) = 24$, $Ngd(N_2) = 43.809.164.217.126.613.999.000.$)

Se puede sustituir en la proposición A el número N_n por la variable $\mathfrak{X}_1$, obteniéndose así la proposición $[\mathfrak{X}_1/N_n]$ A.

El número-G de esta nueva proposición está dado por la expresión aritmética *Sub a* 17 $Ngd(N_n)$ [52].

La función *Sbs* se construye de manera que describa tal transformación.

La definiremos de la siguiente forma:

$$Sbs\ X\ Y = Sub\ X\ 17\ Ngd(N_y)\ [53].$$

Si *a* es el número-G de una proposición de *LFG* y *b* un número entero determinado, tendremos:

$$Sbs\ a\ b = Sub\ a\ 17\ Ngd(N_b).$$

Como la función *Sub* es recursiva, la función *Sbs* también lo es, y, por tanto, representable en *LFG*.

Se puede formar también *Sbs a a*. ¿Cuál es su significado?

$$Sbs\ a\ a = Sub\ a\ 17\ Ngd(N_a).$$

Si *a* es el número-G de una proposición A que incluye la variable libre $\mathfrak{X}_1$, *Sbs a a* es el número-G de la proposición $[\mathfrak{X}_1/N_a]$ A que se obtiene reemplazando en A la variable $\mathfrak{X}_1$ por la cifra que representa, en *LFG*, el entero *a*.

Consideremos ahora el enunciado metateórico:

La proposición A *posee la propiedad P**.

Y supongamos que esta propiedad *P** pueda expresarse mediante un predicado recursivo de un argumento *P*. Nuestro enunciado puede expresarse bajo la forma de un enuncinado aritmético. Si *a* es es el número-G de A, tendremos *P a*.

Formemos ahora el enunciado *P* (*Sbs X X*).

El predicado *P* y la función *Sbs*, al ser ambos recursivos, podemos hacer corresponder a este enunciado (en virtud del lema V(90)), en *LFG*, una expresión predicativa B que contendrá una sola variable libre $\mathfrak{X}_1$.

Sea *b* el número-G de esta expresión. N_b es la expresión de *LFG* que corresponde a *b*.

---

[51] Véase § 84, 2. La variable $\mathfrak{X}_1$ es la primera variable del primer tipo (en la serie según la cual las variables del primer tipo se suponen jerarquizadas).

[52] Véase § 88, 4, la definición de la función *Sub*.

[53] La sustitución puede afectar a otra variable distinta de $\mathfrak{X}_1$. Es cómodo suponer que se refiere a la primera variable libre, es decir, a la variable libre de índice menor. Si la sustitución se refiere a la variable $\mathfrak{X}_2$, el número 17 debe reemplazarse en la definición por el número 19. Y así sucesivamente.

Podemos sustituir N_b por $\mathfrak{X}_1$ en B.

Entonces obtendremos la proposición cerrada Γ^*: $[\mathfrak{X}_1/N_b]$ B.

El número-G de esta expresión es:

Sub b 17 $Ngd(N_b)$, es decir, *Sbs b b.*

B representa en *LFG* el enunciado:

La expresión cuyo número-G es Sbs X X posee la propiedad P.*

Γ^* representa en *LFG* el enunciado metateórico *P* (*Sbs b b*), es decir:

La proposición cuyo número-G es *Sbs b b* posee la propiedad *P*.*

Γ^* es, por tanto, una proposición (cerrada) de *LFG* que afirma de sí misma la propiedad *P*.*

De esta forma, la función *Sbs* nos permite construir en *LFG* una proposición que afirma de sí misma una cierta propiedad.

93. Construcción de la proposición $\mathfrak{V}^*$.

La propiedad que vamos a considerar es la de no ser una proposición derivable.

Sea *a* el número-G de una cierta proposición A de *LFG.* Decir que esta proposición es derivable en *LFG* equivale a decir que existe una determinada serie de proposiciones, de número-G *s,* tal que *Fdr s a.*

Por el contrario, decir que una proposición A no es derivable en *LFG,* equivale a decir que no existe ninguna serie de proposiciones *LFG* que constituya una derivación de esta proposición.

O también, equivale a decir que cualquiera que sea la serie de proposiciones que se considera, esta serie no es una derivación de A. Este enunciado puede expresarse en forma aritmética:

$$(X) \sim Fdr\ X\ a.$$

(No existe ningún número que sea el número-G de una serie de proposiciones que constituyan una derivación de A.)

Si *s* es el número-G de una serie de proposiciones *Sp* y *a* el número-G de una proposición A, el enunciado aritmético $\sim Fdr\ s\ a$ significa: *la serie Sp no es una derivación de* A.

Por ser recursivo el predicado *Fdr,* el predicado $\hat{X}\,\hat{Y}\,(\sim Fdr\ X\ Y)$ lo es igualmente [54].

Para obtener una proposición que se aplique esta propiedad a sí misma, utilizaremos el mismo procedimiento ya seguido anteriormente. Pero debemos proceder por etapas, ya que tendremos que introducir un cuantificador de universalización para llegar a nuestra proposición.

[54] Véase Teorema II (86).

Formemos el enunciado metateórico:

La serie Ngd^{-1} (s) *no constituye una derivación de la proposición de LFG cuyo número-G es Sbs a a.*

Este enunciado puede expresarse bajo la forma de un enunciado aritmético:

A: $\sim Fdr\ s\ (Sbs\ a\ a)$.

El predicado $\hat{X}\,\hat{Y}$ $(\sim Fdr\ X\ Y)$ es recursivo y la función *Sbs* es recursiva. En virtud del teorema I (86), el enunciado A puede, pues, considerarse que está formado por un predicado recursivo aplicado a los dos enteros s y a.

Existe, por tanto, conforme al lema V (90), una expresión predicativa $\mathfrak{P}$, de número-G p, que contiene dos variables libres $\mathfrak{x}_1$ y $\mathfrak{x}_2$, tal que:

(1) $\sim Fdr\ s\ (Sbs\ a\ a) \rightarrow Dem\ [Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd(N_s)\ Ngd(N_a)]$

y

(2) $Fdr\ s\ (Sbs\ a\ a) \rightarrow Dem\ [Neg\ Sub\ p\ 17\ \ 19\ Ngd(N_s)\ Ngd(N_a)]$.

En estos enunciados metateóricos, 17 y 19 son los números-G respectivamente de las variables $\mathfrak{x}_1$ y $\mathfrak{x}_2$, $Ngd(N_s)$ y $Ngd(N_a)$ son los números-G de las cifras correspondientes, respectivamente, a los enteros s y a.

Por consiguiente, tenemos:

Si el enunciado A es cierto, entonces la preposición cerrada $\mathfrak{A}^*$ (de *LFG*), obtenida reemplazando en $\mathfrak{P}$ las variables $\mathfrak{x}_1$ y$\mathfrak{x}_2$, respectivamente, por las cifras N_s y N_a, es derivable en *LFG*; y si el enunciado A no es cierto, entonces la proposición cerrada $\mathfrak{A}^*$ es refutable en *LFG*.

La expresión predicativa $\mathfrak{P}$ contiene dos variables libres, $\mathfrak{x}_1$ y $\mathfrak{x}_2$, lo que podemos indicar así:

$$\mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2).$$

Podemos ligar la primera de estas variables mediante un cuantificador de universalización al nombre de esta variable. De esta forma obtenemos una expresión predicativa $\mathfrak{Q}$:

$$(\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2).$$

Sea q el número-G de esta expresión.

La operación de cuantificación que hemos practicado sobre $\mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{x}_2)$ es recursivamente representable, y tenemos:

$$q = Unv\ 17\ p\ ^{55}.$$

Por otra parte, podemos practicar en la segunda variable de $\mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ una sustitución que reemplace a esta variable por la cifra de *LFG* que corresponda al entero q.

[55] Véase § 88, 3.

Así, obtendremos una expresión predicativa $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, N_q).$$

Sea r el número-G de esta expresión.

La operación de sustitución practicada en $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ es recursivamente representable, y tenemos:

$$r = Sub\ p\ 19\ Ngd(N_q).$$

Esta expresión predicativa $\mathfrak{R}$ contiene todavía una variable libre, y podemos ligar esta variable mediante un cuantificador de universalización.

Entonces obtenemos una proposición cerrada $\mathfrak{S}^*$

$$(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, N_q).$$

Sea i el número-G de $\mathfrak{S}^*$.

Como anteriormente, tenemos:

$$i = Unv\ 17\ r.$$

94. Sentido de la proposición $\mathfrak{S}^*$.

Esta proposición $\mathfrak{S}^*$ afirma su propia *inderivabilidad.*

Volvamos a considerar, en efecto, las diferentes etapas de nuestra construcción.

La expresión predicativa $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ representa, en *LFG,* el enunciado metateórico

$$\sim Fdr\ X_1\ (Sbs\ X_2\ X_2).$$

La expresión predicativa $\mathfrak{Q}$, es decir $(\mathfrak{X}_1)$, $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, representa, en *LFG,* el enunciado metateórico

$$(X_1) \sim Fdr\ X_1\ (Sbs\ X_2\ X_2),$$

que significa: no existe derivación de la proposición cuyo número-G es $(Sbs\ X_2\ X_2)$ (o también: no existe derivación de la proposición $Ngd^{-1}\ (Sbs\ X_2\ X_2)$).

La expresión predicativa $\mathfrak{R}$, es decir, $\mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1\ N_q)$, representa en *LFG* el enunciado metateórico

$$\sim Fdr\ X_1\ (Sbs\ q\ q),$$

que significa: la serie de proposiciones $Ngd^{-1}\ (X_1)$ no es una derivación de la proposición $Ngd^{-1}\ (Sbs\ q\ q)$.

Finalmente, la proposición cerrada $\mathfrak{S}^*$, es decir, $(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1, N_q)$, representa en *LFG* el enunciado metateórico

$$(X_1) \sim Fdr\ X_1\ (Sbs\ q\ q),$$

que significa: no existe derivación de la proposición $Ngd^{-1}\ (Sbs\ q\ q)$.

El número-G de $\mathfrak{S}^*$ es, precisamente, $Sbs\ q\ q$.

En efecto, $Sbs\ q\ q$ es el número-G de la proposición que se obtiene reemplazando en la proposición $Ngd^{-1}\ (q)$ (que se supone contiene la variable libre $\mathfrak{X}_1$), la variable $\mathfrak{X}_1$ por la cifra que correspende, en *LFG,* al entero q.

La proposición $Ngd^{-1}\ (q)$, es $\mathfrak{Q}$, y contiene la variable libre $\mathfrak{x}_2$, cuyo número-G es 19.

Sustituyendo $\mathfrak{x}_2$ por N_q en $\mathfrak{Q}$, se obtiene la proposición cerrada

$(\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, N_q)$, es decir, $\mathfrak{H}^*$.

En general, se puede demostrar directamente que $Sbs\ q\ q = i$.

Efectivamente, por definición de *Sbs*:

$$Sbs\ q\ q = Sub\ q\ 19\ Ndg(N_q).$$

Como $q = Unv\ 17\ p$.

Tendremos:

$$Sbs\ q\ q = Sub\ (Unv\ 17\ p)\ 19\ Ngd\ (N_q).$$

Se puede demostrar fácilmente que los símbolos *Sub* y *Unv* pueden intercambiarse, con tal de que no afecten a las mismas variables.

Sea una proposición A que contiene las variables libres $\Theta_1^i, \Theta_2^j, \ldots, \Theta_n^p$. Sea a el número-G de A y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los números-G de las variables $\Theta_1^i, \Theta_2^j, \ldots, \Theta_n^p$. Formemos la proposición $(\Theta_1^i)\ A\ (\Theta_1^i)$.

Su número-G es $Unv\ v_1\ a$.

También contiene las variables libres $\Theta_2^j, \ldots, \Theta_n^p$ y podemos escribir:

$(\Theta_1^i)\ A\ (\Theta_1^i, \Theta_2^j, \ldots, \Theta_n^p)$.

Sustituyamos las variables $\Theta_2^j, \ldots, \Theta_n^p$ por las expresiones $\Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_n^p$ cuyos números-G son $e_2, \ldots, e_n$.

Entonces obtenemos una proposición cuyo número-G está dado por:

$$Sub\ (Unv\ v_1\ a)\ v_2 \ldots v_n\ e_2 \ldots e_n.$$

Que podemos escribir:

$$(\Theta_1^i)\ A\ (\Theta_1^i, \Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_n^p).$$

Pero podemos obtener la misma proposición procediendo de otra forma.

Sustituyamos primero, en A, las expresiones $\Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_n^p$ por las variables $\Theta_2^j, \ldots \Theta_n^p$.

Entonces obtendremos una proposición cuyo número-G está dado por:

$$Sub\ a\ v_2 \ldots v_n\ e_2 \ldots e_n.$$

Proposición que puede escribirse: $A\ (\Theta_1^i, \Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_n^p)$.

Liguemos ahora la variable Θ_1^i por el cuantificador de universalización, obteniéndose la proposición: $(\Theta_1^i)\ A\ (\Theta_1^i, \Lambda_2^j, \ldots, \Lambda_n^p)$.

Su número-G es:

$$Unv\ v_1\ (Sub\ a\ v_2 \ldots v_n\ e_2 \ldots e_n).$$

Por consiguiente, tendremos:

$$Sub\ (Unv\ v_1\ a)\ v_2 \ldots v_n\ e_2 \ldots e_n = Unv\ v_1\ (Sub\ a\ v_2 \ldots v_n\ e_2 \ldots e_n).$$

Aplicando esta propiedad al caso que nos ocupa, obtendremos:

$$\begin{aligned} Sbs\ q\ q &= Unv\ 17\ (Sub\ p\ 19\ Ngd\ (N_q)) \\ &= Unv\ 17\ r \\ &= i. \end{aligned}$$

Así, *Sbs q q* es el número-G de la proposición $\mathfrak{V}^*$.

Esto quiere decir, por tanto:

— No existe derivación, en *LFG*, de la proposición $\mathfrak{V}^*$.

— El sentido de $\mathfrak{V}^*$ queda así establecido, y tenemos la seguridad de que $\mathfrak{V}^*$ es una proposición de *LFG*.

95. Observación auxiliar.

Por otra parte, se tiene:

$$Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd(N_s)\ Ngd(N_q) = Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s).$$

Los enunciados 1 (93) y 2 (93) se convierten, pues:

(1) $\sim Fdr\ s\ i \rightarrow Dem\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)]$

y

(2) $Fdr\ s\ i \rightarrow Dem\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)]$.

$[Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)]$, es el número-G de la proposición cerrada $\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$.

Esta proposición representa en *LFG* el enunciado metateórico

$\sim Fdr\ s\ (Sbs\ q\ q)$, que significa:

la serie de proposiciones $Ngd^{-1}\ (s)$ no es más que una derivación de la proposición cerrada $Ngd^{-1}\ (Sbs\ q\ q)$, es decir, de la proposición cerrada $Ngd^{-1}\ (i)$ o $\mathfrak{V}^*$.

Por consiguiente, el enunciado 1 (95) significa:

si una serie de proposiciones $Ngd^{-1}\ (s)$ no es una derivación de la proposición $\mathfrak{V}^*$, la proposición que representa en *LFG* el enunciado *La sucesión* $Ngd^{-1}\ (s)$ *no es una derivación* de $\mathfrak{V}^*$, es derivable en *LFG*.

Y el enunciado 2 (95) significa:

si una serie de proposiciones $Ngd^{-1}\ (s)$ es una derivación de la proposición $\mathfrak{V}^*$, la proposición que representa en *LFG* el enunciado *La serie* $Ngd^{-1}\ (s)$ *es una derivación de* $\mathfrak{V}^*$, es refutable en *LFG*.

96. Demostración del carácter indecidible de $\mathfrak{V}^*$.

Ahora podemos establecer el carácter *indecidible* de $\mathfrak{V}^*$.

La demostración supone dos etapas.

1. $\mathfrak{V}^*$ *es inderivable.*

Supongamos, en efecto, que $\mathfrak{V}^*$ sea derivable.

Esto significa que existe una cierta serie de proposiciones de *LFG*, de número-G *s*, que es una derivación de $\mathfrak{Z}^*$. Esta condición puede enunciarse bajo la forma de un enunciado aritmético: *Fdr s i.*

Entonces, en virtud del enunciado 2 (95), tendríamos:

$$Dem\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)],$$

lo que significa que la proposición cuyo número-G es [*Neg Sub r* 17 *Ngd* (N_s)] es derivable en *LFG.*

En general, si $\mathfrak{Z}^*$ es derivable, $\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$ es también derivable.

La utilización del primer esquema para el cuantificador de universalización [56] nos da, en efecto:

$$(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{X}_1, N_q) \rightarrow \mathfrak{P}\ (N_s, N_q).$$

Y en virtud de la regla de la consecuencia [57], si $\mathfrak{Z}^*$, es decir $(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{X}_1, N_q)$ es derivable, $\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$ también lo es.

Esta proposición $\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$ se obtiene sustituyendo, en la expresión predicativa $\mathfrak{R}$, la variable $\mathfrak{X}_1$ por la cifra N_s.

Su número-G es, por tanto: *Sub r* 17 *Ngd* (N_s).

Se tiene:

$$Ngd^{-1}\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)] \leftrightarrow \sim Ngd^{-1}\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)].$$

Por consiguiente, es posible derivar simultáneamente en *LFG*:

$$Ngd^{-1}\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)] \quad o \quad \mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$$
$$y \sim Ngd^{-1}\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)] \quad o \sim \mathfrak{P}\ (N_s, N_q),$$

lo que es imposible, pues *LFG* es coherente.

Nuestra hipótesis es, por tanto, falsa, y $\mathfrak{Z}^*$ es *inderivable.*

2. $\mathfrak{Z}^*$ *es irrefutable,* es decir: $\sim \mathfrak{Z}^*$ *no es derivable.*

Supongamos, en efecto, que $\sim \mathfrak{Z}^*$ sea derivable.

Decir que $\sim \mathfrak{Z}^*$ es derivable equivale a aceptar que $\sim (\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{X}_1, N_q)$ es derivable.

Por otra parte, en virtud de la primera parte de la demostración, $\mathfrak{Z}^*$ es inderivable. Esto significa que no existe ninguna serie de proposiciones de *LFG* que constituya una derivación de $\mathfrak{Z}^*$. Esto puede expresarse mediante el enunciado aritmético: $(X) \sim Fdr\ X\ i.$

Por consiguiente, tendremos que, cualquiera que sea *n*: $\sim Fdr\ n\ i.$

En virtud del enunciado 1 (95), tenemos entonces igualmente, que cualquiera que sea *n*: *Dem* [*Sub r* 17 *Ngd* (N_n)].

Esto quiere decir: cualquiera que sea el entero *n*, la proposición cerrada cuyo número-G es [*Sub r* 17 *Ngd* (N_n)] es derivable en *LFG.*

---

[56] Esquema 3.1 del § 79.
[57] Regla 1 del § 80.

Esta proposición es la proposición cerrada obtenida reemplazando, en $\mathfrak{R}$, la variable $\mathfrak{x}_1$ por la cifra N_n, es decir: $\mathfrak{P}\ (N_n, N_q)$.

$\mathfrak{R}$ es una expresión predicativa que contiene una variable.

Nuestro razonamiento nos lleva a afirmar simultáneamente:

a) Cualquiera que sea el entero *n*, la proposición cerrada $\mathfrak{P}\ (N_n, N_q)$, o $\mathfrak{P}\ (N_n)$ es derivable en *LFG*,

b) la proposición cerrada $\sim (\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, N_q)$, o $\sim (\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{x}_1)$, es derivable en *LFG*.

Como *LFG* es ω-coherente, esto es imposible. Nuestra hipótesis es, por tanto, falsa y $\sim \mathfrak{G}^*$ no es derivable.

Vemos, por tanto, que $\mathfrak{G}^*$ es una ***proposición indecidible*** de la forma $(\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{x}_1)$, o $\mathfrak{R}$ es una ***expresión predicativa*** de una variable.

($\mathfrak{R}$ es la proposición $\mathfrak{P}\ (\mathfrak{x}_1, N_q)$, que contiene $\mathfrak{x}_1$ como única variable libre.)

Sección 5.—Las críticas opuestas a la demostracion de Gödel.

La validez del Teorema de Gödel ha sido puesta en duda por algunos lógicos, según los cuales, la demostración propuesta por Gödel lleva, de una u otra forma, a contradicciones.

97. La crítica de Perelman.

La primera crítica ha sido formulada por Perelman [58]. Según éste, al construir su proposición indecidible, Gödel no ha hecho sino añadir una nueva antinomia a la lista de las ya conocidas, y esta antinomia resulta de una falsa equivalencia planteada en las premisas.

Perelman toma como punto de partida de su razonamiento el esquema de demostración que el mismo Gödel adopta y con el que encabeza su Memoria [59].

Sea el sistema *LFG* (anteriormente descrito). Se consideran las proposiciones de una variable libre, del tipo A (Θ). Como están constituidas de series finitas de signos en número finito, forman un conjunto numerable.

Por tanto, se puede hacerles corresponder números enteros, denominados sus índices. Sea $\mathfrak{A}_n\ (\mathfrak{X})$ la proposición (de una variable) de índice *n*. Entonces definimos una clase *Cl* de números enteros como sigue:

---

[58] Perelman 2.

[59] La exposición que de él da Perelman y que nosotros reproducimos no sigue exactamente el texto de Gödel, pero da sus líneas esenciales. Para una exposición más detallada, véase § 72.

Si n es el índice de la proposición $\mathfrak{A}_n(\mathfrak{X})$, n pertenece a la clase *Cl* si la proposición $\mathfrak{A}_n(N_n)$, obtenida por la sustitución de $\mathfrak{X}$ por N_n, no es derivable, y sólo en tal caso.

Sea q el índice de la proposición que representa el enunciado *X es un elemento de Cl*, y sea $\mathfrak{A}_q(\mathfrak{X})$ esta proposición.

$\mathfrak{A}_q(N_q)$ es una *proposición indecidible.*

Efectivamente, si es derivable, q pertenece a *Cl* y $\mathfrak{A}_q(N_q)$ es inderivable por definición de *Cl*, contrariamente a la hipótesis; y si su negación es derivable, q no pertenece a *Cl* y $\mathfrak{A}_q(N_q)$ es derivable, lo que es imposible si *LFG* es coherente.

PERELMAN parte de la definición de clase *Cl*, que se puede formular como sigue:

(1) $\quad n \in Cl \leftrightarrow \sim Dem\ \mathfrak{A}_n(N_n)$ [60].

(Decir que n pertenece a *Cl* equivale a decir que la proposición formada sustituyendo $\mathfrak{X}$ por N_n, en la n-ésima proposición de una variable de *LFG*, es inderivable.)

Por negación de los dos miembros de esta equivalencia se obtiene:

(2) $\quad \sim (n \in Cl) \leftrightarrow Dem\ \mathfrak{A}_n(N_n)$.

De la definición de *Cl* resulta que si, para un n dado, $\mathfrak{A}_n(N_n)$ es derivable, $\sim (n \in Cl)$ es igualmente derivable. (En efecto, basta para obtener una derivación de esta expresión, con completar la derivación de $\mathfrak{A}_n(N_n)$ por la definición de *Cl*). Lo que puede escribirse:

(3) $\quad Dem\ \mathfrak{A}_n(N_n) \rightarrow Dem \sim (n \in Cl)$.

PERELMAN muestra entonces cómo, sirviéndose de 3 (97), se puede obtener muy simplemente, respectivamente, a partir de 1 (97) y de 2 (97), los enunciados siguientes:

(4) $\quad Dem\ \ \mathfrak{A}_q(N_n) \leftrightarrow \sim Dem\ \ \mathfrak{A}_n(N_n)$

y

(5) $\quad Dem \sim \mathfrak{A}_q(N_n) \leftrightarrow \quad Dem\ \ \mathfrak{A}_n(N_n)$.

Son válidos cualquiera que sea n. Si se eligiese $n = q$, se obtiene

(6) $\quad Dem\ \ \mathfrak{A}_q(N_q) \leftrightarrow \sim Dem\ \ \mathfrak{A}_q(N_q)$

y

(7) $\quad Dem \sim \mathfrak{A}_q(N_q) \leftrightarrow \quad Dem\ \ \mathfrak{A}_q(N_q)$.

Aquí se ven aparecer las contradicciones: las equivalencias 6 (97) y 7 (97) muestran que la proposición de GÖDEL no sólo es indecidible sino que su derivabilidad es equivalente a su no-derivabilidad, y que su refutabilidad (derivabilidad de su negación) es equivalente a su derivabilidad.

PERELMAN deduce que la definición de *Cl* no es legítima: la raíz de la antinomia es la misma, según este autor, que en las paradojas clásicas.

[60] En las notaciones, esta formulación es casi idéntica a la de GÖDEL.

98. Discusión de esta crítica.

Como Kleene ha observado [61], estas críticas de Perelman pierden su efecto si se distingue estrictamente entre proposiciones pertenecientes al sistema *LFG* y los enunciados metateóricos referentes a este sistema.

En efecto, consideremos los enunciados 6 (97) y 7 (97) en los que se manifiestan las contradicciones.

La equivalencia 7 (97) no es una contradicción: sus dos miembros, en efecto, son ambos falsos (pues una equivalencia es cierta cuando sus dos miembros son ciertos o falsos conjuntamente). Esto es lo que resulta del carácter indecidible de $\mathfrak{A}_q$ (N_q). En cuanto al enunciado 6 (97), su demostración presenta ciertas dificultades.

La demostración de 7 (97) se apoya en 2 (97) y en 3 (97).

Para establecer 3 (97), Perelman expone que $\sim (n \in Cl)$ es derivable, para lo que implícitamente se apoya en 2 (97).

Pero 2 (97) es un enunciado metateórico que establece, sobre la base de la numeración de las proposiciones de *LFG*, una cierta relación entre la clase *Cl* y la derivabilidad de la proposición $\mathfrak{A}_n$ (N_n).

(Observemos que en este enunciado la expresión $\mathfrak{A}_n$ (N_n) es utilizada según el uso autónimo. Por tanto, no debe ser considerada, en este contexto, como una expresión de *LFG*, sino como un número perteneciente a la metateoría de *LFG* que sirve para designar una determinada expresión de *LFG*. Se podría evitar toda ambigüedad utilizando una notación especial o recurriendo a una *correspondencia de* Gödel, lo que no hace Perelman.)

Para poder afirmar 3 (97) se debería establecer que el enunciado *n no pertenece a Cl* es representable en *LFG* por una proposición derivable (en *LFG*). El enunciado 2 (97) no basta para garantizar este hecho.

Para establecer 3 (97), Perelman se basa solamente en el sentido intuitivo de la definición de *Cl*, sin indicar cómo se puede efectivamente construir la proposición en cuestión y cómo se puede efectivamente obtener de ella una derivación en *LFG*. Sin embargo, se puede completar su demostración para justificar rigurosamente el enunciado 3 (97).

El enunciado *n no pertenece a Cl* es de la forma. *Existe un n dotado de una cierta propiedad recursivamente representable*, o también: $(E\ X)\ (F\ X = 0)$, donde F es una función recursiva.

Si tenemos un enunciado aritmético cierto de la forma $(E\ X)\ (F\ X = 0)$, donde F es una función recursiva, se puede realizar una demostración de este enunciado de la manera siguiente:

[61] Kleene 6. Se encontrarán observaciones análogas a las de Kleene en Grelling 3 y 4.

Se toma para X un valor conveniente r,

se verifica mediante cálculo, a partir del esquema de definición de la función F, que $F\,r = 0$,

y se pasa al enunciado $(E\,X)\,(F\,X = 0)$ por medio de operaciones de la lógica de predicados de primer orden [62].

Todas estas operaciones son representables en *LFG* [63].

Por consiguiente, es posible obtener una derivación en *LFG*, de una proposición correspondiente al enunciado metateórico $\sim (N \in Cl)$, y 3 (97) queda justificado.

Pero no ocurre lo mismo con el enunciado 6 (96). Este proviene de 4 (97). PERELMAN indica simplemente que se puede obtener 4 (97) a partir de 1 (97) siguiendo una marcha análoga a la que permite obtener 5 (97) partiendo de 2 (97).

En la demostración de 4 (97) se encuentra, en efecto, una dificultad análoga a la que surge para la demostración de 3 (97), pero esta vez interviene un cuantificador de universalización.

Se debe considerar un enunciado aritmético del tipo *Cualquiera que sea el número n, éste verifica una cierta propiedad representable recursivamente.* Tal enunciado puede representarse en la forma:

$(X)\,(F\,X = 0)$, donde F es una función recursiva.

Para obtener una demostración de 4 (97) sería preciso establecer la propiedad siguiente: si el enunciado $(X)\,(F\,X = 0)$ es cierto [64] existe en *LFG* una proposición que le representa y que es derivable.

Ahora bien, la verdad de este enunciado no asegura en absoluto la existencia de un procedimiento que permita establecer esta propiedad. GÖDEL ha demostrado precisamente que no existe tal procedimiento si *LFG* es ω-coherente.

99. La crítica de Helmer a Perelman.

HELMER, por su parte, ha reprochado a PERELMAN que no establece una distinción suficiente entre expresiones del sistema *LFG* y números-G coordenados a estas expresiones [65].

KLEENE, volviendo sobre la crítica de HELMER, señala su insuficiencia [66]. No es suficiente con distinguir, como hace HELMER, *proposiciones matemáticas formales* (expresiones del sistema *LFG*) y *números sintácticos de proposiciones matemáticas*

[62] Basta con utilizar el esquema de axiomas número 10 del § 6 y la regla de la consecuencia (regla número 1 del mismo § 6).

[63] En particular, la última etapa puede realizarse mediante el esquema 3.1 del § 79 (primer esquema de axiomas para el cuantificador de universalización).

[64] Sobre el sentido de esta expresión, véase § 71.

[65] HELMER 1.

[66] KLEENE 7.

formales (números-G de las expresiones de *LFG*). También hay que distinguir *proposiciones matemáticas formales* y *enunciados metamatemáticos.*

La aritmetización del sistema *LFG* (por medio de la *correspondencia de* GÖDEL) es solamente un medio que permite expresar en forma aritmética los enunciados metateóricos relativos a *LFG*. Es esta formulación aritmética de la metateoría de *LFG* el pivote de la formalización de la metateoría de *LFG* en el sistema *LFG.*

100. La crítica de Barzin. Principio de esta crítica.

BARZIN ha opuesto a la demostración de GÖDEL otra crítica, consistente en apreciar una contradicción, pero siguiendo un camino diferente del de PERELMAN [67].

La ventaja de su crítica, respecto a la de PERELMAN, es que se centra directamente sobre la demostración formalizada de GÖDEL, mientras que la de PERELMAN se refería solamente al esquema no formalizado de demostración con que GÖDEL encabezaba su Memoria.

La crítica de BARZIN se refiere al mecanismo mismo de la demostración de GÖDEL.

En efecto, consiste en destacar que el carácter circular de la proposición construida por GÖDEL descansa, en definitiva, sobre la introducción larvada de una contradicción. En este aspecto, la crítica se confunde con la de PERELMAN, que liga la proposición de GÖDEL a las antinomias clásicas y, destacando, por otra parte, que el origen de todas las antinomias reside en una falsa equivalencia. De esta equivalencia precisamente parte la crítica de BARZIN.

Su método no consiste en efectuar, a partir de la proposición de GÖDEL, una derivación que llevaría a una proposición contradictoria, sino a construir por aproximaciones sucesivas, partiendo de una equivalencia falsa, los dos enunciados que están en el centro de la demostración de GÖDEL.

BARZIN construye de esta forma una cadena de enunciados todos contradictorios. Cada nuevo enunciado introduce elementos que no formaban parte del enunciado precedente. Por consiguiente, no puede deducirse de él, pero se hace patente que la adjunción de estos elementos deja subsistir la contradicción.

Los enunciados sobre los que se centra la crítica de BARZIN son los siguientes [68]:

(1) $\sim Fdr\ s\ (Sbs\ a\ a) \rightarrow Dem\ [Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd\ (N_s)\ Ngd\ (N_a)]$

y

(2) $Fdr\ s\ (Sbs\ a\ a) \rightarrow Dem\ [Neg\ Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd\ (N_s)\ Ngd\ (N_a)]$.

---

[67] BARZIN 1.

[68] Estos son los enunciados 1 (93) y 2 (93). Por lo que respecta a las notaciones, estos enunciados son los que figuran en la Memoria de GÖDEL bajo los números 9 y 10. BARZIN los cita en su forma original. Para no multiplicar inútilmente las notaciones, presentaremos el razonamiento de BARZIN mediante las notaciones que han sido utilizadas anteriormente y no las utilizadas por BARZIN.

Estos enunciados son enunciados aritméticos que establecen relaciones, no entre elementos del sistema *LFG*, sino entre números-G asociados a elementos de *LFG*.

Para desarrollar más claramente su argumentación, BARZIN modifica estos enunciados de manera que aparezcan directamente los elementos del sistema *LFG* a los cuales se relacionan. Reemplaza los números-G que figuran en estos enunciados por números que designan los elementos de *LFG* correspondientes a estos números-G. En el caso de las proposiciones de *LFG* recurre al uso de la autonimia. Naturalmente, siempre es posible pasar de esta formulación a la formulación inicial, introduciendo de nuevo los números-G.

Sea A (Θ) una proposición de una variable libre, *a* su número-G y sea *Sp* una serie de proposiciones y *s* el número-G de *Sp* [69].

Sea *P** el predicado (biargumental) que expresa que *Sp* no es una derivación de la proposición cerrada reemplazando Θ por *a* en A (Θ).

Por tanto, *P** está definido por:

$$P^* \; Sp \; \text{A} \; (\Theta) \equiv \sim Fdr \; Sp \; \text{A} \; (a)\,[70].$$

Establecidas estas convenciones, los enunciados 1 (100) y 2 (100) se convierten:

(3) $\sim Fdr \; Sp \; \text{A} \; (a) \rightarrow Dem \; [P^* \; s \; a]$

y

(4) $Fdr \; Sp \; \text{A} \; (a) \rightarrow Dem \; [\sim P^* \; s \; a]$.

En estos enunciados, $[P^* \; s \; a]$ es la expresión que se obtiene reemplazando, en $[P^* \; Sp \; \text{A} \; (\Theta)]$, *Sp* y A ($\Theta$) por sus números-G [71].

---

[69] Utilizaremos aquí, para designar la proposición A (Θ), variables sintácticas, puesto que se trata de una proposición cualquiera.

[70] En esta definición, el predicado *Fdr* ya no se considera como un predicado aritmético, sino como un predicado metateórico cuyos argumentos son nombres para elementos determinados de *LFG*.

$[\sim Fdr \; Sp \; \text{A} \; (\Theta)]$ significa:

la serie de proposiciones *Sp* no es una derivación de la proposición A (Θ).

[71] El segundo número de 3 (100) afirma que la expresión $(P^* \; s \; a)$ es derivable, y el segundo miembro de 4 (100) afirma que la expresión $(\sim P^* \; s \; a)$ es derivable. En realidad, estas expresiones son enunciados aritméticos y, por consiguiente, no pertenecen a *LFG*. No se puede decir, por tanto, que son *derivables*.

La expresión *Dem* $[P^* \; s \; a]$ debe entenderse en el siguiente sentido: la proposición de *LFG* que corresponde a $(P^* \; s \; a)$ es derivable.

La expresión *Dem* $[\sim P^* \; s \; a]$ debe recibir una interpretación análoga.

Los enunciados 1 (100) y 2 (100) también están formulados correctamente, pues el predicado *Dem* se aplica al número-G de una cierta proposición de *LFG*.

La notación utilizada por BARZIN no permite distinguir el predicado metateórico *P** de la expresión que le representa en *LFG*.

101. La crítica de Barzin. Detalle de la argumentación.

Veamos ahora la serie de etapas propuesta por Barzin.

1. Se parte de una expresión del tipo

(1) $$(X)\ [\sim R\ X\ X \leftrightarrow R\ X\ \alpha].$$

(Cualquiera que sea X, es decir, que X no cumple la relación R consigo mismo, equivale a decir que X cumple la relación R con un cierto individuo α.)

Esta fórmula lleva evidentemente a una contradicción. Basta, en efecto, aplicar el esquema de axiomas para el cuantificador de universalización de la lógica de predicados del primer orden [72] para obtener:

$$\sim R\ \alpha\ \alpha \leftrightarrow R\ \alpha\ \alpha.$$

Es precisamente esta contradicción la que Perelman cree poder descubrir en la base de todas las paradojas.

Lo que importa considerar es la estructura de la equivalencia 1 (101): un individuo α está ligado a X por una relación reflexiva, uno de los miembros de la equivalencia es afirmativo y otro negativo.

2. Ahora se puede considerar la expresión:

(2) $$(\varphi)\ [\sim \varphi\ (\varphi\ X) \leftrightarrow F\ (\varphi\ X)],$$

donde φ es una variable funcional y F una cierta función.

Esta es la fórmula que Perelman ha propuesto para tratar de explicar el mecanismo de formación de las paradojas [73].

Como antes, se va a parar a una contradicción al reemplazar φ por F:

$$\sim F\ (F\ X) \leftrightarrow F\ (F\ X).$$

Se observa que 2 (101) posee la misma estructura que 1 (101). La relación reflexiva está aquí disimulada; esta es la relación *ser argumento de* [74].

3. Consideremos la expresión:

(3) $$(\Phi)\ [\sim\ \Phi\ Ngd\ (\Phi) \leftrightarrow Q\ Ngd\ (\Phi)],$$

donde Φ es una variable predicativa y Q un cierto predicado.

(Cualquiera que sea el predicado Φ, si el número-G de Φ no satisface a Φ, satisface un cierto predicado Q, y recíprocamente.)

---

[72] Véase esquema número 9 del § 6.

[73] Perelman 1, 3 y 4.
Véase a este propósito Beth 1 y Grelling 1.

[74] Se da para argumento de F el valor que toma esta misma función para el argumento X.

Si se reemplaza Φ por Q se obtiene una contradicción. La expresión 3 (101) tiene la misma estructura que 2 (101). La relación reflexiva es aquí *ser satisfecho por el número-G de.*

4. Introduzcamos el predicado *Dem* (*derivable*), y formemos la expresión

(4) $(\Phi)\,[\sim Dem\ (\Phi)\ Ngd\ (\Phi) \leftrightarrow Dem\ (Q\ Ngd\ (\Phi)]$.

La introducción de *Dem* no cambia nada del carácter contradictorio de la fórmula.

5. Designemos por *Sp* una sucesión de proposiciones de *LFG*; sea *s* su número-G. Consideremos la expresión:

(5) $(\Phi)\,[(Sp) \sim Fdr\ Sp\ (\Phi)\ Ngd\ (\Phi) \leftrightarrow (s)\ Dem\ [P^*\ s\ Ngd\ (\Phi)]]$.

(Decir que no existe ninguna derivación para la expresión Φ *Ngd* (Φ) equivale a decir que se puede derivar [P^* *s Ngd* (Φ)] para todos los valores de *s*.)[75]

Tenemos siempre una expresión de la misma estructura, pero aquí el predicado Q de 4 (101) se convierte en un predicado P^* de dos argumentos y la relación reflexiva se transforma en la siguiente: *se demuestra en LFG, mediante la serie de proposiciones Sp, que Ngd* (Φ) *satisface al predicado* Φ.

6. Se puede reducir el alcance de la expresión precedente adoptando como primer miembro de la equivalencia no ya *no existe ninguna derivación para la expresión* (Φ *Ngd* (Φ)), sino simplemente *una cierta serie Sp no es una derivación de* (Φ *Ngd* (Φ)), y suprimiendo su cuantificador del segundo miembro. Entonces se obtiene:

(6) $(\Phi)\,[\sim Fdr\ Sp\ [\Phi\ Ngd\ (\Phi)] \leftrightarrow Dem\ [P^*\ s\ Ngd\ (\Phi)]]$.

Siempre es posible hacer aparecer una contradicción partiendo de estas expresiones, pues su estructura es la misma que la de las precedentes.

Φ Es una variable predicativa de un argumento.

P^* es un predicado de dos argumentos. P^* *s* puede, pues, ser considerado como un predicado de un argumento.

Sea *p* el número-G de P^*.

Se puede reemplazar (Φ *Ngd* (Φ)) por (P^* *s p*)[76].

---

[75] En esta expresión se utilizan dos cuantificadores que no tienen un sentido regular por referirse no a variables, sino a constantes: (*Sp*) y (*s*). En realidad, estos cuantificadores deben ser considerados como simples abreviaciones de escritura. La expresión (5) debe leerse: cualquiera que sea la serie *Sp*, esta serie no constituye una derivación de (Φ *Ngd* (Φ)) equivale a decir que, cualquiera que sea *s*, la expresión [P^* *s Ngd* (Φ)] es derivable.

[76] En este punto debemos hacer una observación análoga a la de la nota 71.

P^* es un predicado metateórico y no una expresión de *LFG*. Si se toman las cosas en sentido estricto, *p* no es el número-G de P^*, sino el número-G de la expresión de *LFG* que corresponde a P^*, y la expresión (P^* *s p*) debería ser reemplazada por una notación que designase la expresión de *LFG*, que se obtiene sustituyendo en la expresión que corresponde a (P^* *s X*), la variable por el símbolo de *LFG* que representa a *p*.

Entonces se obtiene:

(6*) $\sim Fdr\ Sp\ (P^*\ s\ p) \leftrightarrow Dem\ [P^*\ s\ p]$.

(Decir que la serie *Sp* no es una derivación de $(P^*\ s\ p)$ equivale a decir que esta expresión es derivable; en otros términos, que existe una serie de proposiciones que constituyen su derivación.)

Por negación de los dos miembros de 6* (101) se obtiene:

(6**) $Fdr\ Sp\ (P^*\ s\ p) \leftrightarrow \sim Dem\ [P^*\ s\ p]$.

(Decir que la serie *Sp* es una derivación de $(P^*\ s\ p)$, es decir que esta expresión no es derivable. En otros términos que no existe ninguna serie de proposiciones que constituya su derivación.)

El enunciado 6** (101) tiene, por supuesto, la forma de una contradicción.

Así, 6 (101) nos lleva a una contradicción. Según BARZIN, esta contradicción se cumple en la forma del enunciado 6 (101), forma que aparece de manera absolutamente explícita en la expresión 1 (101).

7. La expresión 6 (101) nos permite obtener inmediatamente, reemplazando Φ por la expresión predicativa A de un argumento, de la cual es *a* el número-G:

(7) $\sim Fdr\ Sp\ \mathrm{A}\ (a) \leftrightarrow Dem\ [P^*\ s\ a]$.

Esta equivalencia se descompone en dos implicaciones:

$\sim Fdr\ Sp\ \mathrm{A}\ (a) \rightarrow Dem\ [P^*\ s\ a]$

y $Dem\ [P^*\ s\ a] \rightarrow \sim Fdr\ Sp\ \mathrm{A}\ (a)$.

Podemos negar los dos miembros de la segunda implicación, a condición de invertirla.

Entonces obtenemos:

(7*) $\sim Fdr\ Sp\ \mathrm{A}\ (a) \rightarrow Dem\ [P^*\ s\ a]$

y

(7**) $Fdr\ Sp\ \mathrm{A}\ (a) \rightarrow \sim Dem\ [P^*\ s\ a]$.

Por otra parte, se puede escribir:

(8) $Dem\ [\sim P^*\ s\ a] \rightarrow \sim Dem\ [P^*\ s\ a]$.

En efecto, si $(P^*\ s\ a)$ no es derivable, no es cierto que $(\sim P^*\ s\ a)$ lo sea; pero si $(\sim P^*\ s\ a)$ es derivable, es cierto que $(P^*\ s\ a)$ no lo es (en caso contrario, *LFG* sería no-coherente).

La expresión 7*(101) es idéntica a la 3(100).

La expresión 7**(101) difiere de 4(100) por la situación de la negación en el segundo miembro. Pero, en virtud de (8), se ve que 4(100) comporta 7**(101).

Es así que la conjunción de 7*(101) y de 7**(101) es una equivalencia contradictoria, puesto que proviene de la equivalencia 6(101), que también es contradictoria.

Por consiguiente, las expresiones 3(100) y 4(100) comportan una contradicción y son en sí mismas contradictorias.

8. Quedan por hacer dos observaciones para concluir en los mismos enunciados de GÖDEL.

Ante todo, los enunciados de GÖDEL solamente están integrados por funciones y predicados recursivos. Pero los enunciados establecidos anteriormente para predicados cualesquiera valen evidentemente para predicados recursivos.

Por otra parte, los enunciados de GÖDEL son puramente numéricos: se refieren a los números-G correspondientes a los elementos de *LFG*.

Nada nos impide, una vez que hemos obtenido los enunciados 3(100) y 4(100) como se ha indicado, extender nuestras conclusiones a los enunciados gödelianos.

En efecto, basándonos en la aritmetización del sistema *LFG* podemos expresar en forma aritmética las relaciones entre elementos de *LFG* que figuran en nuestros enunciados.

Si los enunciados 3(100) y 4(100) se cumplen respecto a los elementos *Sp*, A y *P**, los enunciados aritméticos correspondientes son ciertos respecto a los números-G correspondientes a estos elementos y recíprocamente. Estos enunciados aritméticos son los enunciados de GÖDEL. Como los enunciados 3(100) y 4(100) son contradictorios, los enunciados de GÖDEL también lo son.

102. CONCLUSIONES DE BARZIN Y OBSERVACIÓN DE FITCH.

El razonamiento de BARZIN puede resumirse como sigue:

Los enunciados 1(100) y 2(100) en torno a los cuales gravita la demostración de GÖDEL envuelven una contradicción, a causa de su estructura interna. Esta estructura es la de una equivalencia, un miembro de la cual es la negación del otro y en la que figura una relación reflexiva. Esta estructura no aparece directamente en los enunciados tales como se presentan, pero se puede demostrar que estos enunciados implican, por una serie de concatenaciones, una expresión, que se reduce esencialmente a esta estructura y que enuncia una contradicción: se trata de la expresión 1(101).

Tampoco se puede admitir que GÖDEL haya establecido efectivamente la existencia de *proposiciones indecidibles*. Sin embargo, su trabajo tiene un sentido positivo: mostrarnos que la precaución adoptada por GÖDEL de no emplear más que funciones recursivas, es insuficiente. Combinando tales funciones por medios aparentemente inofensivos se puede concluir en una expresión paradójica.

De aquí la conclusión: "Esto enseña que la filosofía de las matemáticas tiene necesidad no sólo de hacerse más clara mediante la aritmetización, sino que es preciso que recurra también a criterios específicamente lógicos que la ciencia de los números es impotente de proporcionar por sí misma" [77].

[77] BARZIN 1, pág. 239.

Basándose en el análisis de la contradicción que se encuentra, según este autor, en la base de la demostración de GÖDEL y que, según PERELMAN, es el origen de todas las paradojas conocidas, BARZIN propone reemplazar las limitaciones de la *Teoría de Tipos* por condiciones menos restrictivas. Su planteamiento es el siguiente:

La Teoría de Tipos, construida para evitar las paradojas, va demasiado lejos, en el sentido de que descarta procedimientos perfectamente legítimos y al mismo tiempo es demasiado estrecha, pues deja subsistir ciertas dificultades conexas a las que pretende resolver, como lo patentiza el análisis de la demostración de GÖDEL.

Si el origen de las paradojas se encuentra en la estructura que revela este análisis, basta con descartar las proposiciones que presentan una estructura semejante para eliminar todas las dificultades de este orden.

Esta limitación no alcanza, evidentemente, su pleno significado hasta la expresión 2(101) en que la relación reflexiva tiene por argumento una función [78]. Tal eliminación parece más indicada que la de la Teoría de Tipos, puesto que no suprime procedimientos legítimos prohibidos por este último, eliminando, sin embargo, las dificultades manifestadas por el Teorema de GÖDEL.

FITCH ha manifestado que tal limitación, aunque se presente como menos restrictiva que la de la Teoría de Tipos, no es menos excesiva [79]. En efecto, destruiría la Teoría de Funciones Recursivas, cuya validez no puede ponerse en duda.

Por supuesto, arruinaría también la demostración de GÖDEL, de cuya legitimidad nada nos autoriza a dudar. La Teoría de Tipos descarta las paradojas de la Teoría de Conjuntos, pero no elimina toda posibilidad de razonamiento circular.

Un razonamiento circular no conduce necesariamente a una contradicción. GÖDEL nos enseña precisamente cómo se puede manipular un razonamiento circular sin ir a parar a una contradicción. Esto lo consigue mediante la distinción rigurosa que establece entre sistema *LFG* y metateoría... GÖDEL demuestra que la proposición indecidible $\mathfrak{G}^*$ pertenece *efectivamente* al sistema *LFG*, y demuestra *efectivamente* que tal proposición es indecidible.

103. DISCUSIÓN DE LA CRÍTICA DE BARZIN.

Sólo en un sentido muy especial puede decirse que la proposición $\mathfrak{G}^*$ posee un carácter circular.

El lema de GÖDEL hace corresponder proposiciones de *LFG* a los enunciados metateóricos que son expresables por medio de relaciones recursivas.

Esta correspondencia puede ser utilizada en los dos sentidos: permite representar en *LFG* ciertos enunciados metateóricos (a causa del sesgo de la aritmetización) y permite atribuir a ciertas proposiciones de *LFG* una significación metateórica. Es así como se puede atribuir a la proposición $\mathfrak{G}^*$ una significación metateórica haciéndole

[78] Se trata, en efecto, de la relación *ser el argumento de una cierta función.*

[79] FITCH 5.

corresponder el enunciado aritmético que ella representa. Este enunciado expresa la no-derivabilidad de $\mathfrak{V}^*$.

Sólo refiriéndose a esta correspondencia puede decirse que la proposición afirma su propia inderivabilidad.

El instrumento utilizado para dar a $\mathfrak{V}^*$ su carácter circular (en el sentido que acaba de ser explicado) es la función *Sbs*. GÖDEL demuestra que esta función es recursiva y, por tanto, representable en *LFG*.

Los enunciados 1(93) y 2(93) indican cómo se hace esta representación y fundamentan la construcción de $\mathfrak{V}^*$.

Sobre estos enunciados se centra precisamente la crítica de BARZIN. Según este autor, estos enunciados son contradictorios porque de ellos se puede deducir una equivalencia que tiene la misma estructura que la equivalencia contradictoria 6(101).

Para mostrar que 6(101) es contradictoria, BARZIN reemplaza Φ por $(P^*\ s)$, y $Ngd\ (\Phi)$ por p.

Examinemos las condiciones de esta sustitución.

$Ngd\ (\Phi)$ es el número-G de $\Phi\ X$, p es, pues, el número-G de $(P^*\ s\ X)$ [80].

Y $(P^*\ s\ p)$ significa: la serie Sp no es una derivación de la proposición obtenida reemplazando, en la proposición $Ngd^{-1}(p)$, la primera variable libre por N_p.

Dicho de otra forma, $(P^*\ s\ p)$ significa: la serie Sp no es una derivación de $(P^*\ s\ p)$.

Si aplicamos esta sustitución a 7*(101), tenemos:

$$\sim Fdr\ Sp\ (P^*\ s\ p) \leftrightarrow Dem\ [P^*\ s\ p].$$

Equivalencia que no es contradictoria.

Efectivamente, significa: si la serie Sp no es una derivación de $(P^*\ s\ p)$, $(P^*\ s\ p)$ (proposición cerrada de *LFG* que representa este hecho) es derivable, y recíprocamente.

En otros términos: decir que la expresión $(P^*\ s\ p)$ es derivable, equivale a decir que Sp no constituye una derivación de ésta.

Si esta equivalencia no es contradictoria, los enunciados 3(100) y 4(100) tampoco lo son.

Examinemos, por otra parte, directamente, cómo se transforman estos enunciados en el caso de la proposición $\mathfrak{V}^*$. (BARZIN ha construido su argumentación en función de la estructura de esta proposición.)

Reemplazando a por q en 1(100) y 2(100), tenemos:

$$\sim Fdr\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\ [Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd\ (N_s)\ Ngd\ (N_q)]$$

y

$$Fdr\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\ [Neg\ Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd\ (N_s)\ Ngd\ (N_q)].$$

Recordemos que $Sbs\ q\ q = i$.

---

[80] Recordemos que $(P^*\ s\ X)$ y $(P^*\ s\ p)$ deben ser considerados como nombres que designan expresiones de *LFG*.

Si, como hace BARZIN, reemplazamos los números-G que figuran en estos enunciados por las expresiones que les corresponden (tomadas según el uso autonímico), obtenemos:

$$\sim Fdr\ Sp\ \mathfrak{F}^* \rightarrow Dem\ [\ \mathfrak{P}\ (N_s, N_q)]$$

y

$$Fdr\ Sp\ \mathfrak{F}^* \rightarrow Dem\ [\sim \mathfrak{P}\ (N_s, N_q)].$$

Utilizando el mismo razonamiento que en el número 7 del § 101 obtenemos, a partir de estos dos enunciados, la equivalencia:

$$\sim Fdr\ Sp\ \mathfrak{F}^* \leftrightarrow Dem\ [\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)],$$

o también, escribiendo $\mathfrak{F}^*$ en forma explícita:

$$\sim Fdr\ Sp\ [(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{X}_1, N_q)] \leftrightarrow Dem\ [\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)].$$

Este enunciado significa: decir que la serie *Sp* no es una derivación de $\mathfrak{F}^*$, equivale a afirmar que se puede derivar en *LFG* la proposición cerrada que representa este hecho.

(La proposición cerrada $\mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$ representa, en efecto, el enunciado $\sim Fdr\ s\ (Sbs\ q\ q)$.)

Esta equivalencia no es contradictoria.

Como $\mathfrak{F}^*$ es indecidible, el primer miembro de esta equivalencia es cierto cualquiera que sea *Sp*. Por consiguiente, cualquiera que sea *s*, la proposición cerrada (N_s, N_q) es derivable en *LFG* (esto es lo que ha quedado establecido en el § 96, 2).

Por tanto, no se puede concluir que $\mathfrak{F}^*$ sea derivable.

Para ello será preciso disponer de una regla de derivación suplementaria del tipo:

Si A (Θ) es una proposición de una derivable individual libre, y si todas las proposiciones cerradas A (κ) son derivables, la proposición cerrada (Θ) A (Θ) es igualmente derivable [81].

Si el sistema lleva una regla de este tipo, los predicados *Fdr* y *Dem* deben, como es evidente, ser modificados en consecuencia.

Se podría llegar a una contradicción si se tuviese exactamente la misma estructura que en 5(101). Pero en 6(101), el cuantificador (*Sp*) ha desaparecido: el predicado que figura en el primer miembro ya no es el mismo que en el segundo. En 5(101) el predicado del primer miembro significaba: *no existe ninguna derivación de ....*

En 6(101) significa: *una cierta serie no es una derivación de ....*

104. La crítica de Kuczynski.

KUCZYNSKI señala que el resultado de GÖDEL sólo se establece en una metateoría aritmetizada [82]. Pero este resultado aritmético no es interesante en sí mismo. El

[81] En el capítulo siguiente tendremos que considerar reglas de este género.

[82] KUCZYNSKI 1.

carácter indecidible de la proposición de GÖDEL sólo puede quedar establecido si se le hace corresponder a un enunciado metateórico.

Para representar de manera rigurosa esta correspondencia, KUCZYNSKI construye una interpretación del sistema *LFG* en un sistema formal *Meta I* que corresponde a una metateoría de la Aritmética, y cree llegar a una contradicción. Así, el resultado de GÖDEL, según KUCZYNSKI, sería una antinomia —no en el plano de la Aritmética, sino en el de la interpretación en el sistema *Meta I.*

MOSTOWSKI [83] hace observar que esta crítica no es válida, pues se centra sobre el enunciado: *No existe derivación de la proposición* $\mathfrak{V}^*$ *en LFG.*

Pero el enunciado en cuestión, en la demostración de GÖDEL, es, en realidad, el siguiente: *Si el sistema LFG es coherente, no existe derivación de* $\mathfrak{V}^*$ *en LFG.* Si se hace esta corrección en la interpretación de KUCZYNSKI, no se obtiene entonces una contradicción, sino simplemente el resultado siguiente: el anunciado *LFG es coherente,* no es derivable en *Meta I,* con tal de que *Meta I* sea coherente.

Se trata entonces de un resultado que en nada contradice el de GÖDEL, sino que, al contrario, constituye un corolario (como se verá más adelante) [84].

Además, hay que observar que *Meta I* puede recibir una interpretación en la Aritmética (intuitiva): *Meta I* no puede ser no-coherente, si la Aritmética es coherente.

105. OBSERVACIÓN DE CHURCH.

Las diferentes críticas opuestas a la demostración de GÖDEL no pueden justificar un rechazo de su teorema. Pero ellas dan la ocasión de poner de relieve el alcance de ciertas distinciones y de aclarar la naturaleza de las condiciones que pueden hacer legítimo un razonamiento circular.

Si GÖDEL ha conseguido establecer su teorema, se ha debido a poder construir una proposición que puede representar un enunciado de forma circular sin que lleve a una contradicción.

Pero una construcción de este género sólo es posible en la medida en que una parte suficiente de la metateoría del sistema utilizado es formalizable en el sistema mismo. Indudablemente, hay límites en las posibilidades de formalización de la metateoría de un sistema en el sistema mismo, pero el razonamiento de GÖDEL sólo utiliza ciertos conceptos y operaciones metateóricas; basta con que estos conceptos y operaciones sean representables en el sistema utilizado.

CHURCH ha hecho a este respecto una observación muy lúcida en un comentario consagrado a un estudio de FINDLAY [85]. En este estudio, FINDLAY da una exposición

[83] MOSTOWSKI 1.
[84] Véase CAPITULO V.
[85] CHURCH 13.

no-técnica del teorema de GÖDEL y construye un enunciado circular que corresponde a la proposición indecidible de GÖDEL [86].

CHURCH hace observar que si en este enunciado se sustituye el predicado *no-cierto* por el predicado *no-demostrable* [87], se obtiene un enunciado que se parece a la paradoja de EPIMÉNIDES, y que, por tanto, es inaceptable.

Como ha indicado CHURCH, este fenómeno obedece a que un sistema puede muy bien no contener una formalización de su semántica y contener, en cambio, una formalización de parte, al menos, de su sintaxis.

El sistema *LFG*, utilizado por GÖDEL, es tal, por hipótesis, que la Aritmética recursiva es formalizable en él. Por consiguiente, contiene una formalización de esta parte de su sintaxis que se puede formular mediante la Aritmétima recursiva, lo que es suficiente para las necesidades de la demostración de GÖDEL.

[86] FINDLAY 1. Véase NOTA II, § 246.

[87] Este predicado corresponde, en la exposición de FINDLAY, al predicado *inderivable* del presente capítulo.

CAPÍTULO IV

Las generalizaciones directas del Teorema de Gödel

106. INTRODUCCIÓN.

El teorema de GÖDEL ha dado lugar a un cierto número de generalizaciones: unas son *generalizaciones directas* (en el sentido de que conciernen directamente a las hipótesis, permitiendo atenuarlas), otras están basadas en métodos diferentes y establecen una conexión entre el resultado de GÖDEL y otros hechos de limitación.

En este capítulo consideraremos solamente las *generalizaciones directas.* Incluiremos también en este capítulo la exposición de un procedimiento debido a KALMÁR que permite obtener, de manera muy sencilla, *proposiciones indecidibles.*

SECCIÓN 1.—GENERALIDAD DE LAS HIPOTESIS.

107. HIPÓTESIS FUNDAMENTALES DEL TEOREMA DE GÖDEL.

El teorema establecido por GÖDEL para el sistema *LFG* es aplicable, en realidad, a un gran número de sistemas. Las condiciones a las que debe responder un sistema formal *LF* para que la demostración de GÖDEL pueda aplicársele son, en efecto, de naturaleza extremadamente general.

Estas condiciones son tres:

1. El sistema *LF* considerado debe ser *ω-coherente.*

2. Su estructura debe ser de naturaleza tal que su sintaxis pueda expresarse mediante la *Aritmética recursiva.*

3. Debe ser suficientemente *capaz* [1].

[1] Sobre el sentido de este término, véase § 45.

(Esta tercera condición debe hacer posible la formalización de la Aritmética recursiva en *LF*.)

La condición 2 se reduce a lo siguiente:

Es posible hacer corresponder de manera biunívoca a los elementos del sistema (componentes primitivas, diversos tipos de expresiones, series de proposiciones) números enteros, de tal suerte que la noción de *derivabilidad* sea representable recursivamente.

Esto significa:

1.° Que la propiedad, para una proposición, de ser un *axioma*, debe ser representable recursivamente.

2.° Que la propiedad, para una proposición, de ser *consecuencia inmediata* (de una o varias proposiciones) debe ser representable recursivamente.

La condición 3 se reduce a lo siguiente:

El sistema debe incluir *operadores proposicionales* que corresponden a ciertas operaciones lógicas fundamentales y debe comportar una formalización de la Aritmética recursiva.

108. Análisis de la tercera hipótesis.

La condición 3 del parágrafo precedente puede hacerse explícita mediante las cuatro condiciones siguientes:

1. El sistema *LF* debe llevar un *operador de negación*, $\sim$, provisto de la interpretación siguiente: si A es una proposición del sistema que corresponde a un enunciado *A*, entonces $\sim$ A es una proposición que corresponde al enunciado *no-A*.

Esta interpretación, por tanto, hace corresponder el *operador proposicional* a la *operación lógica* de negación.

2. El sistema *LF* debe llevar un *operador de implicación*, $\rightarrow$, y un esquema de derivación que corresponda a la *regla de consecuencia*.

El sistema puede llevar, a título de componente primitiva, en lugar de un operador de implicación, un operador de disyunción, V, pues es posible, en tal caso, introducir el operador de implicación $\rightarrow$ por vía de definición[2].

Este operador se debe interpretar de la siguiente forma: si A y B son proposiciones del sistema que corresponden a los enunciados intuitivos A y B, entonces la proposición (A $\rightarrow$ B) corresponde al enunciado intuitivo: *si A, entonces B*.

Este enunciado puede ser considerado como indicativo de una deducción posible: autoriza a plantear *B* bajo la hipótesis *A*. Dicho de otra forma: si este enunciado es cierto y si, por supuesto, *A* es cierto, *B* es igualmente cierto.

[2] Véase § 78, número 5.

El sistema *LF* debe llevar un esquema de derivación correspondiente a una deducción de este género. Este esquema debe ser tal que, si las proposiciones $(A \rightarrow B)$ y A son ambas derivables, la proposición B sea igualmente derivable.

La regla de consecuencia responde a esta condición, puesto que se presenta como sigue:

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

Esta regla precisa el papel que desempeña el operador $\rightarrow$ en relación a la noción de *derivabilidad.*

Su construcción es tal que la correspondencia entre el operador $\rightarrow$ y la operación lógica *si ... entonces* es completa. (En el sentido de que, si un enunciado *B* puede ser deducido de un enunciado *A* por medio del enunciado *Si A, entonces B,* la proposición B puede ser derivada de la proposición A por medio de la proposición $(A \rightarrow B)$. El *operador de implicación,* que es un operador de sistema, no debe, naturalmente, por tanto, ser confundido con la noción de *derivabilidad,* que es una noción sintáctica.

3. El sistema *LF* debe llevar un *cuantificador de universalización,* (Θ), cuya interpretación es la siguiente: Si $A(\Theta)$ es una expresión predicativa del sistema que corresponde al enunciado *P X* (*X posee la propiedad P*), la proposición $(\Theta)A(\Theta)$ corresponde al enunciado: *P se cumple en todos los individuos* (*del universo considerado*) [3].

4. El sistema *LF* debe incluir una formalización de la *Aritmética recursiva.* Esta condición puede descomponerse, a su vez, en tres condiciones parciales:

a) El sistema *LF* debe estar dotado de expresiones que representen (sin ambigüedad) los *números enteros.*

b) El sistema *LF* debe estar dotado de símbolos denominados *variables,* símbolos que tengan estas variables por argumentos, y una operación de sustitución que permita reemplazar estas variables por expresiones representativas de los números enteros. Esta operación de sustitución debe interpretarse como sigue: si $A(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ es una proposición de *LF* dotada de *n* variables, que corresponde a un enunciado $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la Aritmética intuitiva también de *n* variables [4], y si $A(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ es la proposición que se obtiene reemplazando las variables $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ por expresiones correspondientes a números enteros, esta proposición corresponde al enunciado que se obtiene a partir del enunciado $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ reemplazando en él las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ por los enteros correspondientes a las expresiones $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$.

[3] Por ejemplo, si la lengua en la que se interpreta (Θ) es la aritmética ordinaria, el universo considerado es el conjunto de todos los enteros.

[4] Estas variables son variables de la aritmética recursiva y no variables de *LF,* pudiendo ser reemplazadas por números enteros.

c) A todo *predicado recursivo P* de *n* argumentos de la Aritmética recursiva debe corresponder en *LF* una *expresión predicativa* A (Θ_1, Θ_2, ..., Θ_n) de *n* variables, tal que se cumpla la relación siguiente: si *P* se cumple de los enteros *a, b, ..., n,* y si $N_a, N_b, \ldots, N_n$ son las expresiones de *LF* correspondientes a estos enteros, la proposición A ($N_a, N_b, \ldots, N_n$) es derivable en *LF.*

(Dadas las propiedades del *operador de negación,* se tiene: si *P* no se cumple de los enteros *a, b, ..., n,* la proposición A ($N_a, N_b, \ldots, N_n$) es refutable en *LF.*)

Esta condición exige, pues, que todos los predicados recursivos sean *representables* en *LF.* Corresponde precisamente al lema de GÖDEL (véase (90)). El alcance de este lema era, en efecto, mostrar que el sistema *LFG* tenía esta propiedad.

Esta condición es en sí bastante compleja. Por ejemplo, exige que el sistema *LF* lleve un predicado de *igualdad* y que sea posible representar el *esquema de recursión primitiva.* Para comprobarlo, es suficiente con remitirse a la demostración del lema de GÖDEL [5].

109. CARÁCTER GENERAL DEL TEOREMA DE GÖDEL.

Las condiciones 1 a 4 del parágrafo anterior (y, por tanto, la condición 3 del § 107) pueden darse en un sistema que incluya la lógica de predicados de primer orden y que pudiese formalizar la Aritmética recursiva.

Se trata de exigencias de naturaleza muy general a las que responden numerosos sistemas. Pueden ser satisfechas por sistemas relativamente poco capaces, en los cuales no sería posible formalizar la Aritmética ordinaria.

(Esta comporta formas de razonamiento y procedimientos de definición que rebasan el marco de la Aritmética recursiva.)

Se puede, por tanto, dar al teorema de GÖDEL la siguiente forma, muy generalizada:

(VII) *Todo sistema formal que satisfaga las condiciones* 1, 2 y 3 *del* § 107 *contiene proposiciones indecidibles del tipo* (𝔛) $\mathfrak{R}$ (𝔛), *donde* $\mathfrak{R}$ *representa una propiedad de números enteros representable recursivamente.*

110. ASPECTOS SEMÁNTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN DE GÖDEL

La condición 3 del § 107 —tal como ha sido explicitada en el § 108— es, en parte, una condición de tipo *semántico,* en el sentido de que hace intervenir una relación de significación entre ciertos elementos del sistema y ciertos objetos exteriores al sistema. En efecto, supone la existencia de una interpretación de ciertos operadores proposicionales y de ciertas proposiciones del sistema en una teoría intuitiva

[5] Véase § 90.

LB_n [6]. Y, por otra parte, establece una correspondencia precisa entre la propiedad de *derivabilidad* (que pertenece a las proposiciones del sistema) y la propiedad de *certeza intuitiva* (que pertenece a los enunciados de la teoría LB_n). (Condiciones 2 y 4, c del § 108.)

Se puede decir que el método de GÖDEL es un método *sintáctico,* en el sentido de que se apoya en la utilización de una noción sintáctica: la noción de derivabilidad. Esta noción interviene en la construcción de la proposición $\mathfrak{G}^*$ y en la demostración del carácter indecidible de esta proposición.

Pero esta demostración hace igualmente intervenir una cierta correspondencia entre el sistema *LFG* y una teoría intuitiva: una parte de la metateoría de *LFG* es expresada a través de la Aritmética recursiva.

El lema de GÖDEL asocia a los enunciados ciertos de esta teoría [7] proposiciones derivables de *LFG.* Sólo sobre la base de esta correspondencia pueden astudiarse las propiedades de la proposición $\mathfrak{G}^*$ en relación a la noción de derivabilidad y establecer el carácter indecidible de esta proposición. En cada parte de la demostración del § 96 se pasa, en virtud del lema, de la certeza de un determinado enunciado aritmético a la derivabilidad de una cierta proposición de *LFG.* Y así, se hace intervenir implícitamente la interpretación de la proposición $\mathfrak{G}^*$, a saber: el enunciado que afirma la no-derivabilidad de $\mathfrak{G}^*$.

111. EXTENSIONES Y GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE GÖDEL.

Más adelante se verá [8] que los resultados de GÖDEL pueden alcanzarse partiendo de resultados más generales y basándose, no ya sobre un método *sintáctico* (en el sentido definido anteriormente), sino sobre un método puramente *semántico.*

Por el momento, vamos a exponer los resultados de KLEENE y de ROSSER, próximos a los de GÖDEL, pero establecidos sobre hipótesis diferentes.

El resultado de KLEENE es importante, pues descansa sobre un método muy diferente del de GÖDEL; KLEENE utiliza la paradoja del embustero, en lugar de la paradoja de RICHARD. Esto revela que la existencia de proposiciones indecidibles está ligada a un fenómeno de circularidad, aunque ésta puede presentarse bajo formas diferentes.

Los resultados de ROSSER son importantes por constituir generalizaciones directas del teorema de GÖDEL.

---

[6] Esta teoría es la aritmética recursiva.

[7] Sobre la segunda de estas expresiones, véase el § 71.

[8] Véase el CAPITULO VIII.

SECCIÓN 2.—EL TEOREMA DE KLEENE.

112. LA FUNCIÓN Y EL PREDICADO DE KLEENE.

KLEENE ha obtenido un resultado análogo al de GÖDEL partiendo de la teoría de *funciones recursivas generales*, de la cual es autor.

Su teorema se apoya sobre un lema referente a la sintaxis de la teoría de funciones recursivas: es precisamente en este lema donde se manifiesta la analogía con la paradoja de RICHARD, pues su demostración se basa en el *procedimiento de la diagonal* [9].

Antes de abordar este lema hay que precisar algunas nociones. Como se ha visto, una función recursiva general está definida por un cierto sistema de ecuaciones y por dos operaciones On_1 *y* On_2 [10].

Para expresar en forma aritmética los conceptos metateóricos de esta teoría se puede utilizar el procedimiento de aritmetización de GÖDEL. Entonces se considera una cierta formulación de la teoría: se hace corresponder biunívocamente a los símbolos primitivos (constantes, variables, símbolos para funciones, signo de igualdad) [11], números primos a los que se denominará *números-G.*

Si una *ecuación* [12] está constituida por una serie de símbolos cuyos números-G son (en el orden de los símbolos correspondientes) $e_1, e_2, \ldots, e_k$, se hace corresponder a la ecuación el número

$$2^{e1} \times 3^{e2} \times \ldots \times p_k^{ek}$$

(donde p_k designa el k-ésimo número primo diferente de 1), que será llamado su *número-G.*)

El mismo procedimiento se aplicará para formular los *números-G* de una serie de ecuaciones.

Por otra parte, se muestra que es posible representar recursivamente (mediante funciones recursivas primitivas) las operaciones de transformación On_1 y On_2, y definir una función recursiva primitiva de dos argumentos *Fkl* (función de KLEENE) que enumera las ecuaciones que se pueden obtener a partir de un sistema dado de ecuaciones mediante operaciones On_1 y On_2 [13].

---

[9] Véase CAPITULO II, nota 70.
[10] Véase § 59.
[11] Véase § 55.
[12] Sobre el sentido de esta expresión, véase § 59.
[13] KLEENE 5, pág. 735 (núm. 25).

(Si α es el *número-G* de un cierto sistema de ecuaciones, los valores respectivos de $Fkl\,\alpha\,0$, $Flk\,\alpha\,1$, $Fkl\,\alpha\,2$, ..., son los números-G de las ecuaciones que son *deducibles* de este sistema) [14].

Se puede definir entonces un predicado recursivo primitivo de $(n + 2)$ argumentos $Pkl^{(n)}$ (predicado de KLEENE) [15].

$Pkl^{(n)}\ Z\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_n\ Y$ significa:

Y es el *número-G* de una ecuación de la forma $F\,X_1\,X_2\,\ldots\,X_n = \beta$

(donde β representa un entero) que es deducible del sistema de ecuaciones cuyo *número-G* es Z.

En lo sucesivo, y en este capítulo, consideraremos solamente, por motivos simplificativos, el caso de las funciones de un solo argumento X. El predicado de KLEENE toma entonces la forma: $Pkl^{(1)}$. En lugar de $Pkl^{(1)}$ escribiremos simplemente *Pkl*, lo que en nada cambia la generalidad de los enunciados que van a seguir. Por otra parte, como se tratará en general de funciones recursivas generales, hablaremos simplemente de funciones recursivas (subentendiéndose que son generales). Cuando se trate de funciones recursivas primitivas lo indicaremos expresamente.

Acometamos ahora la exposición del lema de KLEENE [16].

113. EL LEMA DE KLEENE.

(VIII) LEMA — *Si F es una función recursiva uniargumental y si* (X) (E Y) *Pkl* (*FX*) *X Y, existe un número h tal que* (X) (E Y) *Pkl h X V y tal que, para ningún m, no se cumple Fm = h.*

Dicho de otra forma: si, cualquiera que sea el argumento X de la función F, existe una ecuación $(G\,X = \beta)$ que es deducible de un sistema de ecuaciones cuyo número-G es FX, existe también un sistema de ecuaciones cuyo número-G es n y del cual se puede deducir la ecuación $(G\,X = \beta)$ sin que, no obstante, este número n sea uno de los valores posibles de la función F.

La demostración se realiza recurriendo al *procedimiento de la diagonal.*

Mediante la función *Fkl* se puede obtener el número-G de la primera ecuación $G\,X = \beta$ que se puede deducir del sistema de ecuaciones cuyo número-G es FX. Denominemos a la función G que figura en esta ecuación función *asociada* a este sistema de ecuaciones. (Una función asociada a un sistema de ecuaciones puede considerarse definida por este sistema.)

A partir de éste, es posible definir una nueva función H cuyo valor, para el argumento X, será precisamente el valor de la función G para este mismo argumento, aumentado en una unidad.

---

[14] Sobre el sentido de esta expresión, véase § 59.

[15] KLEENE 5, pág. 737 (núm. 26).

[16] KLEENE 5, pág. 739 (Teorema X).

Así, si $G X = \beta$, $H X = \beta + 1$.

Por supuesto, para cada valor de X, el sistema de ecuaciones cuyo número-G es FX, será diferente, y, por consiguiente, la función asociada a este sistema será también diferente.

Designemos por G_α la función asociada al sistema de ecuaciones cuyo número-G es $F\alpha$ [17].

Nuestra función H estará definida por:

$$H\alpha = G_\alpha \alpha + 1.$$

Dicho de otra forma: se considera una función F cuyos valores son los números-G de sistemas de ecuaciones a los que están asociadas las funciones G_α, y se define una función H cuyo valor, para un argumento α, es el de la función G_α para el mismo argumento aumentado en una unidad.

Se puede mostrar fácilmente que esta función H es recursiva.

Puesto que H es una función recursiva, existe un sistema de ecuaciones que la define. Sea h su número-G. Utilizando el predicado *Pkl*, esto puede escribirse en la forma:

$$(X)\ (EY)\ Pkl\ h\ XY.$$

Es decir: se puede deducir del sistema cuyo número-G es h una ecuación de la forma $H X = \beta$, cualquiera que sea X. O también: el sistema de ecuaciones cuyo número-G es h permite calcular el valor de $H X$ para todos los valores de X.

Es evidente que, si se tiene un m tal que $Fm = h$, se tendría:

$$H X = G_m X,$$

y por tanto $H m = G_m m$,

lo que contradiría la definición de H.

Así, la función de H, aunque es recursiva, no está comprendida en la enumeración realizada por F: el número-G del sistema que la define no puede ser uno de los valores de F.

Las funciones G_α forman una clase recursivamente enumerable: los sistemas de ecuaciones a las que van asociadas (y que las definen) tienen, en efecto, por números-G los valores sucesivos de la función recursiva F.

El lema de KLEENE nos enseña que el procedimiento de la diagonal, aplicado a una clase recursivamente enumerable de funciones recursivas, no nos hace salir de la clase de funciones recursivas.

Este lema tiene una consecuencia extremadamente importante, que volveremos a encontrar más adelante [18]:

La clase de las funciones recursivas no es recursivamente enumerable y tampoco es recursiva.

---

[17] Esta ecuación será, pues, de la forma $G_x X = \beta$.

[18] En el § 155.

Dicho de otra forma: no es posible dar un procedimiento recursivo que permita decidir si un sistema dado de ecuaciones define o no una función recursiva. O también: la noción de recursividad no es recursivamente representable.

Pero, por el momento, debemos examinar cómo este lema lleva a reconocer la existencia de proposiciones indecidibles en ciertos sistemas.

114. Hipótesis del Teorema de Kleene.

Kleene considera un sistema *LFK* al que impone tres categorías de condiciones:

1) condiciones sobre la aritmetización de la sintaxis;
2) condiciones sobre las posibilidades de expresión;
3) condiciones de coherencia.

Las hipótesis establecidas por Kleene se parecen mucho a las condiciones generales de Gödel en lo que concierne a las condiciones 1 y 2 [19].

Pero en lo que se refiere a las condiciones de coherencia, Kleene reemplaza la hipótesis de ω-coherencia [20] por una hipótesis de coherencia semántica que se asemeja bastante a la de la ω-coherencia.

He aquí la descripción precisa de estas condiciones.

1. *Aritmetización.*

a) Es posible hacer corresponder a las proposiciones de *LFK* de números enteros, de tal manera que a proposiciones distintas correspondan números distintos.

b) La clase de los axiomas debe ser recursiva [21].

c) La relación de *consecuencia inmediata* [22] debe ser recursivamente representable.

2. *Posibilidades de expresión.*

a) El sistema *LFK* contiene un *operador de negación*, $\sim$, cuya interpretación es: si A es una proposición del sistema que corresponde a un enunciado *A*, entonces $\sim$ A es una proposición del sistema que corresponde al enunciado *no-A*.

b) A toda expresión de la forma $Pkl_{\alpha} XY$ es posible hacer corresponder una cierta proposición $\mathfrak{A}_{\alpha}$ de *LFK*.

---

[19] Véanse condiciones 2 y 3 del § 107.

[20] Condición 1 del § 107.

[21] Véase § 61.

[22] Véase § 80. La definición del § 80 se extiende inmediatamente al sistema *LFK*: una proposición de *LFK* es *consecuencia inmediata* de una o varias proposiciones del sistema si se puede obtener a partir de esta proposición —o de estas proposiciones— mediante una de las reglas de derivación del sistema.

En otros términos: cualquiera que sea *e*, el enunciado *Plk e XY* es representable en *LFK* por medio de una proposición $\mathfrak{A}_e$. Esta proposición representa, por tanto, el enunciado: *Y* es el número-G de una ecuación $(F X = \beta)$ que es deducible del sistema de ecuaciones cuyo número-G es *e*.

Las proposiciones de la forma $\mathfrak{A}_\alpha$ forman una clase. Designemos por a_α el número entero asociado a la proposición $\mathfrak{A}_\alpha$ en virtud de la condición primera.

La correspondencia entre α y a_α se supone que es recursiva. En otros términos, existe una función recursiva *Crd* (*función de coordinación*), tal que: $X = Crd\, a_x$.

Y la clase de las proposiciones $\mathfrak{A}_\alpha$ se supone que es recursiva.

3. *Coherencia.*

La propiedad de *derivabilidad* para las proposiciones $\mathfrak{A}_\alpha$ debe corresponder a la propiedad de *certeza* (intuitiva) para los enunciados correspondientes: si $\mathfrak{A}_e$ es derivable es necesario que el enunciado (*X*) (*EY*) *Pkl e XY* sea cierto. Pero la inversa no debe darse necesariamente: la correspondencia no se supone, pues, biunívoca. (El teorema enseñará precisamente que no lo es.)

115. Enunciado y demostración del Teorema de Kleene.

El teorema de Kleene puede enunciarse como sigue [23]:

(IX) *Dado un sistema LFK que responde a las condiciones enunciadas anteriormente, existen valores de* α *para los cuales* $\mathfrak{A}_\alpha$ *no es decidible.*

Se expondrá en primer término que hay valores de α para los cuales $\mathfrak{A}_\alpha$ no es derivable, mientras que el enunciado correspondiente es cierto.

Sea *k* un número tal que $\mathfrak{A}_k$ sea derivable. En virtud de las condiciones 1b y 1c del § 114, la clase de las proposiciones derivables es recursiva, y, por tanto, recursivamente enumerable. Existe, pues, una función recursiva *Enm-K* que enumera los números enteros asociados a las proposiciones derivables de *LFK*.

Por otra parte, en virtud de las condiciones 2b del § 114, la clase de las proposiciones $\mathfrak{A}_\alpha$ es recursiva y, por tanto, recursivamente enumerable. Existe, pues, una función recursiva que enumera recursivamente los números enteros a_α asociados a estas proposiciones.

Finalmente, en virtud de las mismas condiciones 2b del § 114, los índices α de los enteros a_α están ligados a estos enteros por una función recursiva. Por tanto, es posible, partiendo de la función *Enm-K*, encontrar una función recursiva *Enm-L* que enumere los enteros α para los cuales $\mathfrak{A}_\alpha$ es derivable.

En virtud de la condición 3 del § 114, tenemos para cada uno de los enteros:

(*X*) (E*Y*) *Pkl* α *XY*.

O también: el enunciado (*X*) (E*Y*) *Pkl* (*Enm-L X*) *XY* es cierto.

[23] Kleene 5, pág. 740 (Teorema XIII).

El lema nos permite entonces afirmar que existe al menos un número h tal que (X) (EY) *Pkl h XY* es tal que, para ningún *m*, se cumple *Enm-L m* = *h*.

Pero esto quiere decir que la proposición $\mathfrak{A}_h$ no es derivable (pues no forma parte de la enumeración dada por la función *Enm-L*).

Tendremos, por consiguiente, al menos un valor h para el cual $\mathfrak{A}_h$ no es derivable, mientras que la expresión correspodiente, (X) (EY) *Pkl h XY*, es cierta.

Por otra parte, $\mathfrak{A}_h$ no es refutable. En efecto, si $\sim \mathfrak{A}_h$ fuese derivable, esto significaría, en virtud de la condición 3 y 2a (relativa al operador de negación) del § 114, que la negación de (X) (EY) *Pkl h XY* sería cierta, lo que es imposible, puesto que (X) (EY) *Pkl h XY* es cierta.

Así, la proposición $\mathfrak{A}_h$ es indecidible. Por tanto, existen valores de α para los cuales $\mathfrak{A}_\alpha$ es indecidible.

Como la hipótesis de coherencia utilizada por KLEENE no es más general que la ω-coherencia, el teorema de KLEENE no generaliza en este punto el teorema de GÖDEL. La generalización se realiza en las condiciones 1 del § 114: la recursividad que se trata en estas condiciones es, en efecto, una recursividad general (y no una recursividad primitiva como en GÖDEL).

SECCIÓN 3.—LOS TEOREMAS DE ROSSER.

116. EL PRIMER TEOREMA DE ROSSER.

ROSSER ha obtenido varias extensiones del Teorema de GÖDEL. Consideraremos estas extensiones en orden de generalidad creciente. La primera es muy parecida a la de KLEENE, la segunda se refiere a la hipótesis de coherencia y las demás extienden el resultado de GÖDEL a Lógicas que admiten reglas no-constructivas.

En esta sección sólo consideraremos las dos primeras de estas extensiones, que son aplicables a sistemas cuyas reglas sean de la misma naturaleza que las del sistema *LFG*. Cada una de estas dos extensiones es objeto de un teorema.

El primer Teorema de ROSSER introduce, como el de KLEENE, una generalización de las hipótesis de GÖDEL sobre axiomas y reglas de derivación. Pero el resultado de ROSSER es algo más general que el de KLEENE. Por lo demás, su método de demostración es esencialmente el de GÖDEL.

ROSSER conserva las condiciones 1 y 3 del § 107, pero modifica la condición 2 del mismo parágrafo.

GÖDEL imponía que la clase de los axiomas fuese recursiva primitiva (es decir, que la clase de los números-G correspondientes a los axiomas fuese recursiva primitiva) y que la relación de consecuencia inmediata fuese representable mediante un

predicado recursivo primitivo. ROSSER impone que la clase de las proposiciones derivables sea recursivamente enumerable [24].

Esta clase es la menor clase de proposiciones que contiene los axiomas y que es cerrada respecto a la relación de consecuencia inmediata. Apoyándose en esta definición, se puede demostrar fácilmente [25] que la condición impuesta se reduce a postular:

1) Que la clase de los axiomas sea recursivamente enumerable.

2) Que la relación de consecuencia inmediata sea representable por medio de un predicado recursivo general.

Como una clase recursiva general es recursivamente enumerable sin que la inversa sea necesariamente cierta, la hipótesis de ROSSER es más amplia que la de KLEENE, que requiere que los axiomas formen una clase recursiva general.

ROSSER considera las extensiones del sistema *LFG* de GÖDEL compatibles con la condición de enumerabilidad recursiva. Dicho de otra manera: considera los sistemas que es posible obtener partiendo de *LFG*, añadiéndoles un cierto número de axiomas y de reglas de derivación, pero de manera tal que la clase de proposiciones derivables sea recursivamente enumerable.

Designaremos con el símbolo *LFG-R* a cualquier sistema de este tipo.

El *Primer Teorema de* ROSSER se enuncia como sigue [26]:

(X) *Si un sistema del tipo LFG-R es ω-coherente, contiene al menos una expresión predicativa de una variable* $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *tal que ni* $(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *ni* $\sim$ $(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *son proposiciones derivables en este sistema.*

Para demostrar este Teorema basta con modificar ligeramente la demostración de GÖDEL.

Por hipótesis, existe una función recursiva *Enm-R* que enumera las proposiciones derivables del sistema.

Como la hipótesis del Teorema no introduce ninguna restricción sobre la enumerabilidad recursiva de la clase de proposiciones derivables, esta enumeración puede comportar repeticiones, y la función *Enm-R* puede ser recursiva primitiva. Pues una clase recursivamente enumerable en sentido general (por consiguiente, con repetición) puede ser enumerada por una función recursiva primitiva [27].

Para obtener el Teorema de ROSSER basta con reemplazar, en la demostración del Teorema de GÖDEL, todos los enunciados del tipo *Fdr* δ_1 δ_2 por enunciados del tipo *Enm-R* $\delta_1 = \delta_2$

y todos los enunciados del tipo *Dem* δ

por enunciados del tipo (EX) (*Enm-R* $X = \delta$).

---

[24] Véase § 62.

[25] ROSSER 3, pág. 88 (Lema II).

[26] ROSSER 3, pág. 89 (Teorema I, A).

[27] Véase § 62.

117. Enunciado del segundo Teorema de Rosser. Los predicados Fdr-R y Dem-R.

El *segundo Teorema de* Rosser conserva la generalización introducida por el primero pero añade una generalización de la condición de coherencia: reemplaza la condición de *ω-coherencia* por la condición de *coherencia* (simple). Esta generalización es mucho más importante que la primera.

El segundo Teorema se enuncia como sigue[28]:

(XI) *Si un sistema del tipo LFG-R es coherente, contiene al menos una expresión predicativa de una variable* $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *tal que ni* $(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *ni* $\sim$ $(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X})$ *son proposiciones derivables en este sistema.*

Para demostrar este Teorema, Rosser modifica la definición de los predicados *Fdr* y *Dem* para tener en cuenta la condición sobre la enumerabilidad recursiva de la clase de las proposiciones derivables (como en la demostración de su primer Teorema), e introduce dos nuevos predicados, *Fdr-R y Dem-R,* para tener presente la condición sobre la coherencia.

Sea *Enm-R* la función recursiva que numera la clase de los predicados derivables del sistema.

Los predicados *Fdr* y *Dem* están definidos por las equivalencias:

$$Fdr\ XY \leftrightarrow (Enm\text{-}R\ X = Y)$$

y $$Dem\ Y \leftrightarrow (\mathrm{EX})\ (Enm\text{-}R\ X = Y).$$

Ahora puede introducirse la siguiente definición:

(1) $$Fdr\text{-}R \leftrightarrow (Fdr\ X\ Y)\ \mathrm{y} \sim (\mathrm{EZ})\ [(Z \leqq X)\ \mathrm{y}\ (Fdr\ Z\ (Neg\ Y))].$$

(El segundo miembro de esta equivalencia puede leerse: la serie de proposiciones $Ngd^{-1}(X)$ es una derivación de la proposición $Ngd^{-1}(Y)$ y no hay ninguna serie de proposiciones cuyo número-G sea igual o inferior a X y constituya una refutación de la proposición $Ngd^{-1}(Y)$.

Dicho de otra forma: la relación *Fdr-R* existe entre una serie de proposiciones *Sp* (cuyo número-G es X) y una proposición A (cuyo número-G es Y) cuando esta serie *Sp* constituye una derivación de A y cuando la negación de A no es derivable por *Sp* o una serie de número-G inferior.

Igualmente, se puede introducir la definición:

(2) $$Dem\text{-}R\ Y \leftrightarrow (\mathrm{EX})\ Fdr\text{-}R\ XY.$$

(El segundo miembro de esta equivalencia puede leerse:

Existe una serie de proposiciones $Ngd^{-1}(X)$ tal que se tiene la relación *Fdr-R* entre esta serie de proposiciones y la proposición $Ngd^{-1}(Y)$.

[28] Rosser 3, pág. 89 (Teorema II).

Dicho de otra manera: una proposición A (cuyo número-G es *Y*) tiene la propiedad *Dem-R* cuando es derivable mediante una serie de proposiciones *Sp* y cuando no es refutable por medio de *Sp* o de una serie cuyo número-G sea inferior al de *Sp*.

En virtud de los teoremas del § 86 y de la forma de su definición, el predicado *Fdr-R* es recursivo (puesto que la función *Enm-R* es recursiva, y el predicado *Fdr* al que define es, pues, igualmente recursivo).

Como puede verse, los predicados *Fdr-R* y *Dem-R* corresponden respectivamente a los predicados *Fdr* y *Dem* de la demostración de GÖDEL, pero incluyen una propiedad suplementaria.

118. PROPIEDADES DE LOS PREDICADOS FDR-R Y DEM-R.

Se aprecia fácilmente que, si *Dem-R Y* se da, también se cumple *Dem Y*. Supongamos en efecto que se tenga *Dem-R Y*.

En virtud de 2(117):

$$Dem\text{-}R\ Y \leftrightarrow (EX)\ Fdr\text{-}R\ XY,$$

y por tanto:

$$Dem\text{-}R\ Y \rightarrow (EX)\ Fdr\text{-}R\ XY.$$

En virtud de 1(117):

$$(EX)\ Fdr\text{-}R\ XY \rightarrow (EX)\ [(Fdr\ XY) \,\&\, \sim (EZ)\ [(Z \leqq X) \,\&\, (Fdr\ Z\ (Neg\ Y))]].$$

Aplicando dos veces la regla de la consecuencia [29], tenemos:

$$(EX)\ [Fdr\ XY \,\&\, \sim (EZ)\ [(Z \leqq X) \,\&\, (Fdr\ Z\ (Neg\ Y))]],$$

y por tanto, también:

$$(EX)\ Fdr\ XY.$$

En virtud de 1(89):

$$(EX)\ Fdr\ XY \rightarrow Dem\ Y.$$

Y por la regla de la consecuencia, tenemos: *Dem Y*.

Para que la inversa sea cierta, es necesario que se cumpla:

$$(EX)\ [(Fdr\ XY) \,\&\, \sim (EZ)\ [(Z \leqq X) \,\&\, (FdrZ\ (Neg\ Y))]].$$

En otros términos, es preciso que se dé la relación *Fdr-R* entre la proposición $Ngd^{-1}(Y)$ y una cierta serie de proposiciones $Ngd^{-1}(X)$. Si tenemos *Dem Y*, podemos obtener, en virtud de 1(89): $(EX)\ Fdr\ XY$.

Pero esta condición sólo se dará si el sistema es coherente.

Así, para que *Dem Y* comporte *Dem-R*, es preciso que el sistema sea coherente.

[29] Véase § 6, Regla 1.

El Teorema de GÖDEL incluye un corolario que será expuesto en el capítulo siguiente, y en virtud del cual no es posible demostrar, en un sistema del tipo *LFG* o *LFG-R*, la coherencia de este sistema. Resulta de este corolario y de la observación precedente que no es posible demostrar, en el sistema considerado por ROSSER, la equivalencia entre los predicados *Dem* y *Dem-R* (o más exactamente, entre las expresiones que les corresponden en el sistema).

La formalización del predicado *Dem-R* posee propiedades que no tiene la del predicado *Dem*.

Sea *LFG-R* el sistema considerado.

Formemos el enunciado *Dem-R a*, es decir: (EX) *Fdr-R X a*. Como *Fdr-R* es un predicado recursivo y *LFG-R* contiene a *LFG*, *Fdr-R* es representable en *LFG-R*. Y como *LFG-R* contiene el cuantificador de particularización, el enunciado *Dem-R a* es representable en *LFG-R*.

Sea $\mathfrak{D}^*$ la proposición (cerrada) que representa a *Dem-R a* en *LFG-R* y sea *d* el número-G de $\mathfrak{D}^*$.

Se puede demostrar [30]:

(1) $\quad Dem\text{-}R\ a \quad \rightarrow Dem\text{-}R\ d$

y

(2) $\quad Dem\text{-}R\ (Neg\ a) \rightarrow Dem\text{-}R\ (Neg\ d).$

Es decir:

Si el número *a* cumple el predicado *Dem-R*, la proposición que expresa este hecho en *LFG-R* tiene la propiedad expresada por el predicado *Dem-R*.

Y si la negación de la proposición $Ngd^{-1}(a)$ tiene la propiedad expresada por *Dem-R*, entonces la negación de la proposición que expresa este mismo hecho en *LFG-R* tiene la misma propiedad.

Se trata, como se ve, de propiedades que no posee el predicado *Dem*.

Aplicando las definiciones de *Dem-R* [31], de *Fdr-R* [32] y de *Dem* [33], se muestra fácilmente que las expresiones 1(118) y 2(118) se convierten:

(3) $\quad Dem\text{-}R\ a \quad \rightarrow Dem\ d\ \&\ \sim Dem\ (Neg\ d)$

y

(4) $\quad Dem\text{-}R\ (Neg\ a) \rightarrow Dem\ (Neg\ d)\ \&\ \sim Dem\ d.$

Es decir: si el número *a* cumple el predicado *Dem-R*, la proposición que expresa este hecho en *LFG-R* es derivable en *LFG-R* y su negación no lo es.

Y si la negación de la proposición Ngd^{-1} (*a*) tiene la propiedad expresada por *Dem-R*, entonces la negación de la proposición que expresa este mismo hecho en *LFG-R* es derivable en *LFG-R*, y esta proposición no es derivable en este sistema.

---

[30] ROSSER 3, pág. 90.
[31] Véase 2 (117).
[32] Véase 1 (117).
[33] Véase 1 (89).

Mediante estas propiedades, se puede establecer fácilmente el carácter indecidible de una proposición $\mathfrak{V}_R^*$ que afirma de sí misma que no posee el predicado *Dem-R*.

119. Construcción de la proposición $\mathfrak{V}_R^*$.

Para obtener la demostración rigurosa del segundo Teorema de Rosser, es suficiente con seguir exactamente el de Gödel, pero reemplazando los predicados *Fdr* y *Dem* por los predicados *Fdr-R* y *Dem-R*, y utilizando las definiciones 1(117) y 2(117).

Indicaremos las líneas esenciales de esta demostración.

Formemos el enunciado aritmético:

$$\sim \textit{Fdr-R } s \ (\textit{Sbs } a \ a).$$

Conforme al lema del § 90, existe una expresión predicativa $\mathfrak{P}_R$, de número-G p, que contiene dos variables libres $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$, y tal que:

(1) $$\sim \textit{Fdr-R } s \ (\textit{Sbs } a \ a) \rightarrow \textit{Dem } [\textit{Sub } p \ 17 \ 19 \ \textit{Ngd } (N_s) \ \textit{Ngd } (N_a)]$$

y

(2) $$\textit{Fdr-R } s \ (\textit{Sbs } a \ a) \rightarrow \textit{Dem } [\textit{Neg Sub } p \ 17 \ 19 \ \textit{Ngd } (N_s) \ \textit{Ngd } (N_a)].$$

Como suponemos que el sistema es coherente, tendremos:

$$\textit{Dem } X \leftrightarrow \textit{Dem-R } X \text{ [34]}.$$

Y, por tanto, reemplazando en las implicaciones precedentes *Dem* por *Dem-R* tenemos también:

(3) $$\sim \textit{Fdr-R } s \ (\textit{Sbs } a \ a) \rightarrow \textit{Dem-R } [\textit{Sub } p \ 17 \ 19 \ \textit{Ngd } (N_s) \ \textit{Ngd } (N_a)]$$

y

(4) $$\textit{Fdr-R } s \ (\textit{Sbs } a \ a) \rightarrow \textit{Dem-R } [\textit{Neg Sub } p \ 17 \ 19 \ \textit{Ngd } (N_s) \ \textit{Ngd } (N_a)].$$

La expresión predicativa $\mathfrak{P}_R$ contiene dos variables libres, $\mathfrak{X}_1$ y $\mathfrak{X}_2$, lo que podemos escribir: $\mathfrak{P}_R \ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$.

Si ligamos la primera de estas variables por un cuantificador de universalización, obtendremos una expresión predicativa $\mathfrak{D}_R$.

$$(\mathfrak{X}_1) \ \mathfrak{P}_R \ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2).$$

Sea q el número-G de $\mathfrak{D}_R$. Entonces tenemos:

$$q = \textit{Unv } 17 \ p.$$

Si, por otra parte, reemplazamos en $\mathfrak{P}_R$ la variable $\mathfrak{X}_2$ por la cifra de *LFG-R* que corresponde al entero q, obtenemos una expresión predicativa $\mathfrak{R}_R$:

$$\mathfrak{P}_R \ (\mathfrak{X}_1, N_q).$$

Sea r el número-G de $\mathfrak{R}_R$. Entonces tenemos:

$$r = \textit{Sub } p \ 19 \ \textit{Ngd } (N_q).$$

---

[34] Véase § 118.

Finalmente, ligando la variable libre de $\mathfrak{R}_R$ por un cuantificador de universalización, obtendremos una proposición cerrada $\mathfrak{J}^*_R$:

$$(\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}_R\ (\mathfrak{X}_1, N_q).$$

Sea i el número-G de $\mathfrak{J}^*_R$. Entonces tenemos:

$$i = Unv\ 17\ r.$$

Como en la demostración de GÖDEL, tenemos:

$$Sbs\ q\ q = i.$$

Esta proposición $\mathfrak{J}^*_R$ afirma de sí misma que no posee la propiedad *Dem-R.* Efectivamente, en el sistema *LFG-R* representa el enunciado aritmético

$$(X) \sim Fdr\text{-}R\ X\ (Sbs\ q\ q),$$

que significa: no existe ninguna serie de proposiciones $Ngd^{-1}(X)$ que esté ligada por la relación *Fdr-R* con la proposición $Ngd^{-1}(Sbs\ q\ q)$, es decir, con la proposición $\mathfrak{J}^*_R$ misma.

120. Demostración del segundo Teorema de Rosser.

Si s es el número-G de una serie de proposiciones *Sp,* dado el valor de r, tenemos:

$$Sub\ p\ 17\ 19\ Ngd(N_s)\ Ngd(N_q) = Sub\ r\ 17\ Ngd(N_q).$$

Las expresiones 3(119) y 4(119) se convierten en:

(1) $\sim Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\text{-}R\ [Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)]$

y

(2) $Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\text{-}R\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)].$

$[Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)]$ es el número-G de la proposición $\mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$, que representa en *LFG-R* el enunciado metateórico:

$$\sim Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q).$$

En virtud de las equivalencias 1(117) y 2(117), las expresiones 1(120) y 2(120) que acabamos de exponer, se convierten en:

(3) $\sim Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\ [Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)]\ \&\sim Dem\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)]$

y

(4) $Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q) \rightarrow Dem\ [Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)]\ \&\sim Dem\ [Sub\ r\ 17\ Ngd(N_s)].$

La fórmula 4(120) corresponde a la fórmula 1(118).

En efecto, si $\mathfrak{J}^*_R$ goza de la propiedad *Dem-R,* existe un cierto s tal que:

$$Fdr\text{-}R\ s\ i, \text{ o } Fdr\text{-}R\ s\ (Sbs\ q\ q).$$

Tenemos, por consiguiente, el antecedente de 4(120). Y entonces la proposición que expresa en *LFG-R* el hecho de que $\mathfrak{G}^*_R$ tenga la propiedad *Dem-R* —es decir, la proposición $\sim \mathfrak{P}\ (N_s, N_q)$— tiene también la propiedad *Dem-R.*

La fórmula 3(120) corresponde a la fórmula 2(118). Efectivamente, si $\sim \mathfrak{G}^*_R$ tiene la propiedad *Dem-R,* como el sistema se supone coherente, $\mathfrak{G}^*_R$ no puede tener la propiedad *Dem-R.* Y entonces, cualquiera que sea *s,* se tiene:

$$\sim \textit{Fdr-R}\ s\ i, \text{ o } \sim \textit{Fdr-R}\ s\ (\textit{Sbs}\ q\ q).$$

Tenemos, por tanto, el antecedente de 3(120), y entonces la negación de la proposición que expresa en *LFG-R* el hecho de que $\mathfrak{G}^*_R$ tiene la propiedad *Dem-R* —es decir, $\mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$— tiene también la propiedad *Dem-R.*

La fórmula 3(120) puede, por tanto, enunciarse:

Si una cierta serie de proposiciones no cumple la relación *Fdr-R* con la proposición, la proposición que representa este hecho en *LFG-R* es derivable e irrefutable en *LFG-R.*

Y la fórmula 4(120) puede enunciarse:

Si una cierta serie de proposiciones cumple la relación *Fdr-R* con la proposición $\mathfrak{G}^*_R$, la proposición que representa este hecho en *LFG-R* es derivable e irrefutable en *LFG-R.*

Partiendo de la exposición anterior se comprueba fácilmente que la proposición $\mathfrak{G}^*_R$ es *indecidible.*

a. $\mathfrak{G}^*_R$ *es inderivable en LFG-R.*

Supongamos, en efecto, que $\mathfrak{G}^*_R$ sea derivable en *LFG-R.*

Como *LFG-R* se supone coherente, si $\mathfrak{G}^*_R$ es derivable, $\sim \mathfrak{G}^*_R$ no es derivable. Hay, pues, una cierta serie de proposiciones de *LFG-R* que constituye una derivación de $\mathfrak{G}^*_R$ y no hay ninguna serie de proposiciones de *LFG-R* que constituya una derivación de $\sim \mathfrak{G}^*_R$.

Reuniendo estas dos propiedades tenemos:

Existe una cierta serie de proposiciones $Ngd^{-1}(s)$ que cumple la relación *Fdr-R* con la proposición $\mathfrak{G}^*_R$.

En virtud de 4(120), esto lleva a:

$$\textit{Dem}\ [\textit{Neg Sub}\ r\ 17\ \textit{Ngd}(N_s)], \text{ es decir:}$$

La proposición $\sim \mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$, cuyo número-G es $[\textit{Neg Sub}\ r\ 17\ \textit{Ngd}(N_s)]$ es derivable.

Y por otra parte, si la proposición $\mathfrak{G}^*_R$, es decir, $(\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{P}_R\ (\mathfrak{x}_1, N_q)$, es derivable, la proposición $\mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$ es también derivable, por aplicación del primer esquema de axiomas para el cuantificador de universalización (que da:

$$(\mathfrak{x}_1)\ \mathfrak{P}_R\ (\mathfrak{x}_1, N_q) \rightarrow \mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q))$$

y de la regla de consecuencia.

Por tanto, tendremos:

Las proposiciones $\mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$ y $\sim \mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$ son ambas derivables, lo que contradice la hipótesis de coherencia.

Por consiguiente, no se puede suponer que $\mathfrak{G}^*_R$ sea derivable en *LFG-R.*

Esta demostración sigue exactamente la primera parte de la demostración del § 96. Pero también se podría utilizar la propiedad 1(118) del predicado *Dem-R.* Si $\mathfrak{G}^*_R$ es derivable, se tiene: *Dem-R i.*

La proposición que representa este enunciado en *LFG-R* es $\sim \mathfrak{G}^*_R$.

En virtud de 2(120), efectivamente, la proposición de *LFG-R* que corresponde a *Fdr-R s i* es *Neg Sub r* 17 *Ngd*(N_s), es decir, la proposición $\sim \mathfrak{P}_R\ (N_s, N_q)$. La proposición que corresponde a *Dem-R i,* es decir, a (EX) *Fdr-R X i,* es, por tanto, $(E\,\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{P}_R\ (\mathfrak{X}_1, N_q)$, o también $\sim (\mathfrak{X}_1)\ \mathfrak{P}_R\ (\mathfrak{X}_1, N_q)$ [35], es decir, $\sim \mathfrak{G}^*_R$. El número-G de $\sim \mathfrak{G}^*_R$ es *Neg i.*

En virtud de 1(118), tenemos: *Dem-R i* → *Dem-R* (*Neg i*).

Así, si $\mathfrak{G}^*_R$ es derivable, $\sim \mathfrak{G}^*_R$ cumple la propiedad *Dem-R* y es igualmente derivable. Pero esto es imposible, puesto que *LFG-R* es coherente. Por tanto, $\mathfrak{G}^*_R$ no puede ser derivable.

b. $\mathfrak{G}^*_R$ *es irrefutable en LFG-R.*

Supongamos, en efecto, que $\mathfrak{G}^*_R$ sea refutable en *LFG-R,* es decir, que $\sim \mathfrak{G}^*_R$ sea derivable en *LFG-R.*

Como *LFG-R* es coherente, $\mathfrak{G}^*_R$ no es, por tanto, derivable. No existe, pues, ninguna serie de proposiciones que constituya una derivación de $\mathfrak{G}^*_R$ y, por el contrario, existe una serie de proposiciones que constituye una derivación de $\sim \mathfrak{G}^*_R$.

El número-G de $\sim \mathfrak{G}^*_R$ es *Neg i,* o sea: *Dem-R* (*Neg i*).

Como se ha visto anteriormente, la proposición que representa en *LFG-R* al enunciado *Dem-R i* es $\sim \mathfrak{G}^*_R$.

En virtud de 2(118) tenemos: *Dem-R* (*Neg i*) → *Dem-R* (*Neg Neg i*). *Pero* (*Neg Neg i*) es el número-G de $\sim \sim \mathfrak{G}^*_R$. Así, si $\mathfrak{G}^*_R$ es derivable, $\sim \sim \mathfrak{G}^*_R$ tiene la propiedad *Dem-R,* y es igualmente derivable. Pero entonces, como $\sim \sim \mathfrak{G}^*_R$ es equivalente a $\mathfrak{G}^*_R$, $\mathfrak{G}^*_R$ es también derivable, lo que resulta imposible, puesto que *LFG-R* es coherente. Por tanto, no se puede suponer que $\mathfrak{G}^*_R$ sea refutable en *LFG-R.*

La proposición $\mathfrak{G}^*_R$ es, por consiguiente, *indecidible en LFG-R.*

121. Caracterización de ciertas clases de proposiciones.

Rosser ha establecido un Teorema que caracteriza a ciertas clases de proposiciones de los sistemas del tipo *LFG-R.* En un sistema de este tipo, se pueden distinguir las siguientes categorías de proposiciones:

[35] Véase § 78, definición 3.

Proposiciones *decidibles* (derivables o refutables),
proposiciones *indecidibles*,
proposiciones *derivables* (que, por tanto, son decidibles),
proposiciones *inderivables* (que no son necesariamente refutables ni indecidibles).

ROSSER ha descrito las propiedades de estas diferentes categorías de proposiciones respecto a la enumerabilidad recursiva mediante el Teorema siguiente [36]:

(XII) *En un sistema coherente del tipo LFG-R* [37],

1) *la clase de las proposiciones decidibles es recursivamente enumerable pero no es recursiva general,*

2) *la clase de las proposiciones indecidibles no es recursivamente enumerable,*

3) *la clase de las proposiciones derivables es recursivamente enumerable pero no es recursiva general,*

4) *la clase de las proposiciones inderivables no es recursivamente enumerable.*

La demostración de este Teorema es análoga a la del Teorema de CHURCH, de que hablaremos más adelante [38].

SECCIÓN 4.—EXTENSION DEL TEOREMA DE GÖDEL A LOGICAS NO-CONSTRUCTIVAS.

122. LÓGICAS NO-CONSTRUCTIVAS DE ROSSER.

En los sistemas que hemos considerado hasta ahora (sistemas *LFG*, sistema *LFK* y sistemas del tipo *LFG-R*), las reglas de derivación tienen una forma constructiva [39], en el sentido de que la relación de *consecuencia inmediata*, dentro de estos sistemas, es representable recursivamente [40]. Esta propiedad supone, en particular, que estas reglas tengan un número finito de premisas. (En efecto, la regla de la consecuencia sólo comporta una premisa, y la del cuantificador de universalización, dos).

CARNAP ha puesto de manifiesto que se puede introducir reglas que no sean constructivas (en el sentido que acabamos de expresar) [41]. Un sistema que utilice tales reglas se denomina una *lógica no-constructiva.*

---

[36] ROSSER 3, pág. 91 (Teorema V).

[37] Las hipótesis de este Teorema son, por tanto, exactamente las mismas que las del Segundo Teorema de ROSSER, § 117.

[38] Véase § 151, § 152 y § 153.

[39] Véase § 32.

[40] § 107, condición 2; § 114, condición 1c; § 116, condición 2.

[41] CARNAP 3. Véase también CARNAP 2 y 4.

CARNAP introduce en particular una regla referente al cuantificador de universalización que incluye un número infinito de premisas: esta regla permite hacer preceder del cuantificador de universalización a cualquier expresión que se verifique de todos los números enteros [42]. A esta regla la designaremos con *Re-C*.

Su formulación puede ser como sigue:

Si $A(\Theta)$ es una proposición de una variable libre del primer tipo (expresión predicativa) tal que todas las proposiciones cerradas $A(\kappa)$ son derivables, entonces la proposición cerrada $(\Theta)\ A(\Theta)$ es también derivable.

ROSSER ha puesto de manifiesto que el Teorema de GÖDEL puede ser extendido a sistemas que utilicen la regla *Re-C* [43].

Los sistemas que este autor considera forman una serie ordenada transfinita de lógicas no-constructivas. Partiendo del sistema *LFG* de GÖDEL, llega a obtener esta serie de sistemas admitiendo sucesivamente 1, 2, ..., ω, $\omega + 1$, ..., utilizaciones de la regla *Re-C* (sin incluir ω^2).

Designemos por LFG_0 el sistema *LFG* de GÖDEL.

Designemos por Re_1 y Re_2 las dos reglas de derivación de LFG_0 (regla de la consecuencia y regla para el cuantificador de universalización).

Se dice que una clase de proposiciones es *cerrada respecto a la aplicación de estas reglas* si es cerrada respecto a la relación de *consecuencia inmediata* (definida por medio de estas reglas).

Dado LFG_0, se puede definir un sistema LFG_ν, donde ν es un ordinal cualquiera, por medio de una *inducción transfinita* [44].

1) *Paso de un ordinal a su sucesor.*

Supongamos que LFG_μ está previamente definido.

Añadamos a las proposiciones derivables de LFG_μ todas las proposiciones cerradas $(\Theta)\ A(\Theta)$ tales que $A(\Theta)$ sea una proposición de una variable libre del primer tipo y que todas las proposiciones $A(\kappa)$ sean derivables en LFG_μ. $LFG_{\mu+1}$ se definirá como el sistema cuya clase de proposiciones derivables contienen el conjunto así definido y es cerrada respecto a la aplicación de las reglas Re_1 y Re_2.

2) *Paso de una serie de ordinales a un ordinal-límite.*

Sea ξ un ordinal definido como el límite de un conjunto ordenado de ordinales μ_ν.

Supongamos que $LFG_{\mu\nu}$ esté definido para todo ordinal μ_ν de este conjunto.

LFG_ξ se definirá como el sistema cuya clase de proposiciones derivables contiene todas las proposiciones que son derivables en uno al menos de los sistemas $LFG_{\mu\nu}$. La clase de las proposiciones derivables de LFG_ξ es, pues, la reunión de todas las clases de proposiciones derivables correspondientes a los sistemas $LFG\mu_\nu$ $(\nu < \xi)$ [45].

---

[42] CARNAP 3, pág. 173.

[43] ROSSER 4.

[44] Véase NOTA IV, § 259.

[45] La *reunión* de varias clases Cl_1, Cl_2, ..., Cl_m es la clase que contiene todos los elementos que forman parte de una cualquiera de las clases Cl_i. Por consiguiente, contiene todos los elementos de Cl_1, todos los de Cl_2..., todos los de Cl_m.

LFG_1 puede definirse como el sistema que permite un uso de la regla *Re-C*,

LFG_2 como el sistema que permite dos usos de esta regla y, en general, LFG_ν como el sistema que permite ν usos de esta regla.

Una clase de proposiciones se dice que es *cerrada respecto a la aplicación de la regla Re-C* si, cuando contiene el conjunto de las proposiciones $A(\kappa)$ (siendo $A(\Theta)$ una proposición de una variable libre del primer tipo), contiene también la proposición $(\Theta)\ A(\Theta)$.

Existe un número ordinal ν ($> \omega$) tal que la clase de las proposiciones derivables de LFG_ν es cerrada respecto a la aplicación de la regla *Re-C*.

Se puede demostrar que, si la clase de las proposiciones derivables de LFG_ν es cerrada respecto a la aplicación de la regla *Re-C*, para todo $\xi > \nu$, LFG_ξ es idéntico a LFG_ν [46].

Designemos por la notación *LFG*-Ω al sistema cuya clase de las proposiciones derivables es la mínima clase de proposiciones que contiene los axiomas de LFG_0 y que es cerrada a la vez respecto a la aplicación de las reglas Re_1, Re_2 y *Re-C*.

123. Existencia de proposiciones indecidibles en estas lógicas.

Mediante adecuadas hipótesis de coherencia, Rosser ha extendido sucesivamente a todos estos sistemas el Teorema de Gödel.

Para todos los sistemas LFG_ν, con $\nu < \Omega$, basta con utilizar la condición de coherencia ordinaria.

1. (XIII) *Si LFG_1 es coherente, existen proposiciones indecidibles en LFG_1* [47].

2. (XIV) *Para n finito y diferente de* 0, *si LFG_n es coherente, existen proposiciones indecidibles en LFG_n* [48].

3. (XV) *Para n finito* ($n \geqq 0$), *si $LFG_{\omega+n}$ es coherente, existen proposiciones indecidibles en $LFG_{\omega+n}$* [49].

Para el sistema *LFG*-Ω es preciso introducir una hipótesis suplementaria de coherencia.

Designemos por *Dem*-Ω el predicado *derivable en LFG*-Ω.

El enunciado aritmético *Dem*-Ω *a* significa: la proposición en la que *a* es el número-G es derivable en *LFG*-Ω.

Diremos que un sistema *LF* es Ω-*coherente* si, cualquiera que sea *a*, la proposición que representa en *LF* el enunciado *Dem*-Ω *a* no es derivable en *LF*, a menos que la proposición $Ngd^{-1}(a)$ no sea derivable en *LF*.

---

[46] Rosser 4, pág. 133.
[47] Rosser 4, pág. 131 (Teorema 2).
[48] Rosser 4, pág. 132 (Teorema 6 B).
[49] Rosser 4, pág. 132 (Teorema 8, B). Para $n = 0$, se tiene el caso de LFG_ω.

ROSSER ha demostrado el siguiente teorema [50]:

(XVI) *Si LFG-Ω es coherente y Ω-coherente, existen proposiciones indecidibles en LFG-Ω.*

SECCIÓN 5.—PROPOSICIONES INDECIDIBLES DE FORMA SIMPLE.

124. PROPOSICIONES INDECIDIBLES CORRESPONDIENTES A PROBLEMAS ELEMENTALES.

Los sistemas que hemos considerado hasta aquí, son sistemas muy capaces: por incluir la teoría de tipos, permiten expresiones de un nivel de complejidad muy elevado.

Hay que preguntarse si las proposiciones indecidibles que existen en estos sistemas hacen intervenir necesariamente medios de expresión muy complejos. O, para presentar las cosas de otro modo, hay que preguntarse si es posible construir proposiciones indecidibles utilizando solamente una parte del formalismo *LFG* (y de sus extensiones).

GÖDEL ha aportado precisiones sobre el grado de complejidad de las proposiciones indecidibles haciendo patente que existen proposiciones indecidibles de forma relativamente simple. Más exactamente, ha establecido que existen proposiciones indecidibles de naturaleza aritmética y proposiciones indecidibles que corresponden a proposiciones del *cálculo funcional restringido.*

Así, la construcción de proposiciones indecidibles no exige necesariamente la disposición de medios formales capaces; las teorías de naturaleza elemental pueden ya dar lugar a proposiciones indecidibles. O también: existen problemas de naturaleza elemental a los que corresponden, en *LFG,* proposiciones indecidibles.

Se denomina *predicado aritmético* al que se puede definir únicamente por medio de funciones de suma y multiplicación (aplicados a números enteros), del predicado de igualdad, de los operadores lógicos de negación y disyunción y del cuantificador de universalización.

Como todo predicado recursivo es representable en *LFG,* todo predicado aritmético que es al mismo tiempo recursivo es representable en *LFG* a través de una determinada expresión predicativa.

Nosotros denominaremos *proposición aritmética de LFG* a toda proposición cerrada de *LFG* obtenida a partir de una expresión predicativa que represente un predicado aritmético, reemplazando las variables por constantes individuales o ligándolas por un cuantificador. Una *proposición aritmética* representa, por consiguiente, en *LFG,*

[50] ROSSER 4, pág. 134 (Teorema 12).

un *enunciado aritmético* [51] formado únicamente por *enteros*, funciones de *adición* y de *multiplicación*, por el predicado de *igualdad*, de los operadores ~ y V y por el *cuantificador de universalización*.

GÖDEL demuestra que todo predicado recursivo es aritmético [52].

Apoyándose en esta propiedad y en el carácter recursivo del predicado representado por la expresión predicativa $\mathfrak{B}$ [53], demuestra fácilmente que, en todo sistema que responda a las condiciones de su teorema, existen *proposiciones aritméticas indecidibles*.

El *cálculo funcional restringido* es el sistema que se obtiene añadiendo a los símbolos del cálculo funcional de primer orden [54] variables funcionales de orden 1 (correspondientes a funciones de individuos que tienen por valores individuos) y la constante predicativa = (predicado de *igualdad*), con la restricción siguiente: la constante predicativa = no puede tener por argumentos más que variables individuales o expresiones formadas aplicando una variable funcional a variables individuales [55].

Una proposición del cálculo funcional restringido se dice *semánticamente indecidible* si no es posible demostrar que no es ni *válida* ni *no-realizable* [56].

GÖDEL ha demostrado el siguiente teorema [57]:

(XVII) *A toda proposición* (Θ) A (Θ) *de LFG, tal que* A (Θ) *sea una expresión predicativa que represente en LFG un predicado recursivo, corresponde una proposición B del cálculo funcional restringido tal que, si* (Θ) A (Θ) *es derivable en LFG, se puede demostrar que B es realizable, y recíprocamente.*

Llegando a la conclusión de que, en todo sistema que responda a las mismas condiciones que el *LFG*, existen proposiciones indecidibles que corresponden a proposiciones semánticamente indecidibles del cálculo funcional restringido [58].

125. EL PROCEDIMIENTO DE KALMÁR. HIPÓTESIS DE KALMÁR.

KALMÁR ha ideado un procedimiento muy sencillo para construir proposiciones indecidibles en un sistema que responda a ciertas propiedades generales [59]. Su procedimiento se aplica solamente a funciones uniargumentales.

Consideremos un sistema *LFR* dotado de las siguientes propiedades:

1. *LFR* es coherente.

---

[51] Véase § 70.
[52] GÖDEL 3, pág. 191 (Teorema VII).
[53] Esta expresión ha sido introducida y definida en el § 93.
[54] Véase § 47.
[55] Tal expresión corresponde a un individuo: representa el valor adoptado por una función para los argumentos considerados.
[56] Véase § 29.
[57] GÖDEL 3, pág. 194 (Teorema X).
[58] GÖDEL 3, pág. 193 (Teorema IX).
[59] KALMÁR 5, 10 y 11.

2. *LFR* contiene expresiones que representan a los números enteros y una constante predicativa que representa el predicado de igualdad entre enteros. Utilizando las mismas notaciones que en el sistema *LFG* de GÖDEL, tenemos:

si los enteros m y n son iguales,
la proposición $N_m = N_n$ es derivable en *LFR*.

3. *LFR* contiene expresiones que representan funciones de enteros uniargumentales y una expresión predicativa biargumental, $\mathfrak{Dnf}$ (*desigualdad funcional*).

El primer argumento de $\mathfrak{Dnf}$ debe ser una expresión funcional; el segundo, una constante individual (correspondiente a un entero).

$\mathfrak{Dnf}$ se define de la manera siguiente:

Sea $\mathfrak{F}$ una expresión de *LFR* que representa una función de enteros uniargumental que nunca adopta el valor m.

La expresión $\mathfrak{F}$ es tal, por consiguiente, que, cualquiera que sea el entero n,

$$\sim (\mathfrak{F}\, N_n = N_m).$$

Entonces, tenemos: $\mathfrak{Dnf}\, \mathfrak{F}\, N_m$.
Y, recíprocamente, si $\mathfrak{Dnf}\, \mathfrak{F}\, N_m$,
cualquiera que sea n, $\sim (\mathfrak{F}\, N_n = N_m)$.

4. Se dispone de una aritmetización de *LFR*, en el sentido de GÖDEL. Entonces, el sistema *LFR* contiene una expresión funcional $\mathfrak{Rfm}$, definida como sigue sobre la base de la aritmetización de *LFR*:

Se denomina proposición diagonal a una proposición de la forma $(\mathfrak{Dnf}\, \mathfrak{F}\, N_f)$, donde $\mathfrak{F}$ es una cierta expresión funcional y f el número-G que corresponde a $\mathfrak{F}$ en virtud de la aritmetización de *LFR*. Se denomina *derivación diagonal* a una derivación cuya última proposición es una proposición diagonal. Si esta proposición es de la forma $(\mathfrak{Dnf}\, \mathfrak{F}\, N_f)$, el entero f se denomina *índice* de esta derivación.

La función $\mathfrak{Rfm}$ está definida por sus valores de la manera siguiente:

a) si n es el número-G de una derivación diagonal de índice m, la proposición $(\mathfrak{Rfm}\, N_n = N_m)$ es derivable en *LFR*;

b) si n no es de esta especie, la proposición $(\mathfrak{Rfm}\, N_n = 0)$ es derivable en *LFR*.

Las condiciones 2 y 3 se reducen a exigir que una parte de la Aritmética sea representable en *LFR*. La condición 4 se reduce a exigir que la propiedad metateórica *ser el número-G correspondiente a la derivación de una proposición del tipo* $(\mathfrak{Dnf}\, \mathfrak{F}\, N_f)$ sea representable en *LFR*.

126. El Teorema de Kalmár.

Mediante estas hipótesis se puede construir en *LFR* una proposición que sea indecidible en un sentido ligeramente particular.

Sea k el número-G correspondiente a la expresión funcional $\mathfrak{Rfm}$.

Formemos la proposición diagonal ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$). Esta proposición da lugar al siguiente teorema [60]:

(XVIII) *La proposición* ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$) *es ω-indecidible en LFR, es decir: la proposición* ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$) *no es derivable en LFR* (o también: existe al menos un entero n para el cual la proposición $\sim$ ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$) no es derivable en *LFR*).

Y, por otra parte, cualquiera que sea el entero n, la proposición ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$) *no es derivable en LFR.*

Este teorema se demuestra en dos etapas.

1. *La proposición* ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$) *no es derivable en LFR.*

En efecto, supongamos que lo sea. Sea entonces r el número-G correspondiente a su derivación. Esta proposición ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$) es una proposición diagonal de índice k.

En virtud de la definición de $\mathfrak{Klm}$, la proposición ($\mathfrak{Klm}\ N_r = N_k$) es, pues, derivable en *LFR*.

Pero, por otra parte, en virtud de la definición de $\mathfrak{Snf}$, la proposición $\sim$ ($\mathfrak{Klm}\ N_r = N_k$) es también derivable en *LFR*, lo que contradice la hipótesis de coherencia.

Por tanto, no se puede suponer que la proposición ($\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k$) sea derivable en *LFR*.

2. *Cualquiera que sea el entero n, la proposición* $\sim$ ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$) *es derivable en LFR.*

Consideremos el entero m, definido como sigue en función de n:

si n es el número-G de una derivación diagonal, m es el índice de esta derivación;

si n no es tal número, $m = 0$.

En tal caso, en virtud de la definición de $\mathfrak{Klm}$, la proposición ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_m$) es derivable en *LFR*, cualquiera que sea m.

Si $m \neq k$, la proposición $\sim$ ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$) es derivable en *LFR*.

Si $m = k$, la proposición ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$) significa que n es el número-G de una derivación diagonal de índice k.

Por consiguiente, la proposición final de esta derivación es:

$$\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{Klm}\ N_k.$$

Esta proposición, al ser derivable, en virtud de la definición de $\mathfrak{Snf}$, la proposición $\sim$ ($\mathfrak{Klm}\ N_n = N_k$), es, por tanto, derivable en *LFR*, cualquiera que sea n.

A las hipótesis adoptadas para *LFR* se puede añadir una hipótesis especial de coherencia según la cual, cualquiera que sea la expresión funcional $\mathfrak{F}$, no se puede dar simultáneamente:

$$\sim (\mathfrak{Snf}\ \mathfrak{F}\ N_m) \text{ es derivable en } LFR,$$

y, cualquiera que sea n, $\sim$ ($\mathfrak{F}\ N_n = N_m$) es derivable en *LFR*.

[60] KALMÁR 10, Teorema III.

En tal supuesto, nuestro teorema se convierte en el siguiente:

(XIX) *La proposición* $(\mathfrak{Inf}\ \mathfrak{Rlm}\ N_k)$ *es indecidible en LFR* [61].

El primer punto de la demostración precedente permanece, en efecto, válido.

En cuanto al segundo punto, permite concluir, apoyándose en la hipótesis suplementaria de coherencia:

La proposición $\sim (\mathfrak{Inf}\ \mathfrak{Rlm}\ N_k)$ no es derivable en *LFR*.

La proposición indecidible construida por GÖDEL posee una propiedad circular. Lo mismo sucede con la de KALMÁR. Para hacerlo patente hay que recurrir a su significación intuitiva.

La proposición $(\mathfrak{Inf}\ \mathfrak{Rlm}\ N_k)$ representa el enunciado:

la función que representa la expresión $\mathfrak{Rlm}$ no adopta nunca el valor k.

Por otra parte, para que esta función adopte un cierto valor m, es decir, para que exista un entero n tal que la proposición $(\mathfrak{Rlm}\ N_n = N_m)$ sea derivable en *LFR*, es necesario y suficiente que exista en *LFR* una derivación de la proposición diagonal de índice m (en virtud de la definición de $\mathfrak{Rlm}$).

Así, la condición necesaria y suficiente para que esta función no adopte el valor k, es que la proposición diagonal de índice k no sea derivable en *LFR*.

Pero la proposición diagonal de índice k es precisamente $(\mathfrak{Inf}\ \mathfrak{Rlm}\ N_k)$.

La condición necesaria y suficiente para que la proposición $(\mathfrak{Inf}\ \mathfrak{Rlm}\ N_k)$ sea intuitivamente cierta (es decir, para que el enunciado que ella representa sea cierto) es que no sea derivable en *LFR*.

En esto reside el carácter circular de esta proposición. No se da solamente inadecuación entre verdad intuitiva y derivabilidad, sino también contradicción entre estos dos conceptos.

[61] KALMÁR 10, Teorema IV.

Capítulo V

El corolario de Gödel y la teoría de la demostración

Sección 1.—EL COROLARIO DE GÖDEL.

127. Enunciado y demostración del corolario de Gödel.

Gödel ha derivado de su teorema un corolario que tiene un alcance considerable desde el punto de vista de la *teoría de la demostración*. Este corolario se reduce esencialmente a lo siguiente: si un sistema es suficientemente capaz para que la Aritmética sea formalizable en él, es imposible formalizar en el interior de este sistema la demostración de su no-contradicción [1].

De aquí se sigue que, para establecer la no-contradicción de un sistema, se debe recurrir a medios de demostración que rebasan este sistema [2].

A continuación exponemos el enunciado preciso y la demostración de este corolario. El sistema de que se trata continúa siendo el sistema *LFG* anteriormente descrito [3].

El *corolario de* Gödel se enuncia como sigue:

(XX) *Si el sistema LFG es coherente, la proposición que representa en LFG la coherencia de LFG no es derivable en LFG* [4].

(Se supone, pues, la coherencia y no la ω-coherencia. En efecto, se trata de demostrar que una cierta proposición no es derivable. En la demostración del teorema, para

---

[1] Véase § 11.

[2] Es decir: que no son representables en este sistema.

[3] Véase Sección 2-III.

[4] Gödel 3, pág. 196, Teorema XI. La expresión *que representa en LFG el enunciado siguiente*: *la coherencia de LFG* debe entenderse así: que representa en LFG el enunciado metateórico *LFG es coherente.*

establecer que la proposición $\mathfrak{G}^*$ no es derivable, basta con suponer que *LFG* es coherente.)

Para demostrar este corolario se construye la proposición que representa en *LFG* la coherencia de *LFG* y se demuestra después que la derivabilidad de esta proposición supone la de la proposición indecidible $\mathfrak{G}^*$.

Designemos por *Pro* el predicado metateórico *ser una proposición de LFG.* El enunciado metateórico *LFG es coherente,* puede expresarse mediante el enunciado aritmético

(1) (EX) (*Pro X* & ~ *Dem X*).

(Existe una proposición cuyo número-G es *X* y que no es derivable en *LFG.* Esta condición basta para asegurar la coherencia de *LFG,* pues si un sistema es no-coherente, toda proposición es derivable de él.)

Representemos este enunciado por la notación abreviada:

Crt LFG (*LFG* es coherente).

El predicado *Dem* puede definirse por medio del predicado *Fdr.* Los predicados *Pro* y *Fdr,* al ser recursivos, son representables en *LFG.* Por otra parte, el sistema *LFG* contiene operadores proposicionales que corresponden a los símbolos de operación lógica que figuran en el enunciado 1(127) y en la definición de *Dem.* Por tanto, se puede afirmar que existe una proposición $\mathfrak{E}$ de *LFG* que representa en *LFG* el enunciado *Crt LFG.*

Sea *c* el número-G de $\mathfrak{E}$.

La demostración del teorema de GÖDEL establece que, si *LFG* es coherente, la proposición $\mathfrak{G}^*$ es inderivable [5]. Este resultado puede expresarse por medio del enunciado aritmético:

(2) *Crt LFG* → ~ *Dem i.*

Pero, por la definición del predicado *Dem i* [6], tenemos:

~ *Dem i* ↮ (X) ~ *Fdr X i* [7].

Por otra parte,

$i = Sbs\ q\ q$ [8].

Por consiguiente, la expresión 2(127) se transforma en:

(3) *Ctr LFG* → (X) ~ *Fdr X* (*Sbs q q*).

El enunciado (*X*) ~ *Fdr X* (*Sbs q q*) es precisamente el que representa, en *LFG,* la proposición $\mathfrak{G}^*$, cuyo número-G es *i* [9].

---

[5] Véase § 96, 1.
[6] Véase 1 (89).
[7] Se utiliza la equivalencia: ~ (*EX*) *A* (*X*) ↮ (*X*) ~ *A* (*X*).
[8] Véase § 94.
[9] Véase § 94.

Como el operador de *implicación* puede estar definido por los operadores de negación y de disyunción [10], y como éstos son recursivamente representables [11], el operador de implicación es recursivamente representable. Sea *Imp* la función que le representa.

Si *a* y *b* son los números-G de las proposiciones A y B, *Imp a b* será el número-G de la proposición (A → B).

El enunciado 3(127) puede representarse en *LFG* por la proposición:

$$\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{Z}^*.$$

El número-G de esta proposición es *Imp c i.* Los razonamientos que llevan a la afirmación del enunciado 3(127) sólo hacen intervenir las proposiciones y procedimientos de demostración que pertenecen a las matemáticas clásicas. Por tanto, pueden ser formalizados en *LFG.* Y la proposición ($\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{Z}^*$) puede considerarse derivable en *LFG.*

Si la proposición $\mathfrak{E}$ fuese derivable en *LFG,* como la proposición ($\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{Z}^*$) es derivable en ese sistema, la proposición $\mathfrak{Z}^*$ sería igualmente derivable.

Pero, en virtud del teorema de GÖDEL, si *LFG* es coherente, $\mathfrak{Z}^*$ no es derivable en *LFG.*

Por consiguiente, $\mathfrak{E}$ no es en ningún caso derivable en *LFG.*

Dicho de otra forma: la proposición que representa en *LFG* la coherencia de *LFG* no es derivable en *LFG.*

128. Extensiones del corolario de Gödel.

Como el teorema de GÖDEL se aplica a todo sistema que responde a las condiciones del § 107, el corolario de GÖDEL se aplica a todo sistema que responda a las condiciones 2 y 3 de este § 107 y que, además, sea coherente.

Por otra parte, ROSSER ha llevado a este corolario la misma generalización que para el teorema de GÖDEL respecto a la clase de las proposiciones derivables.

ROSSER demuestra el teorema siguiente:

(XXI) *Si un sistema del tipo LFG-R es coherente, la proposición que representa en este sistema su coherencia no es derivable en el sistema* [12].

También ha extendido este corolario a las lógicas no-constructivas que este autor ha estudiado, pero en este campo los resultados son más complejos. En efecto, es posible, añadiendo a un sistema *LF* procedimientos oportunos de demostración, obtener un sistema más capaz en el que se puede demostrar la coherencia de *LF.*

ROSSER demuestra precisamente que, elevándose en la jerarquía de los sistemas LFG_ν, es posible obtener demostraciones de coherencia para los sistemas de índice inferior.

---

[10] Véase § 78. Definición 5.

[11] Véase § 88.

[12] ROSSER 3, pág. 89, Teorema I, B. Para el sentido de la expresión *representa,* véase nota 4 de este capítulo.

Así, tenemos los siguientes resultados:

1. (XXII) *Si* LFG_1 *es coherente, la proposición que representa en* LFG_1 *la coherencia de* LFG_1 *no es derivable en* LFG_1 [13].

2. (XXIII) *La proposición que representa en* LFG_1 *la coherencia LFG es derivable en* LFG_1 [14].

3. (XXIV) *Para n finito y diferente de* o, *si* LFG_n *es coherente, la proposición que representa en* LFG_n *la coherencia de* LFG_n *no es derivable en* LFG_n [15].

4. (XXV) *Para n finito y diferente de* o, *la proposición que representa en* LFG_{n+1} *la coherencia de* LFG_n *es derivable en* LFG_{n+1} [16].

5. (XXVI) *Para n finito (y eventualmente nulo), si* $LFG_{\omega+n}$ *es coherente, la proposición que representa en* $LFG_{\omega+n}$ *la coherencia de* $LFG_{\omega+n}$ *no es derivable en* $LFG_{\omega+n}$ [17].

6. (XXVII) *Para n finito y* $\nu < \omega + n$, *la proposición que representa en* $LFG_{\omega+n}$ *la coherencia de* LFG_ν *es derivable en* $LFG_{\omega+n}$ [18].

7. (XXVIII) *Si LFG-*Ω *es coherente, la proposición que representa en LFG-*Ω *la coherencia de LFG-*Ω *no es derivable en LFG-*Ω [19].

Sección 2.—Consecuencias para la teoria de la demostracion.

129. Aplicación del corolario de Gödel al formalismo de la teoría de números clásica.

El corolario de Gödel explica el fracaso de las tentativas acometidas entre 1924 [20] y 1932 [21] para demostrar la no-contradicción de la Aritmética [22].

---

[13] Rosser 4, pág. 131, Teorema 1.
[14] Rosser 4, pág. 131, Teorema 3.
[15] Rosser 4, pág. 132, Teorema 6, A.
[16] Rosser 4, pág. 132, Teorema 7.
[17] Rosser 4, pág. 132, Teorema 8, A.
[18] Rosser 4, pág. 133, Teorema 9.
[19] Rosser 4, pág. 134, Teorema 10.
[20] Memoria de Ackermann sobre *El fundamento de la exclusión de tercero por medio de la teoría de la no-contradicción de Hilbert.* (Ackermann 1).
[21] Memoria de Herbrand *Sur la non-contradiction de l'arithmétique.* (Herbrand 4).
[22] Es preciso incluir en estas tentativas una demostración dada por Hilbert y Bernays (Hilbert y Bernays 1. Segundo tomo). Esta demostración se refiere al formalismo en el que los operadores de cuantificación son reemplazados por un operador de selección (llamado por Hilbert y Bernays *símbolo-*ε) mediante el cual se pueden definir los operadores de cuantificación y la función *Min.*

Como estaba previsto en el esquema hilbertiano, para demostrar la no-contradicción de la Teoría de Números es necesario dotarse de un sistema formal en el que esta teoría sea formalizable. Todos los trabajos sobre la no-contradicción de la Teoría de Números utilizan un sistema *LFN* (*formalismo de la Teoría de Números clásica*) que responde a esta condición. Este sistema incluye la Lógica de Predicados de primer orden, además de un cierto número de constantes (individuales, predicativas y funcionales) y de axiomas, y un sistema de definición: los axiomas de PEANO (comprendido en ellos el principio de inducción) [23], y otros axiomas que sirven para definir el predicado de igualdad y un esquema correspondiente al esquema de recursión primitiva [24].

Es posible demostrar que todos los conceptos y razonamientos de la Aritmética clásica (y, por ejemplo, la teoría de las Congruencias) son representables en este sistema.

Para demostrar la no-contradicción de la Aritmética basta, por tanto, con demostrar la coherencia del sistema *LFN*. Este sistema, aunque menos capaz que el sistema *LFG* de GÖDEL (puesto que no contiene la Teoría de Tipos), responde a las condiciones generales 2 y 3 del § 107. El Corolario de GÖDEL puede, pues, aplicársele. Así pues, si el sistema *LFN* es coherente, no es posible demostrar la coherencia de *LFN* sin recurrir a procedimientos de razonamiento que no pueden ser formulados en *LFN*, es decir, que rebasan el marco de la Aritmética.

En sus demostraciones, ACKERMANN, VON NEUMANN y HERBRAND, fieles a la exigencia finitista de HILBERT, pretenden no utilizar sino procedimientos de razonamiento de tipo finito y quedarse, por consiguiente, muy dentro de los límites de representatividad de *LFN*.

En general se puede demostrar que, efectivamente, estas demostraciones pueden ser enteramente formalizadas en el sistema *LFN*. También se explica que no consigan demostrar la no-contradicción sino de una parte solamente de la Aritmética. (Demuestran la coherencia de un formalismo que sólo contiene una forma limitada del principio de inducción: en este formalismo, el principio de inducción sólo puede ser aplicado a proposiciones generales).

130. PROCEDIMIENTOS FINITISTAS Y PROCEDIMIENTOS CONSTRUCTIVOS.

El Corolario de GÖDEL nos lleva a poner en duda el enfoque finitista de la Teoría de la Demostración.

Poco importa aquí distinguir entre procedimiento *finitista* y procedimiento *constructivo*: esta última noción es más amplia que la primera. Al exigir que las demostraciones metateóricas sean constructivas, no se hace sino formular una exigencia

[23] Véase § 2.
[24] Véase § 55.

muy general que responde a una cierta idea intuitiva, pero a la cual es necesario dotar, en cada caso, de un contenido preciso, indicando cuáles son los procedimientos de razonamiento que se han admitido. Al exigir que las demostraciones metateóricas utilicen solamente razonamientos *que no salgan de lo finito,* se da de la exigencia de constructividad una interpretación particular que le confiere su sentido más estricto.

El punto de vista finitista puede, por otra parte, presentarse en forma más o menos exigente. En los primeros trabajos de HILBERT sobre la teoría de la demostración, creía poder limitarse a consideraciones de Aritmética intuitiva completamente elemental y dispensarse de todo razonamiento por inducción. En seguida se vio obligado a ampliar esta perspectiva inicial. Se debe a HERBRAND la formulación más exacta de lo que puede denominarse punto de vista finitista clásico: este punto de vista rechaza la utilización de la inducción completa, pero admite los razonamientos de recurrencia [25].

Utilizando los procedimientos de aritmetización se puede hacer corresponder a los razonamientos metateóricos, razonamientos aritméticos y dotar al criterio de HERBRAND de una formulación más precisa.

Se denominará *finitista* a todo razonamiento que pueda ser expresado por la aritmética recursiva [26] amputada del principio de inducción (y comportando, por consiguiente, las operaciones lógicas elementales a excepción de las operaciones de generalización, los axiomas para el predicado de igualdad y el esquema de recursión primitiva, completados eventualmente por las definiciones de ciertas funciones recursivas generales).

Las demostraciones de ACKERMANN, VON NEUMANN y HERBRAND rebasan este criterio en determinados puntos. Se puede mostrar, efectivamente, que ciertos enunciados que figuran en estas demostraciones no pueden expresarse en la aritmética recursiva, pues hacen intervenir operaciones de generalización (y, por tanto, cuantificadores). (Se encuentran, por ejemplo, en estas demostraciones enunciados que incluyen la expresión: *para toda sustitución de números enteros por variables de tal proposición*). Y no es posible eliminar estos cuantificadores recurriendo, por ejemplo, a esquemas de derivación apropiados. Sin embargo, estas demostraciones continúan siendo constructivas.

Si la noción de constructividad no tiene un contenido unívocamente determinado, no se pueden precisar en cualquier manera sus límites indicando lo que se puede entender por un procedimiento de razonamiento *no-constructivo.*

Los razonamientos no-constructivos pueden reducirse a dos categorías:

1) Razonamientos que se fundan en la posibilidad de realizar un número infinito de actos de elección (a un razonamiento de este género corresponde el axioma de elección introducido por ZERMELO en su axiomática de la Teoría de Conjuntos).

2) Razonamientos que se fundan en el principio de *infinito extensivo*: *se puede tratar una colección infinita como un todo, dada de una sola vez.*

[25] Véase § 11, pág. 47.
[26] Véase § 58.

El sistema *LFN* autoriza razonamientos del segundo tipo bajo la forma del *principio general de exclusión de tercero* [27]: cualquiera que sea el predicado *P*, o bien este predicado es cierto de todo número o bien hay al menos un número que verifica el predicado contradictorio de *P*, y no existe otra posibilidad.

Por tanto, supone razonamientos no-constructivos. Por el contrario, las demostraciones evocadas anteriormente no hacen intervenir razonamientos de este tipo.

Pero el corolario de GÖDEL muestra que, para realizar sus objetivos, la Teoría de la Demostración debe rebasar el marco del razonamiento admitido por ACKERMANN, VON NEUMANN y HERBRAND, e incluso el marco del sistema *LFN*, es decir, debe recurrir a procedimientos de razonamiento que no son formalizables en *LFN*.

131. NUEVA SIGNIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN.

A partir de ahora surgen dos cuestiones.

a) ¿Nos vamos a ver obligados a utilizar razonamientos no-constructivos?

b) La Teoría de la Demostración, ¿conserva un sentido en estas condiciones? Y en caso afirmativo, ¿cuál es este sentido?

A primera vista puede parecer que el Corolario de GÖDEL impone a la metateoría la renuncia a la exigencia de constructividad e incluso desbarata completamente la teoría de la demostración. Si se deben rebasar los límites de un sistema para demostrar su coherencia, ¿no nos veremos forzados a demostrar el menos por el más?, ¿tendría sentido tal empresa? ¿No nos veremos arrastrados a una regresión indefinida? La demostración de la coherencia de un sistema LF_1 sólo podrá ser formalizada en un sistema más amplio LF_2: pero, para establecer la coherencia de éste, será preciso construir una demostración que, a su vez, sólo podrá ser formalizada dentro de un sistema más amplio LF_3, y así sucesivamente. La demostración de coherencia quedaría pendiente de esta regresión que nunca terminaría.

Si es así, es evidente que hay que renunciar a establecer la coherencia de cualquier sistema.

Afortunadamente no es esto lo que ocurre en la realidad. Para demostrar la coherencia de un sistema *LF* deberemos utilizar, indudablemente, procedimientos de razonamiento que no pueden ser formalizados en *LF*. Pero esto no significa que se deba utilizar al mismo tiempo todos los procedimientos de razonamiento propios de *LF* (efectivamente formalizados en *LF*). Se podrán descartar, entre éstos, aquellos que no responden a ciertos criterios apropiados.

En particular, para demostrar la coherencia de *LFN*, se pueden prohibir los procedimientos de razonamiento de *LFN* (formalizados en *LFN*) que no son constructivos. Y por otra parte podemos disponer las cosas de modo que todos los pro-

[27] El *principio simple de la exclusión de tercero* es el de la Lógica Proposicional: $A \vee \sim A$. El *principio general de exclusión de tercero* es el de la Lógica de Predicados de primer orden: $(\Theta)\, A\,(\Theta) \vee (E\,\Theta) \sim A\,(\Theta)$.

cedimientos de razonamiento no formalizables en *LFN* a los que sea forzoso recurrir sean constructivos, pues *LFN* no agota en absoluto las posibilidades del razonamiento constructivo.

Si en tales condiciones se consigue establecer la coherencia de *LFN*, habremos demostrado que los razonamientos de la Aritmética, incluso los no-constructivos, no pueden llevar a una contradicción.

La Teoría de la Demostración conserva, pues, un sentido, no obstante el Corolario de GÖDEL, pero a condición de ampliar sensiblemente el punto de vista finitista tal como ha sido formulado por HERBRAND. Y, al ampliar este campo de apreciación, recibe un nuevo sentido.

132. LA DEMOSTRACIÓN POR MODELO DIRECTO Y EL PROCEDIMIENTO DE LA REDUCCIÓN.

Se pueden concebir varios procedimientos para obtener una demostración de no-contradicción de la Aritmética, teniendo en cuenta el Corolario de GÖDEL.

Todas las demostraciones de no-contradicción utilizan un modelo, pero este modelo puede ser *directo* o *indirecto*. El modelo es *directo* cuando cada proposición se asocia directamente a un enunciado formado por elementos del modelo. Es *indirecto* cuando la correspondencia entre el sistema y el modelo está asegurada por medio de un cierto número de transformaciones (practicadas sobre las proposiciones del sistema).

Los primeros ensayos de demostración utilizaban un modelo indirecto y se servían del procedimiento de la *reducción*.

Se denomina *proposición numérica* a una proposición de *LFN* constituida únicamente de *cifras* [28], de la constante predicativa = y de los operadores proposicionales $\sim$, &, V, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. Por tanto, tal proposición no contiene ni variables ni cuantificadores.

A cada proposición numérica se asocia un enunciado aritmético reemplazando las cifras por los enteros que éstos representan y dando a la constante = y a los operadores proposicionales su significación intuitiva.

Se da una regla de interpretación que permite determinar la verdad o la falsedad de todo enunciado asociado de la forma indicada a una proposición numérica [29].

Una proposición numérica se dice que es *cierta* o *falsa* según que vaya asociada a un enunciado cierto o falso. En virtud de la regla de interpretación elegida, la proposición $\sim (N_0 = N_0)$ es falsa.

Se indica un cierto número de procedimientos de transformación que permitan hacer corresponder a una derivación cualquiera de *LFN* otra derivación cuyas proposiciones tengan un carácter más simple. Toda transformación operada de esta forma se denomina *etapa de reducción*. Si es posible transformar una derivación dada —en

[28] Véase § 77, 1.

[29] Para una formulación de esta regla, véase § 71, 1, 6, 7, 8, 9 y 10.

un número finito de etapas de reducción— en una derivación cuya última proposición sea una proposición numérica cierta, se dice que esta derivación es ***reducible.*** La derivación obtenida se denomina su ***reducida.*** Y la serie de etapas recorridas se denomina ***reducción.***

Si se puede demostrar que toda derivación de *LFN* es reducible, se ha demostrado la coherencia de *LFN.* Pues, en tal caso, la proposición $\sim (N_0 = N_0)$ no puede ciertamente ser la última proposición de una derivación de *LFN* y existe al menos una proposición que no es derivable en *LFN.*

Pero la dificultad está en demostrar que toda derivación es efectivamente reducible, o más exactamente, fijar un límite superior al número de etapas de reducción necesarias para tranformar una derivación cualquiera en su reducida. En este cometido han fracasado las demostraciones de ACKERMANN, VON NEUMANN y HERBRAND: éstas no han podido establecer que el proceso de reducción puede efectivamente terminarse cuando la derivación incluye un esquema de inducción. (Se puede demostrar que, en tal caso, el número de etapas de reducción puede hacerse arbitrariamente grande).

Este procedimiento de demostración ha sido reconsiderado por GENTZEN, pero es posible también recurrir a un modelo directo.

133. INTERPRETACIÓN DEL SISTEMA LFN EN LA ARITMÉTICA INTUITIVA.

El sistema *LFN* se puede interpretar dentro del marco de la Aritmética intuitiva. A toda proposición de *LFN* se asocia directamente un enunciado de la Aritmética intuitiva (reemplazando los diferentes objetos de *LFN* por los elementos que representan).

Se establece una regla de interpretación que permita decidir sobre la certeza o la falsedad de todo enunciado de la Aritmética intuitiva [30]. Una proposición de *LFN* se dice entonces *cierta* o *falsa* según que vaya asociada a un enunciado aritmético cierto o falso. En tal supuesto se demuestra que en la correspondencia adoptada, toda proposición derivable de *LFN* es cierta. Esta correspondencia, es, por tanto, una interpretación.

Por otra parte, en virtud de la regla de interpretación adoptada, la negación de una proposición cierta es falsa. La proposición $\sim (N_0 = N_0)$ es, pues, falsa, por no ser derivable en *LFN.* De esta forma queda establecida la coherencia de *LFN.*

Para realizar esta demostración es obligado expresar en forma aritmética ciertos conceptos metateóricos y, en particular, hay que construir un predicado aritmético *Pvr* que corresponde a la propiedad *ser el número-G de una proposición cierta.* La definición de *Pvr* puede hacer intervenir un esquema que rebase el marco del sistema *LFN,* lo que se puede demostrar por dos métodos diferentes.

[30] Véase § 71.

Uno de estos métodos se apoya sobre un teorema debido a TARSKI, del que se tratará más adelante [31].

Se dice que el concepto de *verdad de un sistema formal LF* puede ser formalizado en este sistema si existe una expresión predicativa $\mathfrak{Vri}$ de una variable, perteneciente a *LF*, y tal que, si *a* es el número-G de una proposición $\mathfrak{A}$ de *LF*, la equivalencia

$$\mathfrak{Vri}\ N_a \leftrightarrow \mathfrak{A}$$

es derivable en *LF* (cualquiera que sea la propisición $\mathfrak{A}$).

TARSKI demuestra que el concepto de verdad de un sistema *LFT*, que responda aproximadamente a las hipótesis del Teorema de GÖDEL, no puede ser formalizado en este sistema.

Es así que el sistema *LFN* responde a estas hipótesis. Por tanto, se establece fácilmente que, si el predicado *Pvr* pudiese representarse en *LFN*, se tendría por ese mismo hecho una formalización, en *LFN*, del concepto de certeza de *LFN*.

Hay otro modo de establecer que el predicado *Pvr* no es representable en *LFN*.

Se puede demostrar que en tal supuesto se podría derivar, en *LFN*, una proposición que representase el enunciado: *LFN es coherente*. Pero, según el Teorema de GÖDEL, si *LFN* es coherente, esto no es posible.

Si se añadiese a *LFN* el esquema necesario para formalizar la expresión *Pvr* se obtendría un sistema *LFN** en el cual se podría formalizar totalmente la demostración de coherencia por modelo directo que ha sido esbozada anteriormente.

Pero tal demostración no sería constructiva. El esquema que se debe añadir a *LFN* hace, en efecto, intervenir el sentido intuitivo de los enunciados de la Aritmética y admite, sobre esta base, la certeza del principio general de exclusión de tercero.

Por otra parte no permite determinar, para todo *n*, si el enunciado *Pvr n* es o no válido.

134. INTERPRETACIÓN DEL SISTEMA LFN EN LA ARITMÉTICA INTUICIONISTA.

Existe otra demostración de coherencia de *LFN* por modelo directo, que consiste en dar una interpretación de *LFN* en la aritmética intuicionista, tal como ha sido formalizada por HEYTING [32].

Designaremos con el simbolismo *LFH* al formalismo de HEYTING.

GÖDEL [33] ha demostrado que se puede hacer corresponder a toda proposición de *LFN* una proposición de *LFH*, de tal suerte que a toda proposición derivable de *LFN* vaya asociada una proposición derivable de *LFH* [34]. De aquí se sigue que si *LFH* es coherente, *LFN* también lo es.

---

[31] Véase § 193. También § 200.

[32] HEYTING 2.

[33] GÖDEL 11.

[34] Esta correspondencia determina perfectamente un modelo y constituye, por tanto, una interpretación. En efecto, se reduce a asociar a toda proposición de *LFN* el símbolo *Vri* o el símbolo *Fal*, según que se ponga o no en correspondencia con una proposición derivable de

Ahora bien, se puede establecer la coherencia de *LFH* utilizando un modelo intuitivo, según el método que ha sido descrito en el § 133 para el sistema *LFN*. Como *LFH* no incluye el principio de exclusión de tercero, esta demostración no tropieza con las mismas dificultades que en el caso de *LFN* y conserva un sentido constructivo.

KOLMOGOROFF [35] ha construido una interpretación de *LFH* haciendo corresponder a los operadores proposicionales de *LFH* esquemas de razonamiento intuitivos.

A toda proposición $(\tau_1 = \tau_2)$ (igualdad entre *términos*), hace corresponder el enunciado $(\delta_1 = \delta_2)$, donde δ_1 y δ_2 son los términos de *LAI* que representan τ_1 y τ_2.

A toda proposición (A & B) (o (A V B)) KOLMOGOROFF hace corresponder el enunciado: *Se da a la vez A y B* (o el enunciado: *Se da al menos uno de los enunciados A o B*), donde *A* y *B* son los enunciados que corresponden a las proposiciones A y B.

A toda proposición (A → B), hace corresponder el enunciado: *Si se ha demostrado previamente A, se puede demostrar B,* donde *A* y *B* son los enunciados que corresponden a las proposiciones A y B.

A toda proposición (Θ) A (Θ), hace corresponder el enunciado: *Para todo entero* α, *se da A,* donde *A* es el enunciado que corresponde a la proposición A.

A toda proposición (Θ) [A (Θ) → B (Θ)], hace corresponder el enunciado: *Para todo entero* α, *se tiene la posibilidad de demostrar B si se dispone de una demostración de A,* donde *A* y *B* son los enunciados que corresponden a las proposiciones A y B.

Finalmente, a toda proposición ~ A, hace corresponder el enunciado: *Si se ha demostrado previamente no-A, existe la posibilidad de demostrar un absurdo por disponerse de una demostración de A,* donde *A* es el enunciado correspondiente a la proposición A [36].

El operador ↮ y el cuantificador de particularización pueden introducirse por vía de definición. No es, por tanto, necesario considerarlos dentro de la interpretación.

Para decidir de la certeza o la falsedad de los enunciados que en tal manera se asocian a las proposiciones de *LFH,* hay que basarse en su sentido intuitivo [37].

Se puede demostrar que la correspondencia así definida es una perfecta *interpretación*: toda proposición derivable de *LFH* va asociada a un enunciado cierto. Pero la proposición $(N_0 = N_1)$ está asociada a un enunciado falso. Por tanto, no es derivable en *LFH* y *LFH* es coherente.

La interpretación de *LFN* en *LFH* puede realizarse mediante una argumentación constructiva, y la interpretación de *LFH* propuesta por KOLMOGOROFF también. Así se obtiene, pues, una demostración de coherencia para *LFN* que es constructiva.

FLH. Y la correspondencia es tal que toda proposición derivable de *LFN* está asociada al símbolo *Vri.*

[35] KOLMOGOROFF 1.

[36] Esto se reduce a asociar a toda proposición ~ A una proposición B de la forma ~ A → [A → $(N_0 = N_1)$], y a hacer corresponder a ~ A el enunciado que corresponde a esta proposición B.

[37] Para los enunciados del tipo $(\delta_1 = \delta_2)$, véase § 71, 1.

Pero al mismo tiempo rebasa el marco de *LFN*. La interpretación de KOLMOGOROFF se reduce, en efecto, a formalizar el concepto de verdad en relación a *LFH*, y como resultado de esto, en virtud del resultado de TARSKI evocado en el § 133, esta interpretación no puede ser formalizada en *LFH*. Tampoco puede formalizarse en *LFN* pues, si fuese posible, en virtud de la interpretación de GÖDEL, podría serlo en *LFH*.

SECCIÓN 3.—LA DEMOSTRACION DE GENTZEN.

135. EL SISTEMA DE GENTZEN.

El inconveniente de las demostraciones por modelo directo es que hacen intervenir el sentido intuitivo de los enunciados aritméticos (en forma clásica o intuicionista) sin ninguna restricción, y suponen que se pueda decidir, sobre la base de su sentido intuitivo, de la verdad o de la falsedad de todo enunciado aritmético.

En las demostraciones por modelo indirecto hay que apelar al sentido intuitivo de ciertos enunciados aritméticos, pero sólo se hace intervenir enunciados de forma muy sencilla, sin que contengan ni variables ni cuantificadores. Para estos enunciados se puede dar un criterio de certeza que permita obtener en todo caso una decisión efectiva en un número finito de etapas.

GENTZEN ha obtenido una demostración de la no-contradicción de la aritmética por modelo indirecto [38], pero ha debido recurrir a un principio de inducción transfinita extendido al segmento de la *segunda clase de ordinales transfinitos* determinada por el *primer número-ε* [39].

GENTZEN no utiliza el sistema *LFN* sino otro muy parecido, de la misma capacidad, que llamaremos el sistema *LFN-G*.

Este sistema incluye constantes individuales (que representan los enteros), variables individuales, constantes predicativas, constantes funcionales, y los seis operadores proposicionales habituales. No lleva, por consiguiente, variables predicativas como el *LFN*.

Como en el sistema *LFG*, las constantes individuales (N_0, N_1, N_2, ...) se consideran como abreviaciones de las *cifras* [40].

La categoría de los *términos* se define como sigue:

a. Una constante individual (o una cifra) es un *término*.

b. Una variable individual es un *término*.

---

[38] GENTZEN 3. Véase también GENTZEN 5 y 7.
[39] Véase NOTA IV, § 259.
[40] Véase § 74.

c. Toda expresión constituida por medio de una constante funcional cuyos argumentos son constantes o variables individuales es un *término.*

d. Toda expresión obtenida reemplazando, en una expresión de la forma *c,* que contenga por lo menos una variable individual, esta variable por una expresión de la forma *c,* es un término.

GENTZEN no utiliza ya *proposiciones,* sino *secuencias*[41]. No obstante, se puede describir su método sin hacer alusión al uso de *secuencias,* y hablando simplemente de *proposiciones.*

Toda expresión constituida mediante una constante predicativa cuyos argumentos sean términos es una *proposición.*

Si A es una *proposición,* $\sim$ A es también una *proposición.*

Si A (Θ) es una *proposición* que contiene la variable libre Θ, (Θ) A (Θ) y (E Θ) A (Θ) son igualmente *proposiciones,* con tal de que A (Θ) no lleve cuantificadores sobre Θ.

Si A y B son *proposiciones,* (A & B), (A $\vee$ B), (A $\rightarrow$ B), (A $\leftrightarrow$ B) son también *proposiciones.*

El sistema *LFN-G* contiene axiomas y reglas de derivación que corresponden a los de la Lógica Proposicional y a la Lógica de Predicados de primer orden. También contiene axiomas que caracterizan a la constante N_0, a la constante funcional σ y a las constantes predicativas, así como esquemas recursivos que definen las constantes funcionales que no son σ.

Así, para la constante $=$, contiene los tres esquemas de axiomas:

$$(\Theta)\ [\Theta = \Theta].$$
$$(\Theta_1)\ (\Theta_2)\ [(\Theta_1 = \Theta_2) \rightarrow (\Theta_2 = \Theta_1)]$$
$$(\Theta_1)\ (\Theta_2)\ (\Theta_3)\ [(\Theta_1 = \Theta_2)\ \&\ (\Theta_2 = \Theta_3) \rightarrow (\Theta_1 = \Theta_3)].$$

El sistema contiene axiomas que corresponden a los axiomas 2, 3 y 4 de PEANO[42] y que caracterizan a la constante funcional σ.

También contiene una regla de derivación que corresponde al principio de inducción:

$$\frac{\begin{array}{l}A\ (N_0) \\ A\ (\tau_1) \rightarrow A\ (\sigma\ \tau_1)\end{array}}{A\ (\tau_2)}$$

(donde τ_1 y τ_2 representan términos cualesquiera).

Para cada constante funcional, el esquema que la define es tal que permite calcular su valor en todos los casos: cualesquiera que sean las cifras que se adoptan para argumentos de esta constante funcional, su esquema de definición permite hacerla corresponder una cifra y sólo una.

[41] Véase § 43.
[42] Véase § 2.

136. Programa de la demostración.

Para demostrar la coherencia de *LFN-G*, basta con establecer la imposibilidad de derivar una cierta proposición, por ejemplo $(N_0 = N_1)$.

La demostración consta de dos partes:

1. Se define la noción de *proposición numérica*:

Una proposición *numérica de LFN-G* es la que está constituida únicamente de cifras, constantes predicativas del sistema y operadores proposicionales & y $\rightarrow$. Se da un procedimiento que permite transformar una proposición cualquiera en proposición numérica.

Por otra parte, se asocia a cada proposición numérica uno de los símbolos *Vri* o *Fal.* Una proposición numérica es *cierta* o *falsa* según que vaya asociada al símbolo *Vri* o al símbolo *Fal.* Sobre la base de esta definición la proposición $(N_0 = N_1)$ es *falsa.*

2. Se define la noción de *derivación reducible*:

Una derivación de *LFN-G* se denomina *reducible* si es posible transformarla efectivamente en una derivación cuya última proposición es una proposición *numérica cierta.* Se demuestra que toda derivación de *LFN-G* es reducible. De ello se sigue que no existe ninguna derivación de *LFN-G* cuya proposición $(N_0 = N_1)$ sea la proposición final.

Daremos algunos detalles sobre los diferentes elementos de esta demostración.

137. Primera parte de la demostración.

Se define un cierto número de transformaciones que se pueden practicar sobre una proposición cualquiera de *LFN-G.*

a. Si una proposición contiene al menos una variable libre, reemplazar esta variable, en todos los sitios donde figure, por una cifra arbitrariamente elegida.

b. Si una proposición contiene una constante funcional que tenga cifras por argumentos, reemplazar esta constante funcional por su valor, haciendo uso de su esquema de definición.

c. Si una proposición compleja contiene una proposición (Θ) A (Θ), reemplazar ésta por la proposición A (κ), donde κ es una cifra arbitrariamente elegida.

d. Si una proposición compleja contiene una proposición (E Θ) A (Θ), reemplazar ésta por la proposición $\sim (\Theta) \sim$ A (Θ).

e. Si una proposición compleja contiene una proposición (A $\vee$ B), reemplazar ésta por la proposición $\sim (\sim$ A & $\sim$ B).

f. Si una proposición compleja contiene una proposición $(A \leftrightarrow B)$, reemplazar ésta por la proposición $(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$.

g. Si una proposición compleja contiene una proposición $\sim A$, reemplazar ésta por la proposición $A \rightarrow (N_0 = N_1)$ [43].

Aplicando estas transformaciones a una proposición cualquiera, se puede eliminar de ella, sucesivamente, las variables, las constantes funcionales, los operadores $\sim$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, y los cuantificadores: se obtiene, por tanto, una *proposición numérica.*

Denominaremos *proposición elemental* a una proposición constituida por una constante predicativa que tiene *cifras* por argumentos. Una proposión numérica está compuesta de proposiciones elementales y de los operadores & y $\rightarrow$.

Se puede definir un sistema de criterios mediante el cual se puede reconocer si una proposición numérica es *verdadera* o *falsa.*

1. Para cada constante predicativa de *LFN-G* se da un *criterio de decisión,* o sea, un procedimiento que permita asociar a toda proposición elemental formada por medio de esta constante predicativa uno de los símbolos *Vri* o *Fal.* En otros términos, cualesquiera que sean las cifras que sirven de argumento a esta constante, se puede determinar si la verifican o no.

Así, para la constante $=$, se tiene el criterio siguiente:

Si una proposición tiene la forma $(\kappa_1 = \kappa_2)$, se le asocia el símbolo *Vri* o *Fal,* según que las cifras κ_1 y κ_2 lleven o no el mismo número de veces el símbolo σ [44].

2. Sea una proposición de la forma $(A \,\&\, B)$.

Se asocia a esta proposición el símbolo *Vri* si las proposiciones A y B son ambas *verdaderas* (asociadas al símbolo *Vri*). En caso contrario, se le asocia el símbolo *Fal.*

3. Sea una proposición de la forma $(A \rightarrow B)$.

Se asocia a esta proposición el símbolo *Fal* si la proposición A es *verdadera* (asociada a *Vri*) y la proposición B falsa (asociada a *Fal*). En todos los demás casos, se le asocia el símbolo *Vri.*

Aplicando estos criterios, se puede determinar por aproximaciones sucesivas para toda proposición numérica, si es *verdadera* o *falsa.* En particular, se ve que la proposición $(N_0 = N_1)$ es *falsa.*

138. Segunda parte de la demostración. La noción de reducción.

Toda derivación de *LFN-G* es una sucesión de proposiciones cada una de las cuales es un axioma o se deduce de una o varias proposiciones precedentes en la sucesión por aplicación de una regla de derivación o de un esquema de definición para una constante funcional.

---

[43] Esto se reduce a interpretar la negación como lo hace Kolmogoroff para la Lógica Intuicionista: Véase § 134.

[44] Toda cifra es una expresión de la forma $\sigma\ (\sigma\ (\ldots\ (\sigma\ N_0)\ \ldots))$.

Consideremos una derivación cualquiera *Sp* de *LFN-G*. Si su última proposición es una proposición numérica cierta, esta derivación es *reducible.*

Si no lo es, se pueden dar procedimientos mediante los cuales se le puede transformar progresivamente en una derivación cuya última proposición es una *proposición numérica verdadera.* La aplicación a una derivación de uno de estos procedimientos de transformación se denomina *etapa de reducción,* y la sucesión de etapas de reducción que se pueden efectuar sobre una derivación se denomina *reducción.* Cada etapa de reducción debe dejar subsistir el vínculo deductivo que existe entre las diferentes proposiciones de la derivación.

Los procedimientos utilizados en una reducción son definidos de tal forma, que la última proposición se transforma progresivamente, siguiendo los procedimientos descritos en el parágrafo precedente, en una proposición que sólo contiene finalmente cifras, constantes predicativas y los operadores & y $\rightarrow$.

Supongamos que la derivación *Sp* tenga por última proposición un axioma; en tal caso, se reduce a esta sola proposición. Es posible demostrar que todos los axiomas de *LFN-G* pueden ser transformados, por medio de procedimientos que han sido definidos en el parágrafo anterior, en una proposición numérica cierta.

Basta aplicar estos procedimientos para obtener una reducción de la derivación *Sp.*

Supongamos, por otra parte, que la derivación *Sp* incluya varias proposiciones.

Entonces, el procedimiento aplicable es el siguiente:

a) Se reemplazan por cifras arbitrariamente elegidas las variables libres que figuran en la última proposición; se reemplazan estas variables por las mismas cifras en las otras proposiciones de la derivación, y se reemplazan por N_1 las restantes variables libres que figuren en la derivación.

b) Se eliminan de la derivación todos los términos que no son cifras, calculando (gracias a sus esquemas de definición) los valores de las constantes funcionales que contiene [45].

En cambio, no se modifica nada en las variables libres y en los términos pertenecientes a las proposiciones que sirven de premisas para la aplicación de la regla del cuantificador de universalización o la regla de la inducción, al objeto de no destruir los nexos deductivos.

Mediante esta preparación, no es necesario tener en cuenta las aplicaciones que pueden hacerse, en el curso de la derivación, de los esquemas de difinición para las constantes funcionales

Se eliminan de toda la derivación los operadores V, $\sim$ y $\leftrightarrow$, y el cuantificador de particularización, utilizando los procedimientos *d, e, f,* y *g* del § 137.

Nos encontramos ahora frente a una derivación cuya última proposición resulta de la aplicación de una de las reglas de derivación de *LFN-G.*

[45] En virtud de (a), los términos que figuran en la derivación sólo pueden comprender cifras y constantes funcionales. Las constantes funcionales que sólo tienen como argumentos cifras, pueden ser reemplazadas por cifras. Procediendo así progresivamente, se pueden eliminar todas las constantes funcionales.

Supongamos que el concepto de reducción haya sido definido previamente para las derivaciones de las premisas y que se haya definido una nueva etapa de reducción para cada regla de derivación.

Veamos dos ejemplos:

1. Regla para el cuantificador de universalización.

Se abandona la última proposición, reemplazando después la variable libre por una cifra cualquiera y los términos que no son cifras por cifras, llevándose a cabo estas mismas sustituciones en toda derivación.

Sea, por ejemplo, una derivación que termina como sigue:

$$\mathfrak{X} + N_2 = N_2 + \mathfrak{X}$$
$$(\mathfrak{X})\,(\mathfrak{X} + N_2 = N_2 + \mathfrak{X}).$$

Se prescinde de la última proposición. Se reemplaza $\mathfrak{X}$ por la cifra N_4, por ejemplo, y se eliminan los términos $(N_4 + N_2)$ y $(N_2 + N_4)$. Finalmente, se obtiene la proposición $(N_6 = N_6)$.

Se aplican las mismas sustituciones en las restantes proposiciones de la derivación.

2. Regla para la inducción.

Se reemplaza la aplicación de esta regla por una sucesión de aplicaciones de la regla de la consecuencia.

Sea una derivación que termina como sigue:

$$\mathfrak{P}\,(N_0)$$
$$\mathfrak{P}\,(\tau_1) \rightarrow \mathfrak{P}\,(\sigma\,\tau_1)$$
$$\mathfrak{P}\,(\tau_2).$$

En virtud de la preparación descrita anteriormente, el término τ_2 es reemplazado por una determinada cifra, N_{10}, por ejemplo.

Entonces se reemplaza el término τ_1, sucesivamente, por N_0, N_1, N_2, ..., N_9, y se reemplazan por cifras los términos que hacen intervenir constantes funcionales en las que figure τ_1.

Designemos por $\mathfrak{P}_1$ la expresión que se obtiene practicando estas sustituciones en $\mathfrak{P}$.

Entonces se obtiene la sucesión de proposiciones:

$$\mathfrak{P}_1\,(N_0)$$
$$\mathfrak{P}_1\,(N_0) \rightarrow \mathfrak{P}_1\,(N_1)$$
$$\mathfrak{P}_1\,(N_0) \rightarrow \mathfrak{P}_1\,(N_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{P}_1\,(N_9) \rightarrow \mathfrak{P}_1\,(N_{10}).$$

Aplicando sucesivamente diez veces la regla de la consecuencia se obtiene:

$$\mathfrak{P}_1\,(N_{10}).$$

139. Segunda parte de la demostración. La inducción transfinita.

La noción de reducción se define, por tanto, de manera que se reduce progresivamente la última proposición de la derivación considerada a una proposición numérica cierta.

En tanto que la última proposición no se ha convertido en una proposición numérica cierta, se puede proseguir el proceso de la reducción.

Para que la demostración sea completa, hay que demostrar también que este proceso tiene siempre un final. En otros términos, hay que demostrar que, cualesquiera que sean las elecciones efectuadas (para las cifras que sustituyen a las variables), después de un número finito de etapas, toda derivación se transforma, efectivamente, en una derivación de la forma buscada.

Para establecer este último punto de su demostración, GENTZEN describe un procedimiento que permite adherir a cada derivación de *LFN-G* un número ordinal que mide, en cierta manera, su grado de complicación.

Pero si se ordenan las derivaciones según los números ordinales que se les afecta, una derivación puede venir después de una infinitud de otras.

Sea, por ejemplo, una derivación que incluya la aplicación a una cierta expresión de la regla para el cuantificador de universalización. En el curso de la reducción se reemplazará la variable que figura en esta expresión por una determinada cifra, N_m, por ejemplo. Sea m el número ordinal correspondiente a la derivación así obtenida. Como m puede ser cualquiera, se puede obtener así una serie infinita de derivaciones, y la derivación primitiva, que representa un grado de complicación más elevado (puesto que lleva un cuantificador superior), debe venir después de esta serie: se la puede considerar como el límite de esta serie.

Para representar todas las derivaciones posibles hay que utilizar, por tanto, ordinales transfinitos. Los números ordinales que utiliza GENTZEN son todos inferiores al primer número-ε [46].

En el caso en que una derivación *Sp* incluya la aplicación del principio de inducción y en que el término τ_2 es una variable, ésta puede ser reemplazada por una cifra cualquiera; el número de etapas de reducción necesarias puede ser entonces arbitrariamente grande. Por tanto, no es posible fijar a este número un límite superior.

Pero se puede alcanzar el resultado apetecido practicando una inducción descendente sobre los ordinales correspondientes a las diversas derivaciones que se obtienen en el curso de la reducción. Naturalmente, para ello hay que hacer uso de un principio de inducción transfinita extendido al segmento de ordinales que se utilizan.

Examinando una a una las diferentes etapas de reducción que es posible practicar sobre una derivación cualquiera *Sp*, se puede demostrar que, en cada etapa de reduc-

[46] Véase NOTA IV, § 259.

ción, el número ordinal atribuido a la derivación transformada es menor que el que se atribuye a la derivación inicial *Sp*, salvo en el caso en que la última proposición de la derivación transformada sea una proposición numérica cierta.

Dicho de otra forma: si una derivación se asocia a un número ordinal ν, toda etapa de reducción la transforma en una derivación asociada a un número ordinal $< \nu$, o en una derivación cuya última proposición es una proposición numérica cierta (en cuyo caso no hay nada que demostrar).

Se puede concluir: si el proceso de reducción se perfecciona en un número finito de etapas en el caso de las derivaciones asociadas a números ordinales $< \nu$, se termina así en un número finito de etapas en el caso de la derivación asociada al número ordinal ν.

En el caso de los números ordinales utilizados por GENTZEN, el principio de inducción transfinita puede formularse como sigue:

Si, cuando una propiedad se cumple para todo ordinal inferior a un cierto ordinal ν, se cumple también para este ordinal ν, se cumple también para cualquier ordinal.

Aplicando este principio al caso que nos ocupa, obtenemos: el proceso de reducción se termina en un número finito de etapas, para cualquier derivación. Dicho de otra forma: es posible transformar, en un número finito de etapas, toda derivación de *LFN-G* en una derivación cuya última proposición sea una proposición numérica cierta. O también: toda derivación de *LFN-G* es reducible.

De aquí se sigue que:

(XXIX) *LFG-N es coherente, y la Aritmética (clásica) es no-contradictoria.*

140. La demostración de Gentzen y el Corolario de Gödel.

Para establecer que su demostración responde cumplidamente a las exigencias del Corolario de GÖDEL, GENTZEN demuestra que su principio de inducción transfinita no puede ser formalizado en el sistema *LFN-G* [47].

Denominemos ϵ_0 al primer número-ϵ.

Consideremos un sistema *LFN-T*, obtenido añadiendo a *LFN-G*:

1) símbolos que representan los números ordinales transfinitos del segmento de la segunda clase de ordinales determinada por ϵ_0;

2) un cierto número de constantes funcionales y predicativas con axiomas y esquemas de definición apropiados.

Se puede demostrar cómo derivar en *LFN-T* una proposición que corresponde al principio de inducción extendido hasta un ordinal ν, con tal de que ν sea $< \epsilon_0$.

Denominemos a esta derivación *derivación-I hasta* ν.

Por un procedimiento análogo al utilizado en la demostración de la coherencia de *LFN-G*, se puede atribuir a toda derivación de este tipo un cierto ordinal $< \epsilon_0$.

[47] GENTZEN 8.

Se puede demostrar:

(XXX) *El número ordinal atribuido a la derivación-I hasta v es, al menos, tan elevado como v (es, por tanto,* $\geqq v$*), cualquiera que sea v.*

De aquí se sigue que es imposible construir la derivación-I hasta ϵ_0.

El principio de inducción extendido hasta ϵ_0 no es, pues, representable en *LFN-T*, ni, por consiguiente, en *LFN-G*.

SECCIÓN 4.—LA TEORIA DE LA DEMOSTRACION Y LA NOCION DE CONSTRUCTIVIDAD.

141. LAS DOS CONCEPCIONES DEL INFINITO.

El recurso a una inducción transfinita hace, evidentemente, salir del cuadro finitista —tal como se ha descrito en el § 130— a la teoría de la demostración.

El nuevo punto de vista adoptado por GENTZEN continúa siendo, no obstante, *constructivo*, y el principio de inducción que este autor utiliza precisa en qué sentido su demostración es constructiva.

El Corolario de GÖDEL indica que no es posible prescindir del recurso al infinito, y que el primer ideal hilbertiano es desmentido por los hechos formales.

Pero caben dos concepciones del infinito: la del *infinito en acto* y la del *infinito potencial*. Un conjunto infinito de objetos puede considerarse como un todo cerrado. dado en un solo acto de aprehensión. Esta concepción fundamenta, por ejemplo, el principio general de exclusión de tercero o el axioma de elección, y caracteriza los procedimientos *no-constructivos*.

Un conjunto infinito puede también concebirse como un dominio abierto,[48], en devenir, cuyos términos pueden ser alcanzados sucesivamente en una serie de etapas, conforme a una determinada ley de creación. Las operaciones que permiten pasar de un término a otro tienen un carácter finito: consisten en manipulaciones que se efectúan dentro de la intuición inmediata, no exigen sino la realización de movimientos regulares perfectamente determinados y la percepción de ciertos desplazamientos y ciertas coincidencias. Además, para llegar a un término, es forzoso pasar por todos los que le preceden.

Por consiguiente, no es posible agotar de esta manera el conjunto en cuestión. Pero la ley de formación es tal, que siempre es posible llegar más allá de un término anteriormente alcanzado, cualquiera que sea éste. La expresión de infinito, en tal

[48] El sentido que se da en este contexto a los términos *abierto* y *cerrado* no es el de la topología. Es un sentido imaginativo, que indica una cierta modalidad de aprehensión. *Dominio abierto* significa: Dominio cuyos elementos no son aprehendidos simultáneamente sino en forma sucesiva. *Dominio cerrado* significa: Dominio que está dado globalmente, como una totalidad terminada.

caso, no denota ya una totalidad cerrada, sino la posibilidad permanente de repetir ciertos actos.

El punto de vista constructivo coincide con esta segunda concepción del infinito.

Al situarnos en el punto de vista del infinito actual, se considera toda proposición como cierta o como falsa en sí misma, independientemente de toda verificación. Cualquiera que sea el predicado *P*, se considera que todo individuo (perteneciente al dominio infinito que se estudia) cumple necesariamente este predicado *P* o su contradictorio. Dicho de otra forma: se considera que todo predicado opera una repartición de los individuos del dominio en dos clases independientes (la clase vacía se considera como una clase), la de los individuos que lo cumplen y la de los que cumplen su contradictorio. Así, pues, basta con saber que una propiedad *P* no pertenece a todos los individuos del dominio para poder afirmar que hay, al menos, un individuo a quien corresponde la propiedad contradictoria de *P* (exclusión de tercero).

El punto de vista constructivo exige, por el contrario, que toda proposición sea susceptible de verificación efectiva. En el caso de un dominio finito, esta verificación puede conseguirse, evidentemente, en un número finito de etapas. En el caso de un dominio finito, se puede atribuir a una proposición un proceso de verificación, a condición de situarse en la perspectiva del infinito potencial.

Así, se puede dar una interpretación constructiva en este sentido para una parte del sistema *LFN*, que denominaremos *LFN-C* [49].

142. Ejemplo de una interpretación constructiva.

En esta interpretación se hace corresponder a toda proposición de *LFN-C* un enunciado aritmético y se define un procedimiento que permita reconocer, para todo enunciado así asociado a una proposición de *LFN-C*, si es cierto o falso.

Se puede comprobar de esta forma que a toda proposición derivable de *LFN-C* corresponde un enunciado cierto.

A cada constante funcional se hace corresponder una función cuyo valor puede ser calculado en un número finito de etapas, cualesquiera que sean los enteros que le sirven de argumentos.

Y a cada constante predicativa se hace corresponder un predicado para el cual se puede decidir en un número finito de etapas si se cumple para los enteros a los que se aplica, cualesquiera que sean estos enteros.

A una proposición (Θ) A (Θ) se hace corresponder el enunciado (X) A (X), donde A es la expresión que corresponde a A.

A tal enunciado se le dota del siguiente criterio de certeza: el enunciado (X) A (X) se considerará cierto si los enunciados $A(1)$, $A(2)$, ..., son todos ciertos, por lejos que se vaya en la sucesión de enteros.

A una proposición $(E\Theta)$ A (Θ), se hace corresponder el enunciado (EX) A (X).

[49] Esta interpretación ha sido sugerida por Gentzen.

Para este enunciado se da el siguiente criterio de certeza: (EX) A (X) se considerará cierto si, recorriendo toda la sucesión de enteros, se puede encontrar uno a tal que $A(a)$ sea cierto.

A las proposiciones (A & B), (A ∨ B), (A → B), ~ A, se hace corresponder, respectivamente, los enunciados (A & B), (A ∨ B), ($A \rightarrow B$) ~ A, donde A y B son las expresiones que corresponden, respectivamente, a A y a B.

Para un enunciado (A & B) se da el siguiente criterio de certeza: (A & B) se conconsiderará cierto si se ha reconocido previamente que A y B son enunciados ciertos.

Para un enunciado (A ∨ B) se da el criterio: (A ∨ B) se considerará cierto si se ha reconocido previamente que A o B es un enunciado cierto.

A un enunciado ($A \rightarrow B$) se le atribuye el siguiente sentido (que permite comprobar su verdad): disponemos de una demostración mediante la cual, desde el momento en que se nos da una demostración de A, podemos dar una demostración de B mediante una secuencia de etapas de demostración ya admitidas.

En las *etapas de demostración ya admitidas* no puede figurar el signo →, pues se tendría un círculo vicioso. Esta interpretación impide, pues, la superposición de varios operadores de implicación. Dicho de otra forma, no puede aplicarse a proposiciones del tipo $A \rightarrow (B \rightarrow (\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2))$.

Para un enunciado ~ A, se da el siguiente criterio de verdad: ~ A es cierto si disponemos de una demostración mediante la cual se puede demostrar, a partir de A, un enunciado falso. Esto equivale a reemplazar el enunciado ~ A por el enunciado $A \rightarrow (1 = 2)$. Esta intepretación no permite, por tanto, el uso de la doble negación. (El enunciado ~ ~ A se reemplazaría por el enunciado $(A \rightarrow (1 = 2)) \rightarrow (1 = 2)$.)

En particular, tampoco puede aplicarse a una proposición (~ ~ A↔A) (principio de la doble negación), ni, por consiguiente, a una proposición (~ A ∨ A) (principio de exclusión de tercero). En efecto, se puede demostrar que si el principio de exclusión de tercero puede derivarse en *LFN-C*, el principio de la doble negación puede también derivarse de este sistema. Si el principio de la doble negación no forma parte de *LFN-C*, el principio de exclusión de tercero tampoco puede formar parte de este sistema. Si no forma parte en su expresión simple, con mayor razón no formará parte en su forma general.

Esta interpretación no puede, por tanto, aplicarse más que a una parte de *LFN* que se puede considerar como la *parte constructiva* de *LFN*. En lo esencial, corresponde a la interpretación de KOLMOGOROFF de la Aritmética intuicionista, aunque es un poco más exigente que la de KOLMOGOROFF. A semejanza de esta última, no permite la doble negación y, por tanto, la exclusión de tercero, pero además impide la superposición de varios operadores de implicación y, por tanto, su negación.

143. EL MÉTODO DE GENTZEN Y LA TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN.

La demostración de no-contradicción de GENTZEN hace intervenir la propiedad metateórica *ser reducible en una serie de etapas a una serie de proposiciones numéri-*

cas ciertas. Se debe demostrar que esta propiedad se aplica a toda derivación de *LFN-G.*

El punto de vista constructivo exige que se disponga de un medio de comprobar, efectivamente, en cada caso, que se cumple la condición referida. Este proceso de comprobación o verificación está dado por el uso del principio de inducción transfinita, principio que es también constructivo, en el sentido de que proporciona el medio de llegar a cualquiera de los ordinales utilizados por GENTZEN [50]. Estos ordinales están clasificados en clases jerarquizadas, y la ley que permite construir estas diferentes clases hace posible conocer un ordinal de otra clase cualquiera si previamente se ha podido conocer los pertenecientes a las clases inferiores.

La demostración de GENTZEN satisface, pues, el corolario de GÖDEL, rebasando el cuadro de la Aritmética clásica sobre un punto: extensión del principio de inducción a un sector de lo transfinito. Pero, al mismo tiempo, continúa conforme al ideal de la teoría de la demostración, conservando un punto de vista constructivo. Rebasa el marco de la Aritmética, pero no utiliza los métodos no-constructivos de esta ciencia.

Al mismo tiempo, modifica el sentido del ideal hilbertiano. La teoría de la demostración no consiste ya en establecer la coherencia de las matemáticas clásicas sobre la base de consideraciones estrictamente finitas, sino en fundar teorías que hacen intervenir únicamente el infinito potencial.

De esta forma, la coherencia de la Aritmética clásica (algunos de cuyos razonamientos recurren al infinito "en acto") es demostrada por medio de una interpretación en la que el infinito sólo se considera en su forma potencial. La validez de los procedimientos discutibles (desde el punto de vista de la exigencia de constructividad) se establece a través de procedimientos no discutibles.

144. MÉTODOS FORMALES E INTUICIÓN.

El último recurso de la evidencia (como ha subrayado la escuela intuicionista) es la posibilidad de una verificación efectiva. El carácter efectivo de la verificación debe establecerse en cada caso.

Como toda demostración descansa en la intuición, los criterios formales en sí mismos no pueden juzgarse, en definitiva, más que en el nombre de exigencias intuitivas. No hay recurso último a lo formal, pues lo formal no es nunca lo primero, ni en el orden histórico de la invención ni en el orden lógico de la verificación.

La demostración de GENTZEN ofrece, como criterio formal, un principio de inducción transfinita. Y este criterio es válido respecto a las exigencias intuitivas. Estas van las primeras, indudablemente, pero no son claras por sí mismas: sólo el formalismo les permite tomar precisión. Si se hace necesaria la sanción de la intuición para

[50] Más exactamente: permite verificar, para cualquiera de estos ordinales, si posee o no una propiedad dada.

fundamentar la validez de lo formal, se precisa también la intervención de lo formal para clarificar la intuición y ayudarla a aprehenderse a sí misma.

La Teoría de la Demostración continúa siendo indispensable, no obstante, pues legitima el empleo de ciertos procedimientos donde la intuición no es suficiente, mostrando que no es necesario, para asegurar la coherencia de las matemáticas, renunciar a estos procedimientos (como pretenden los intuicionistas). La Teoría de la Demostración conserva, pues, todo su alcance, pero ampliando sus criterios y precisando el sentido de la exigencia de constructividad.

El problema de la demostración se sitúa en el mismo nivel que el que inspiró las investigaciones de GÖDEL: uno y otro se refieren a la relación que existe entre sistema formal y teoría intuitiva.

El Teorema de GÖDEL precisa la naturaleza de la correspondencia que existe entre el predicado *derivable* (aplicable a las proposiciones de un sistema formal) y el predicado *cierto* (aplicable a los enunciados de una teoría intuitiva). Su demostración hace intervenir una interpretación de ciertas proposiciones de *LFG* (y, en particular, la proposición $\mathfrak{G}^*$) en la metateoría de *LFG* [51], estableciendo que *LFG* contiene, al menos, una proposición que va asociada a un enunciado cierto y que, sin embargo, no es derivable [52].

Las demostraciones de no-contradicción, por otra parte, hacen intervenir, implícita [53] o explícitamente, un dominio de enunciados intuitivos, ya utilicen un modelo directo o un modelo indirecto. La dificultad que suscita el Corolario de GÖDEL no cambia la esencia de este método: indica solamente que su puesta en práctica exige la intervención de procedimientos de razonamiento de una cierta capacidad [54].

---

[51] Véase § 110.

[52] En lugar de recurrir directamente a una teoría intuitiva, se podría dar un procedimiento que permitiese atribuir a las proposiciones de *LFG* (o a una parte de ellas) uno de los símbolos *Vri* o *Fal* según el método del § 26. En tal caso, el Teorema de GÖDEL nos daría el siguiente resultado: existe al menos una proposición de *LFG* que va asociada al símbolo *Vri* y que, sin embargo, no es derivable. Pero en la descripción del criterio de atribución de los símbolos *Vri* y *Fal* se haría intervenir implícitamente el sentido intuitivo de ciertos objetos, de ciertas propiedades y de ciertas operaciones.

[53] En el caso en que se recurra al método del § 26, evocado en la Nota precedente.

[54] Señalemos aquí que GÖDEL ha obtenido una demostración de coherencia relativa para el sistema de ZERMELO-FRAENKEL recurriendo a un *modelo* definido de forma constructiva (en un sentido que es bastante parecido al que se utiliza en la demostración de GENTZEN). GÖDEL demuestra: si el sistema obtenido suprimiendo el *axioma de elección* en el sistema de ZERMELO-FRAENKEL es coherente, lo sigue siendo cuando se le añade el axioma de elección y la *hipótesis general de continuidad.*

(La *hipótesis general de continuidad* puede formularse así: si se forma el conjunto de las partes de un conjunto que tiene por número cardinal el aleph de índice ν, se obtiene un conjunto que tiene por número cardinal el aleph de índice $(\nu + 1)$.

Como todas las demostraciones de no-contradicción, la demostración de este teorema hace intervenir un dominio de objetos de carácter intuitivo.

Véase GÖDEL 16, 17 y 18.

CAPÍTULO VI

El Teorema de Church y los problemas de decisión

145. INTRODUCCIÓN.

El teorema de CHURCH y los teoremas con él conexos se refieren a *problemas de decisión.* En el parágrafo 38 se ha indicado cómo se presenta el *problema de la decisión* para un sistema formal, aunque existen, como oportunamente se verá, otros tipos de problemas de decisión. En general, un problema de decisión consiste en hallar un procedimiento efectivo que permita determinar, para todo objeto perteneciente a un cierto conjunto, si este objeto posee o no una cierta propiedad.

Si se pretende llevar a cabo un estudio preciso de los problemas de este género, es necesario dar un contenido preciso a la noción de *procedimiento efectivo.*

CHURCH ha propuesto definir esta noción mediante el concepto de *recursividad.*

Importa, ante todo, y como medida previa a la exposición de los resultados de los problemas de decisión, indicar el sentido exacto de esta definición.

Para ello, es necesario completar la exposición ya hecha de la función recursiva (capítulo II) mediante el examen de dos nociones muy ligadas a la recursividad: la de *función* λ-*definible* y la de *función* M-*definible.*

Además, esto nos dará ocasión de hacer algunas indicaciones sobre el *cálculo de la conversión-*λ, con el que se relaciona el teorema de CHURCH.

SECCIÓN 1.—FUNCIONES λ-DEFINIBLES Y FUNCIONES M-DEFINIBLES.

146. EL CÁLCULO LF-λ.

La noción de *función λ-definible* ha sido introducida por CHURCH, que la define haciendo uso de un cálculo combinatorio del cual es también autor: *el cálculo de la conversión-λ* [1]. Para abreviar, denominaremos a este cálculo *LF-λ*.

La idea que ha sido utilizada por CHURCH como punto de partida es la de abstracción funcional. En matemáticas se debe poder distinguir entre una función considerada como tal y el valor que adopta esta función cuando se aplica a ciertos argumentos. Para ello, hay que poder designar a una función en tanto que operador puro, haciendo abstracción de sus argumentos. Para ello, utiliza CHURCH el *simbolismo-λ*.

El símbolo λ es un operador de abstracción que aísla, en cierta manera, la función de sus argumentos. Así, la expresión *sin* X designa el valor de la función *sinus* para el argumento X, y la expresión λ X (*sin* X) designa la función *sinus* en sí misma.

O también: la expresión (X + 1) designa el sucesor de X, y la expresión λX (X + 1) designa la función *sucesor* en sí.

Naturalmente, se debe poder representar la aplicación de una función así designada a unos argumentos e, inversamente, aislar la función de sus argumentos cuando ya ha sido aplicada a estos. De aquí la necesidad de un cálculo que proporcione las reglas de manipulación del símbolo λ y fije su sentido.

La ventaja de este cálculo es que no incluye más que una sola categoría de variables —variables individuales— lo que le permite sustraerse a las dificultades que presentan los sistemas con varias categorías de variables.

No lleva símbolos de funciones [2], pero representa una función por la indicación de las operaciones a efectuar sobre sus argumentos eventuales para obtener el valor de esta función para estos argumentos. Representa, por tanto, una función, dando un procedimiento uniforme de cálculo de sus valores. (Por supuesto, esto no permite representar una función cualquiera.)

El cálculo *LF-λ* utiliza los siguiente símbolos:

Símbolos para designar a las variables: $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, y las mismas letras afectadas de índices;

símbolo λ;

---

[1] CHURCH 1, 4, 12.

[2] Al menos a título de símbolos no definidos. Este sistema utiliza símbolos para designar funciones, pero a título de abreviaciones para expresiones que están constituidas por medio de símbolos no definidos.

símbolos de agrupación: paréntesis;
símbolo de separación: el punto [3].

Las reglas de construcción especifican cuáles son los grupos de símbolos que constituyen *fórmulas bien construidas.* Designaremos las fórmulas bien construidas de *LF*-λ por medio de las variables sintácticas Y_1, Y_2, Y_3, ... (ípsilon mayúscula afectada de índices). Para indicar que una fórmula bien construida Y_1 contiene las variables $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, escribiremos: Y_1 ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$).

Las reglas de construcción definen de manera inductiva [4] la noción de *fórmula bien construida,* al mismo tiempo que las nociones de *variable libre* y *variable ligada.*

1. Toda fórmula integrada por una sola variable es una *fórmula bien construida.* Se dice que esta variable figura en esta fórmula como *variable libre.*

2. Si las fórmulas Y_1 e Y_2 son *bien construidas,* la fórmula Y_1 Y_2 (obenida mediante aplicación de la fórmula Y_1 a la Y_2) es *bien construida.* Se dice que una variable figura como variable *libre* o como variable *ligada* en Y_1 Y_2 según que figure como variable libre o como variable ligada en Y_1 o en Y_2.

3. Si la fórmula Y_1 es *bien construida,* y si la variable $\mathfrak{X}$ figura en ella como variable *libre,* la fórmula $\lambda\,\mathfrak{X}.\ Y_1$ es *bien construida.* Se dice que la variable $\mathfrak{X}$ figura en la fórmula $\lambda\,\mathfrak{X}.\ Y_1$ como variable *ligada,* y toda variable distinta de $\mathfrak{X}$ que figure en esta fórmula se dice que figura en ella como variable *libre* o variable *ligada,* según que figure como variable libre o como variable *ligada* en Y_1.

Veamos ahora algunos convenios de escritura.

Cuando se practica sucesivamente varias abstracciones sobre la misma expresión, se puede simplificar la notación aplicando la regla de asociación a la derecha.

Así, pues, una fórmula como la $\lambda\,\mathfrak{X}\,(\lambda\,\mathfrak{Y}\,(\lambda\,\mathfrak{Z}.\ Y_1\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})))$ se convierte en $\lambda\,\mathfrak{X}, \lambda\,\mathfrak{Y}\,\lambda\,\mathfrak{Z}.\ Y_1\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

Convendremos en escribir el conjunto de símbolos $\lambda\,\mathfrak{X}\,\lambda\,\mathfrak{Y}\,\lambda\,\mathfrak{Z}$ bajo la forma $\lambda\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$.

Y nuestra fórmula se convierte entonces en: $\lambda\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}.\ Y_1\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

---

[3] Los paréntesis pueden ser suficientes, pero el uso del punto permite limitar las superposiciones de paréntesis.

[4] Este término no debe confundirse con el término *recursivo.*

Una clase de objetos (o una propiedad) está definida *de manera inductiva* cuando su definición incluye las dos categorías de cláusulas siguientes: *cláusulas de base* y *cláusulas inductivas.*

a) Las *cláusulas de base* indican que ciertos objetos pertenecen a esta clase (o que esta propiedad se cumple en ciertos objetos.

b) *Las cláusulas inductivas* indican que si ciertos objetos pertenecen a esta clase (o cumplen esta propiedad), otros objetos, asociados a los precedentes por una correspondencia perfectamente determinada, pertenecen igualmente a esta clase (o verifican igualmente esta propiedad).

Sobre la noción de clase recursiva (o de propiedad recursivamente representable), véanse § 61 y § 65.

Una clase definida de manera inductiva no es necesariamente recursiva.

CHURCH demuestra que las fórmulas bien construidas de *LF*-λ constituyen una clase recursivamente enumerable (pero no recursiva). (CHURCH 8, pág. 354. Teorema VII).

Denominaremos *armadura de una fórmula* al conjunto de símbolos constituido por el operador λ seguido de la mención de las variables sobre las cuales se practica las abstracciones sucesivas. La armadura de una fórmula se separa mediante un punto de la expresión sobre la cual se aplica.

Para la parte de la fórmula que sigue el punto separativo se utiliza la regla de asociación a la izquierda.

Toda parte de la fórmula situada entre paréntesis debe considerarse como un todo.

Observemos que el conjunto de símbolos ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) no es, hablando con propiedad, una fórmula; contiene, en efecto, comas, que no son símbolos de *LF*-λ; sólo interviene en la designación sintáctica de una determinada fórmula para indicar que esta fórmula contiene las variables $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$.

Las reglas de transformación son tres.

1. *Sustitución*: consiste en reemplazar, en una fórmula bien construida Y_1, una variable ligada por otra (distinta de las variables de Y_1).

2. *Reducción*: consiste en reemplazar una fórmula del tipo $(\lambda\,\mathfrak{X}.\ Y_1)\ Y_2$ por la fórmula $[\mathfrak{X}/Y_2]\ Y_1$.

Esta regla no puede ser aplicada a no ser que las variables ligadas de Y_1 son distintas de $\mathfrak{X}$ y de las variables libres de Y_2.

3. *Expansión*: consiste en reemplazar una fórmula del tipo $[\mathfrak{X}/Y_2]\ Y_1$ por la fórmula $(\lambda\,\mathfrak{X}.\ Y_1)\ Y_2$.

Esta regla sólo puede ser aplicada si las variables ligadas de Y_1 son distintas de $\mathfrak{X}$ y de las variables de Y_2.

Se denomina *conversión* a una serie finita de aplicaciones de estas tres operaciones. Si una fórmula Y_1 puede obtenerse por conversión, a partir de otra fórmula Y_2, se dice que Y_1 es *convertible* en Y_2. La convertibilidad es una relación simétrica, reflexiva y transitiva. El cálculo *LF*-λ estudia sus propiedades.

Designemos la propiedad *ser convertible* mediante el símbolo *Cnv*. Si una fórmula Y_1 puede ser transformada por conversión en una fórmula Y_2, escribiremos: Y_1 *Cnv* Y_2.

Se dice que una fórmula está expresada *en forma normal* si es bien construida y no contiene ninguna parte que sea de la forma $(\lambda\,\mathfrak{X}.\ Y_1)\ Y_2$, siendo las variables ligadas de Y_1 distintas de las variables libres de Y_2, es decir, si no es posible aplicar a ninguna de sus partes la operación de reducción.

147. Las funciones λ-definibles.

Es posible representar en *LF*-λ los números enteros mediante fórmulas que, por motivos de brevedad, se designa mediante los símbolos N_1, N_2, N_3 ... (que corresponden, respectivamente, a los enteros 1, 2, 3, ...).

$$N_1 \equiv \lambda\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2.\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2,$$
$$N_2 \equiv \lambda\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2.\ \mathfrak{X}_1\,(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2),$$
$$N_3 \equiv \lambda\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\ \mathfrak{X}_1\,(\mathfrak{X}_1\,(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2),$$

etcétera.

Esto establecido, se puede representar mediante el cálculo *LF*-λ una cierta clase de funciones de enteros que se denominarán *funciones λ-definibles.* Una función de enteros *F* de una variable se dice que es *λ-definible* si se puede encontrar una fórmula Y_F del cálculo *FL*-λ tal que si $Fa = b$ y si N_a y N_b son las fórmulas de *LF*-λ que representan, respectivamente, los enteros *a* y *b*, $Y_F\ N_a$ sea convertible en N_b.

El cálculo de la conversión corresponde al cálculo de los valores de la función, según el esquema:

$$\begin{array}{ll} F\,a & \text{— cálculo} \rightarrow b \\ Y_F\ N_a & \text{— conversión} \rightarrow N_b\ . \end{array}$$

La correspondencia así definida es isomórfica: si Y_F corresponde a *F* y N_a a *a*, $Y_F\ N_a$ (o N_b) corresponde a *F a* (o *b*).

La noción de función λ-definible puede extenderse a funciones pluriargumentales. Utilizando la asociación a la izquierda se puede, en efecto, considerar una función de *n* argumentos como una función compuesta de (*n*—1) funciones de 1 argumento [5].

148. Las funciones M-definibles.

Post [6] ha sugerido representar una función mediante una máquina apropiada que calcule sus valores [7]. Esta idea ha sido puesta en práctica de forma sistemática por Turing [8].

Una *máquina* de Turing consiste en un proceso que puede escribir una serie de cifras según un programa determinado. A tal proceso lo denominaremos *máquina*-T.

Una *máquina*-T se compone esencialmente de: una *cinta,* un *órgano de lectura,* un *órgano de mando,* un *órgano de ejecución* y una *memoria.*

La *cinta* se despliega ante un órgano de lectura, y determinados signos pueden quedar impresos en ella. Esta cinta o banda puede estar dividida en células; sólo puede recibir un signo por célula, se desplaza por espacios mínimos de una célula y sólo ofrece una célula a la mirada del órgano de lectura.

El *órgano de lectura* descifra el signo situado frente a él sobre la cinta.

El *órgano de mando* asegura la aplicación del programa de la máquina realizando las operaciones apropiadas, sobre la base de la *situación,* tal como es registrada por el órgano de lectura.

Prácticamente, posee un cierto número de esquemas que corresponden a ciertas situaciones características e indican las operaciones que hay que realizar en tales situaciones. Por supuesto, el órgano de mando sólo puede aplicarse a un esquema a la vez, pero, según las circunstancias, cambia él mismo el esquema que utiliza.

---

[5] Véase INDICE DE NOTACIONES, 2.21.6.

[6] POST 2.

[7] Esta modalidad de representación puede ser aplicada solamente a las funciones cuyos valores pueden ser efectivamente calculados.

[8] TURING 1.

El *órgano de ejecución* realiza las operaciones prescritas. Estas se reducen a algunos movimientos elementales: desplazar la banda de una célula hacia la derecha o hacia la izquierda, borrar un signo, imprimir un signo. (Algunos signos sirven solamente de referencias y al final son eliminados. Otros constituyen los elementos de la serie escrita por la máquina. En general pueden reducirse a dos, por ejemplo 0 y 1, lo que basta para escribir cualquier número en el sistema binario de numeración.)

El *órgano de memoria* contiene el programa de la máquina y puede conservar (eventualmente durante un tiempo limitado) ciertos datos registrados por el órgano de lectura.

En cada etapa de su funcionamiento la máquina se caracteriza por una *configuración de conjunto,* determinada por los elementos siguientes:

Lectura efectuada por el órgano de lectura.
Esquema utilizado por el órgano de mando.
Serie de signos escritos sobre la cinta.

Después de cada operación, el órgano de mando puede adoptar un esquema diferente; cuando se describe el funcionamiento de la máquina es preciso especificar cuál es el efecto de cada operación sobre el esquema utilizado.

El *programa* de la máquina puede presentarse en la forma de un cuadro que indica cuáles son las operaciones que hay que efectuar en cada configuración de conjunto y cuáles son los efectos de estas operaciones sobre los esquemas adoptados por el órgano de mando.

Cuando se trata de escribir secuencias muy sencillas, el programa consiste en un cuadro de varias líneas.

Para obtener un enunciado práctico del programa, en el caso de series complicadas, se utilizan *cuadros auxiliares* que ya no hacen intervenir esquemas, sino funciones de esquemas. Estos cuadros juegan, en suma, el papel de operadores: basta con reemplazar los argumentos de las funciones que incluyen por la indicación de los elementos constitutivos de una configuración de conjunto determinada para obtener la descripción de un comportamiento efectivo de la máquina. Los cuadros auxiliares sirven como definiciones de estas funciones de esquemas.

Como tales funciones pueden superponerse unas a otras, se puede obtener, por aproximaciones sucesivas, la descripción de comportamientos bastante complicados. El mecanismo esencial, en tales definiciones, es evidentemente el de la sustitución.

Adoptando ciertos convenios de notación es posible representar el programa de una máquina en forma de una secuencia de signos que puede ser escrita sobre la cinta. Entonces se puede construir una *máquina universal Ma-U,* capaz de hacer el trabajo de cualquier tipo de máquina descrito. Basta con escribir el programa de una máquina determinada al comienzo de la cinta para que la máquina universal escriba la secuencia correspondiente a esta máquina.

Se dirá que una máquina-T es *circular* si, a partir de una etapa dada de su funcionamiento, recomienza indefinidamente la misma serie de operaciones, volviendo a dar así, perpetuamente, el mismo resultado. Una máquina-T se dice que es *no-circular* si no se encuentra nunca en tal situación.

Una serie de cifras se dice que es *M-definible* si puede ser escrita por una máquina-T no-circular. Una función de enteros uniargumental se dice que es *M-definible*[9] si la serie de sus valores puede ser representada por una serie *M-definible*. Por tanto, la serie en cuestión puede estar formada por series de 1 separadas por 0. Entonces se hará el siguiente convenio: el número de signos 1 comprendidos entre el n-ésimo y el $(n + 1)$-ésimo signo 0 da el valor de la función para el argumento n.

Como en el caso de las funciones λ-definibles, la noción de función M-definible puede extenderse a funciones pluriargumentales.

149. Teoremas de equivalencia.

Se han estudiado las relaciones que existen entre estas nociones y la noción de recursividad, y se han establecido ciertas equivalencias que hacen aparecer la identidad de tres nociones: función recursiva general, función M-definible y función λ-definible.

Kleene ha llegado a los siguientes resultados:

1. (XXXI) *Toda función recursiva primitiva es recursivamente general*[10].
2. (XXXII) *Toda función recursiva general es λ-definible*[11].
3. (XXXIII) *Toda función λ-definible definida para todos los sistemas de valores de sus argumentos es recursiva general*[12].

Basándose sobre los dos últimos Teoremas y sobre la definición dada por Kleene[13] de la recursividad parcial, Church ha enunciado el siguiente Teorema:

4. (XXXIV) *Toda función parcialmente recursiva es λ-definible y recíprocamente*[14].

Por otra parte, Turing ha establecido los dos Teoremas siguientes.

5. (XXXV) *Toda función λ-definible es M-definible*[15].
6. (XXXVI) *Toda función M-definible es recursiva general*[16].

---

[9] Turing utiliza la expresión *computable*. Hubiese sido más lógico el empleo de la palabra francesa (y española) *calculable*, pero este término se presta a ambigüedad. En efecto, se debe distinguir entre *función definible mediante una máquina de Turing* y *función efectivamente calculable*.

[10] Esto se deriva directamente de la definición dada por Kleene para la recursividad general. Véase Kleene 5, págs. 727-731.

[11] Kleene 3, pág. 347, Teorema 22. Véase también Church 8, pág. 355, Teorema XVI.

[12] Kleene 3, pág. 348, Teorema 23. Véase también Church 8, pág. 355, Teorema XVII.

[13] Kleene 8, págs. 151-152.

[14] Church 12, pág. 40, Teorema II, y pág. 41, Teorema III.

[15] Turing 3, págs. 160-161.

[16] Turing 3, págs. 161-163.

Por consiguiente, tenemos la equivalencia de las siguientes nociones:

— Función recursiva general.

— Función M-definible.

— Función λ-definible, definida para todos los sistemas de valores de sus argumentos.

Y por otra parte, se da también la equivalencia de las dos nociones:

— Función parcialmente recursiva.

— Función λ-definible (sin restricción).

150. La noción de procedimiento efectivo.

Ciertos problemas metateóricos, tales como el problema de la decisión para un sistema formal, y con carácter general todos los problemas de decisión, hacen intervenir la idea de un *procedimiento efectivo* de decisión.

Consideremos un problema *Pb*, en el cual se persigue un procedimiento efectivo de decisión (referente a una cierta propiedad) para los objetos de un conjunto *En*.

Si se consigue hacer corresponder números enteros a los objetos de *En*, se puede representar este procedimiento mediante una función de enteros. Este procedimiento será efectivo si permite obtener un resultado perfectamente determinado, cualquiera que sea el objeto de *En* al que se aplique (o los objetos de *En* a los que se aplique en el caso en que el problema se refiera a una cierta relación entre dos o más elementos de *En*). En otros términos, será efectivo si la función que le representa es efectivamente calculable, es decir, si se puede calcular efectivamente el valor de esta función, cualesquiera que sean los argumentos a los que se aplique.

Se trata, pues, de una noción intuitiva cuyo sentido es más o menos impreciso. Se puede ser más o menos exigente sobre los requisitos exigidos a un procedimiento de cálculo para considerarle como *efectivo*. Church ha propuesto identificar la noción de *función efectivamente calculable* con la de *función recursiva general*. Esta identificación no puede ser objeto, evidentemente, de una demostración rigurosa, puesto que se trata precisamente de pasar de una noción imprecisa a otra rigurosamente definida. No obstante, la sugerencia es meritoria, tanto desde el punto de vista intuitivo como del punto de vista técnico.

Desde un punto de vista intuitivo, Church justifica su proposición como sigue:

Decir que una función *F* es efectivamente calculable, es decir que existe un *algoritmo* que permite calcular sus valores.

Un algoritmo de este género es un método mediante el cual, dado un entero ***n***, es posible obtener una serie de expresiones Al_{n_1}, Al_{n_2}, Al_{n_3}, ..., Al_{nr_n} donde Al_{n_1} es efectivamente calculable si ***n*** está dado, y si las expresiones Al_{n_i} ($i = 1, 2, \ldots, j\text{-}1$) están dadas, y tal que, cuando ***n*** y todos los Al_{n_i} (hasta Al_{nr_n} inclusive) son dados, el valor de *Fn* se calcula efectivamente.

Podemos hacer corresponder a cada Al_{n_i} un número entero y a cada serie de Al_{n_i} un número entero obtenido a partir de los números que corresponden a los miembros de esta serie.

Ahora estamos en situación de poder definir dos funciones auxiliares G y H, de la manera siguiente.

1. La función G es una función de dos enteros tal que, si a es el número asociado a la serie Al_{n_1}, Al_{n_2}, ..., Al_{n_k}, $G\,a\,X$ tiene por valor el número asociado al Al_{n_i} (donde $i = k + 1$).

$G\,a\,X$ tiene por valor 1 si $k = r_n$ (por tanto, si el cálculo termina en Al_{n_k}) y $G\,a\,X$ tiene por valor 0 en los demás casos.

2. La función H es una función de dos enteros tal que

$$H\,n\,X = G\,n\,X \quad \text{si } G\,n\,X \neq 1\ ,$$
$$\text{y} \quad H\,n\,X = F\,n \quad \text{si } G\,n\,X = 1\ .$$

Las expresiones Al_{n_i} serán efectivamente calculables si las funciones G y H lo son. Y si nos proponemos traducir esta condición, en el caso particular de G y H, imponiéndolas ser recursivas generales, podemos establecer que la función F es también recursiva general.

Por otra parte, desde un punto de vista técnico, los resultados mencionados en el parágrafo precedente parecen indicar que las tres nociones de función recursiva general, de función λ-definible y de función M-definible, al ser equivalentes, nos dan representaciones formales de una misma noción intuitiva. Y la idea de un cálculo que se puede efectuar por medio de una máquina (idea básica de la definición de funciones M-definibles) corresponde a la idea de un procedimiento efectivo de cálculo.

SECCIÓN 2.—EL TEOREMA DE CHURCH.

151. ENUNCIADO DEL TEOREMA.

El problema de la decisión en un sistema formal consiste, como se ha visto [17], en encontrar un procedimiento efectivo que permita decidir, para toda proposición del sistema, si es derivable o no.

Este problema ha sido resuelto por la Lógica Proposicional y para ciertas clases de proposiciones de la Lógica de Predicados de primer orden [18].

CHURCH ha demostrado que el problema es insoluble desde el momento que se considera un sistema equivalente a la Lógica de Predicados de primer orden (tomada

[17] § 38.

[18] § 48. Para más detalles, véase § 169.

en su totalidad). Este resultado se basa en un teorema sobre las propiedades del cálculo *LF*-λ.

El Teorema de CHURCH se vincula al *problema de los invariantes de conversión.*

Dada una transformación cualquiera en un conjunto *En* (es decir, una operación que haga corresponder a todo elemento de *En* un elemento de *En*), podemos buscar cuáles son los elementos del conjunto *En* que son invariantes respecto a esta transformación.

Se denominará *sistema de invariantes de conversión* de *LF*-λ a una clase de fórmulas (bien construidas) de *LF*-λ [19] que permanece invariante respecto a toda conversión [20], es decir, cuyos elementos pueden ser transformados los unos en los otros por conversión. Tal sistema es *completo* si incluye todas las fórmulas del cálculo *LF*-λ que pueden ser transformadas unas en otras por conversión.

El *problema de los invariantes de conversión* es el siguiente: ¿Es posible dar un procedimiento efectivo que permita determinar un sistema completo de invariantes de conversión? O, dicho de otra forma: Dadas dos fórmulas cualesquiera Y_1 e Y_2, ¿es posible determinar de manera efectiva si Y_1 *Cnv* Y_2 o no?

El Teorema de CHURCH responde negativamente a esta pregunta, demostrando que no existe sistema completo de invariantes de conversión efectivamente calculables.

Si identificamos *procedimiento efectivo* y *función recursiva (general)* [21], el problema puede expresarse como sigue: dada una *aritmetización* de *LF*-λ [22] y dos fórmulas cualesquiera Y_1 e Y_2 ¿es posible construir una función recursiva dependiente de los números-G de Y_1 e Y_2 y cuyo valor sea 2 ó 1 según que Y_1 *Cnv* Y_2 o no?

El Teorema se enuncia, pues, como sigue.

(XXXVII) *Dadas dos fórmulas* Y_1 e Y_2 *de LF*-λ, *no existe función recursiva F biargumental tal que el valor de F* $Ngd(Y_1)$ $Ngd(Y_2)$ *sea* 2 *ó* 1, *según que* Y_1 *Cnv* Y_2 *o no* [23].

152. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.

La demostración se realiza a través de tres etapas.

1. Se lleva a cabo una aritmetización de *LF*-λ siguiendo el método indicado por GÖDEL. Dos fórmulas bien construidas no pueden tener el mismo número-G.

---

[19] En lo que sigue, cuando hablemos de *fórmulas*, se tratará siempre de *fórmulas bien construidas.*

[20] O también: respecto a toda serie finita de aplicaciones de las operaciones de sustitución, de reducción y de expansión definidas en el § 146.

[21] En lo que sigue, la expresión *función recursiva* significará *función recursiva general.*

[22] Véase § 68.

[23] CHURCH 8, § 8, Teorema XIX.

2. Se establece con bastante facilidad el lema siguiente[24]:

(XXXVIII) *El problema que consiste en hallar una función recursiva F (biargumental) tal que el valor de F Ngd*(Y_1) *Ngd*(Y_2) *sea 2 ó 1 según que* Y_1 *Cnv* Y_2 *o no, es equivalente al problema de encontrar una función recursiva G (uniargumental) que dependa del número-G de una sola fórmula* Y_3, *tal que el valor de G Ndg*(Y_3) *sea 2 ó 1 según que* Y_3 *tenga una fórmula normal o no*[25].

3. Se establece el Teorema[26]:

(XXXIX) *Dada una fórmula* Y_1, *no existe función recursiva G (uniargumental) tal que el valor de G Ngd*(Y_1) *sea 2 ó 1, según que* Y_1 *tenga una forma normal o no.*

La demostración de este teorema utiliza el *procedimiento de la diagonal*[27].

Supongamos que la función G existe.

Entonces, si u_1 es el número-G de la fórmula Y_1 y si Y_1 tiene forma normal, $G\ u_1 = 2$. Y si Y_1 no tiene forma normal, $G\ u_1 = 1$.

Bajo este supuesto es posible determinar para toda fórmula bien construida si ésta es o no convertible en una de las fórmulas N_1, N_2, ... (correspondientes a los enteros).

Dada una fórmula bien construida Y_1, es suficiente la utilización de la función G para determinar si Y_1 tiene una fórmula normal o no. En el primer caso podemos obtener esta fórmula normal, en virtud de una propiedad general de las fórmulas de *LF*-λ. (Es posible asociar a toda fórmula bien construida Y_1 una función recursiva que enumere las fórmulas que se puedan obtener a partir de Y_1 por conversión[28]. Basta entonces con comprobar si esta forma normal a la forma $\lambda\, \mathfrak{X}_1\, \mathfrak{X}_2.\, \mathfrak{X}_1\ (\mathfrak{X}_1\ (\ldots\ (\mathfrak{X}_1\ \mathfrak{X}_2)\ \ldots))$, es decir, es una de las fórmulas N_1, N_2, ...

Por otra parte, se puede demostrar que el conjunto de las formas bien construidas que tienen forma normal es recursivamente enumerable[29].

Sea, pues, Y_{e_1}, Y_{e_2}, Y_{e_3}, ... una enumeración efectiva de las fórmulas bien construidas de *LF*-λ que tienen forma normal.

Definamos a continuación una función de enteros de un argumento H, de la forma siguiente:

$H\ n = 1$ si $Y_{e_n}\ N_n$ no es convertible en una de las fórmulas N_1, N_2, ...,

y $H\ n = m + 1$ si $Y_{e_n}\ N_n\ Cnv\ N_m$.

En virtud de lo que hemos visto, esta función H puede representarse por medio de una función recursiva y, puesto que toda función recursiva es λ-definible, es

[24] CHURCH 8, § 8, Lema.
[25] Véase § 146.
[26] CHURCH 8, § 8, Teorema XVIII.
[27] Véase CAPITULO II, nota 70.
[28] CHURCH 8, § 6, Teorema XII.
[29] CHURCH 8, § 6, Teorema XV.

representable por una fórmula de *LF*-λ, que designaremos Y_H. Esta fórmula Y_H se puede construir y se puede demostrar muy simplemente, que posee una forma normal.

Pero esta fórmula Y_H es diferente de las fórmulas Ye_1, Ye_2, Ye_3, ..., pues Y_H representa a *H*, en virtud de la definición de una función λ-definible, cuando $H\,n = 1$, es decir, cuando $Ye_n\ N_n$ no es convertible en una fórmula N_i, $Y_H\ N_n\ Cnv\ N_1$, y por tanto la fórmula Y_H es diferente de la fórmula Ye_n, y cuando $H\,n = m + 1$, es decir, cuando $Ye_n\ N_n\ Cnv\ N_m$, entonces $Y_H\ N_n\ Cnv\ N_{m+1}$ y la fórmula Y_H es, por tanto, diferente de la fórmula Ye_n.

Así, cualquiera que sea *n*, la fórmula Y_H es diferente de la fórmula Ye_n.

Terminamos, por tanto, en una contradicción: la enumeración Ye_1, Ye_2, ... contiene todas las fórmulas de *LF*-λ que poseen una forma normal.

Rechazaremos, por tanto, nuestra hipótesis de partida y el Teorema está establecido.

153. Aplicación del Teorema de Church al problema de la decisión.

El Teorema de CHURCH permite establecer un corolario sobre el problema de la decisión.

Este corolario utiliza una hipótesis especial de coherencia, la *ω-coherencia en sentido fuerte* [30].

Sea un sistema *LF* que incluye constantes individuales correspondientes a los enteros. Se dice que este sistema es *ω-coherente en sentido fuerte* si, para todo predicado Λ^2 de *LF*, se da la condición siguiente: si las proposiciones $(E\,\Theta)\ \Lambda^2\ (\Theta)$ es derivable en *LF*, una al menos de las proposiciones $\sim \Lambda^2 \kappa$ no es derivable en *LF*.

El Corolario puede enunciarse como sigue [31]:

(XL) *Si un sistema LF es ω-coherente en sentido fuerte y lo suficientemente capaz para permitir ciertos procedimientos relativamente simples de definición y demostración (estas condiciones se reducen, poco más o menos, a las condiciones generales del Teorema de* GÖDEL [32]), *tal sistema no es resoluble (en sentido sintáctico)* [33].

Sean Y_1 e Y_2 dos fórmulas de *LF*-λ, y sean u_1 y u_2 sus respectivos números-G. Consideremos el enunciado metateórico: *La fórmula* Y_1 *es convertible en la* Y_2.

---

[30] CHURCH denomina a esta hipótesis *strong ω-consistency*. Véase CHURCH 6. CHURCH utiliza esta hipótesis en lugar de la ω-coherencia para obtener una demostración constructiva.

[31] CHURCH 8, § 8. También CHURCH 6.

[32] Véase § 107.

[33] Véase § 38.

Es posible demostrar el teorema siguiente: para toda fórmula de *LF*-λ, el conjunto de las fórmulas en las cuales es convertible esta fórmula, es recursivamente enumerable.

Más exactamente: existe una función recursiva biargumental, *Enm*-λ, tal que si u_1 es el número-G de una fórmula Y_1, (*Enm*-λ n u_1) es el número-G de la n-ésima fórmula en la cual Y_1 es convertible [34].

Decir que Y_1 es convertible en Y_2 equivale a afirmar: Y_2 forma parte de la serie de fórmulas que se pueden obtener a partir de Y_1 mediante reglas de transformación de *LF*-λ. O también:

(EX) (*Enm*-λ X $u_1 = u_2$).

Denominemos *A* a este enunciado.

El sistema *LF* se supone lo suficientemente capaz para que este enunciado sea representable en *LF*; para ello basta con que este sistema responda a la condición 3 del § 107.

Por tanto, podemos suponer que existe en *LF* una expresión funcional $\mathfrak{Enm}$-λ y una constante predicativa = tales que el enunciado *A* esté representado en *LF* por la proposición $\mathfrak{A}$:

(E $\mathfrak{X}$) ($\mathfrak{Enm}$-λ $\mathfrak{X}$ $N_{u_1} = N_{u_2}$), donde N_{u_1} y N_{u_2} son las expresiones de *LF* que representan a los enteros u_1 y u_2.

Si el enunciado *A* es cierto, esta proposición es derivable en *LF*. Efectivamente, se podrá derivar una secuencia de proposiciones del tipo ($\mathfrak{Enm}$-λ κ_1 $N_{u_1} = \kappa_2$) y finalmente una proposición ($\mathfrak{Enm}$-λ N_i $N_{u_1} = N_{u_2}$). De aquí se podrá derivar: (E$\mathfrak{X}$) ($\mathfrak{Enm}$-λ $\mathfrak{X}$ $N_{u_1} = N_{u_2}$) [35].

Por otra parte, si *A* no es cierta, esta proposición no podrá derivarse de *LF*.

En efecto, supongamos que sea derivable.

Como Y_1 no es convertible en Y_2, tendremos, cualquiera que sea n:

$\sim$ (*Enm*-λ n $u_1 = u_2$). Y todas las proposiciones de la forma
$\sim$ ($\mathfrak{Enm}$-λ κ $N_{u_1} = N_{u_2}$) serán derivables en *LF*.

Pero esto contradice la hipótesis de la ω-coherencia en sentido fuerte.

Si el sistema *LF* fuese resoluble sería posible dar un procedimiento efectivo que permitiese decidir si la proposición (E$\mathfrak{X}$) ($\mathfrak{Enm}$-λ $\mathfrak{X}$ $N_{u_1} = N_{u_2}$) es derivable o no en *LF*.

Pero, al mismo tiempo, se tendría un procedimiento efectivo que permitiese decidir si Y_1 es convertible en Y_2 o no, lo que, en virtud del teorema, es imposible.

CHURCH ha demostrado en particular que la Lógica de Predicados de primer orden responde a las condiciones de este corolario y que, por consiguiente, no es resoluble [36]. Con mayor razón el sistema de los *Principia Mathematica*, que es mucho más capaz, es no-resoluble.

---

[34] CHURCH 8, § 6, Teorema XII.

[35] Esta derivación puede practicarse en todo sistema que contenga los axiomas y reglas de la Lógica de Predicados de primer orden.

[36] CHURCH 5 y 6.

Hasta aquí, el problema de la decisión ha sido considerado bajo forma sintáctica. También se le puede enfocar bajo su forma *semántica.*

El resultado de GÖDEL sobre la saturación semántica de la Lógica de Predicados de primer orden permite extender el resultado de CHURCH al punto de vista semántico. GÖDEL ha demostrado que toda proposición válida de la Lógica de Predicados de primer orden es derivable y recíprocamente [37]. Si esta Lógica fuese resoluble en sentido semántico, también debiera serlo en sentido sintáctico.

Pero al no ser resoluble en sentido sintáctico, tampoco lo es en sentido semántico.

Pero la demostración dada por GÖDEL de la propiedad anteriormente expuesta, no es constructiva, por lo que sólo puede aceptarse con reservas.

154. COROLARIOS DEL TEOREMA DE CHURCH.

El Teorema de CHURCH incluye dos corolarios importantes que se incorporan resultados obtenidos por KLEENE.

1. (XLI) *El conjunto de las fórmulas bien construidas de LF-λ que no tienen forma normal no es recursivamente enumerable* [38].

Como se puede establecer en general que el conjunto de las fórmulas bien construidas es recursivamente enumerable [39], este corolario da el ejemplo de un conjunto recursivamente enumerable que se compone de dos conjuntos separados, de los cuales uno es recursivamente enumerable y el otro no, y que no es, por tanto, recursivo [40].

El segundo corolario da un ejemplo de función no-recursiva.

2. (XLII) *Sea una función F de enteros, de un argumento, definida como sigue*: $F\,n = 2$ *ó* 1 *según que n sea o no el número-G de una fórmula de LF-λ que tenga una forma normal. Esta función F no puede ser una función recursiva* [41].

SECCIÓN 3.—LOS RESULTADOS DE KLEENE Y DE TURING.

155. LOS RESULTADOS DE KLEENE.

Resultados análogos a los de CHURCH han sido obtenidos por KLEENE y por TURING. Donde CHURCH utiliza la noción de *función λ-definible,* KLEENE utiliza

[37] GÖDEL 2.
[38] CHURCH 8, § 8, Corolario 1.
[39] CHURCH 8, § 6, Teorema VII.
[40] Véase § 62.
[41] CHURCH 8, § 8, Corol. 2.

la de *función recursiva general* y TURING la de *función M-definible.* Como estas tres nociones son equivalentes, es, pues, normal que puedan llevar a resultados del mismo tipo.

CHURCH demuestra que no es posible caracterizar recursivamente la noción de fórmula que posea una forma normal; igualmente, KLEENE demuestra que no es posible caracterizar recursivamente la noción de función recursiva general.

El lema establecido por KLEENE [42] le permite, en efecto, demostrar:

(XLIII) *La clase de las ecuaciones que definen funciones recursivas generales no es recursivamente enumerable* [43].

Dicho de otra forma, no hay función recursiva F que posea las dos propiedades siguientes:

— Cualquiera que sea n, Fn tiene por valor el número-G de un sistema de ecuaciones que permite definir una función recursiva general.
— Para todo m que es el número-G de un sistema de ecuaciones como el citado, existe un n tal que $Fn = m$.

En efecto, sea una función F que posea estas propiedades. Haciendo uso del predicado *Pkl* [44], cualquiera que sea n, se puede escribir:

$$(X)\ (EY)\ Pkl\ (Fn)\ XY.$$

(Cualquiera que sea n y cualquiera que sea X, existe un Y que es el número-G de una ecuación de la forma $GX = \beta$, que se puede deducir del sistema de ecuaciones cuyo número-G es Fn.)

En tal caso, con mayor razón, haciendo $n = X$:

$$(X)\ (EY)\ Pkl\ (FX)\ XY.$$

Y el lema permite entonces decir:

Existe un número h tal que $(X)\ (E\,X)\ Pkl\ h\ XY$,
y tal que, para ningún m, *se tiene* $F\ m = h$.

Habría, por tanto, un sistema de ecuaciones cuyo número-G no figuraría entre los valores de F, lo que contradiría la definición de F.

Por consiguiente, la función F no puede existir.

Como la clase de las ecuaciones que definen funciones recursivas generales no es recursivamente enumerable, no es recursiva [45]. No existe, pues, procedimiento efectivo que permita decidir si una ecuación dada define o no una función recursiva general.

Este teorema permite obtener corolarios análogos a los del Teorema de CHURCH.

1. (XLIV) *La clase de las* X *tales que* $\sim (E\,Y)\ Pkl\ X\ X\ Y$ *no es recursivamente enumerable* [46].

---

[42] Véase § 113.
[43] KLEENE 5, pág. 739, Teorema XI.
[44] Véase § 112.
[45] KLEENE 5, pág. 739. Teorema XII.
[46] KLEENE 5, pág. 741. Teorema XVI.

Este corolario se basa sobre la propiedad siguiente:

La clase de las X tales que (E *Y*) *Pkl X X Y no sea recursiva, es, sin embargo, recursivamente enumerable* [47].

2. (XLV) *La función Min y* [*Pkl X X Y*] *no es recursiva* [48].

En efecto, se puede demostrar que esta función es diferente de cada función recursiva, al menos para un valor de su argumento *X*.

156. El Teorema de Turing.

Turing ha obtenido resultados análogos en su teoría de las máquinas.

La noción central sigue siendo la de *procedimiento efectivo,* pero Turing propone precisarla utilizando la idea de máquina: se dirá que existe un procedimiento efectivo que permite decidir si una cierta propiedad pertenece o no a un cierto objeto, si se puede describir una máquina que permita resolver automáticamente este problema. (Así, por ejemplo, se hará corresponder biunívocamente a los objetos del dominio estudiado números enteros, y se dirá que la propiedad en cuestión pertenece o no al número *n* según que la *n*-ésima cifra de la serie numérica calculada por la máquina sea 0 ó 1) [49].

Una máquina-T puede caracterizarse por su *programa.* Este se presenta en forma de un cuadro. Si se escriben las líneas de este cuadro unas a continuación de otras, separándolas por medio de signos de conjunción, se puede, gracias a un sistema apropiado de notaciones, representar este programa por medio de una serie de símbolos. Haciendo corresponder biunívocamente números enteros a los símbolos utilizados, se puede reemplazar esta serie de símbolos por un número al que se denomina *número-D* de la máquina y que sirve como definición de ésta. Así, pues, a cada máquina-T va asociado un *número*-D, y sólo uno.

Kleene demuestra que no existe procedimiento efectivo que permita decidir si un sistema dado de ecuaciones define o no una función recursiva general. También demuestra Turing que no existe procedimiento efectivo que permita decidir si un número dado es o no el número-D de una máquina-T no circular. Se denominará *máquina de decisión* (o máquina *Ma-D*) a una máquina [50] dotada de la propiedad siguiente: si *n* es un número entero cualquiera, cuando se provee a la máquina del dato *n* (máquina *Ma-D*) ésta escribe 0 ó 1, según que *n* sea o no el número-D de una máquina no-circular *Ma,* cualquiera que sea la máquina *Ma.*

---

[47] Kleene 5, pág. 741. Teorema XV, y demostración del Teorema XVI.

[48] Kleene 5, pág. 741. Teorema XIV.

[49] También se podría decir: para Turing, un procedimiento de decisión es efectivo si se le puede representar por medio de una función M-definible.

[50] En todo lo que sigue, el término *máquina* significará *máquina*-T.

El Teorema de TURING puede formularse como sigue:

(XLVI) *No es posible definir una máquina de decisión* [51].

157. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE TURING.

Supongamos que existe una máquina *Ma-D* como la descrita. Esta hipótesis conduce a una contradicción.

La demostración se apoya en la utilización del procedimiento de la diagonal.

Denominemos *número*-D de una *serie* M-*definible* al número-D que va asociado a la máquina que escribe esta serie. Imaginemos las series M-definibles clasificadas según el orden (de magnitud creciente) de sus números-D y designemos por Sy_n la n-ésima de estas series, y por *Seq-n m* la m-ésima cifra de Sy_n [52].

Definamos también una serie Sy_D como sigue:

La n-ésima cifra de Sy_D es *Seq-n n*, es decir, la n-ésima cifra de la serie Sy_n.

Si la máquina *Ma-D* existe, se puede construir, combinando *Ma-D* con la máquina universal *Ma-U*, una máquina *Ma-G* que calcule la serie Sy_D.

El funcionamiento de esta máquina puede describirse de la manera siguiente:

Se somete a la máquina *Ma-D* la serie de los números enteros sucesivos, y la máquina *Ma-D* selecciona aquellos que son los números-D de una máquina no-circular; la máquina *Ma-U* calcula entonces el número buscado de términos de la serie correspondiente.

Más exactamente, las operaciones se realizan por etapas sucesivas.

En la k-ésima etapa, la máquina *Ma-G* escribe el entero k, y la máquina *Ma-D* determina si k es el número-D de una máquina no circular.

Designemos por $(Nmc\ j)$ el número de enteros comprendidos entre 0 y j, que son los números-D de una máquina no-circular. En el curso de las $(k-1)$ primeras etapas, *Ma-D* ha aislado $[Nmc\ (k-1)]$ enteros de este género. (Por supuesto, $Nmc\ (k-1)$ puede ser nulo.)

Si k es el número-D de una máquina no-circular, $Nmc\ k = [Nmc\ (k-1)] + 1$.

Entonces, la máquina *Ma-U* entra en acción y calcula los $(Nmc\ k)$ primeras cifras de la serie definida por la máquina cuyo número-D es k.

La última cifra de esta serie es la $(Nmc\ k)$-ésima cifra de la serie Sy_D, y será escrita por la máquina a continuación de las $[Nmc\ (k-1)]$ cifras ya expresadas.

Si k no es el número-D de una máquina no-circular, $Nmc\ k = Nmc\ (k-1)$.

A continuación, se pasa a la etapa siguiente: examen de $(k+1)$, y así sucesivamente.

La máquina *Ma-G* es no-circular.

---

[51] TURING 1, § 8, págs. 246-258.

[52] La función *Seq-n* es una *función de selección* sobre la serie M-definible Sy_n.

Cada etapa finaliza después de un número finito de operaciones, pues *Ma-D* emite su veredicto en un número finito de operaciones, y si *Ma-U* debe intervenir, como *Ma-U* es no-circular, el resultado buscado se obtiene en un número finito de operaciones.

Existe, pues, un número g que es el número-D de la máquina *Ma-G*.

¿Qué sucederá en la g-ésima etapa?

La máquina *Ma-D* no puede dar como resultado 1, pues *Ma-G* es no-circular.

Pero tampoco puede dar como resultado 0.

En efecto, si fuese así, la máquina *Ma-U* debería entrar en acción y calcular la (*Nmc g*)-ésima cifra de la serie definida por la máquina cuyo número-D es g, es decir, por la máquina *Ma-G* misma. Podría perfectamente dar las (*Nmc g* — 1) primeras cifras de esta serie, puesto que ya han sido calculadas por *Ma-G*. Pero nunca podrá dar la (*Nmc g*)-ésima cifra de la serie, por la razón de ser ésta, precisamente, la que se trata de calcular ahora.

Es en este punto donde se percibe el carácter circular de la hipótesis introducida. Efectivamente, la máquina *Ma-G* va a tener que enfrentarse con las instrucciones siguientes: *Calcular las* (*Nmc g*) *primeras cifras calculadas por Ma-G y escribir la* (*Nmc g*)-ésima.

No habrá ninguna dificultad para las (*Nmc g* — 1) primeras cifras, pero cuando se trate de calcular la (*Nmc g*)-ésima nos encontraremos exactamente ante las mismas instrucciones.

La máquina *Ma-G* se pondrá indefinidamente a repetir las mismas operaciones. En otros términos, esta máquina es circular, y la máquina *Ma-D* no podrá, por tanto, dar 0 como resultado cuando tenga que examinar el entero g.

Los dos veredictos son, por consiguiente, igualmente imposibles. La máquina *Ma-D* es, pues, deficiente, al menos para un entero determinado, lo que equivale a decir que no existe máquina *Ma-D*.

158. Corolario del Teorema de Turing.

Turing deduce de su teorema un importante corolario que proporciona un ejemplo de una propiedad *no-efectiva*.

(XLVII) *No es posible construir una máquina Ma-Em que permita determinar si una máquina dada Ma-m escribe o no un símbolo dado* [53].

Una máquina *Ma-Em* tendría la propiedad siguiente: cuando se le da a título de dato el número-D de una máquina no-circular *Ma-m*, escribe 0 ó 1 según que *Ma-m* escriba un cierto símbolo (por ejemplo 0) en su resultado o no.

[53] Turing 1, § 8.

La demostración se hace nuevamente por reducción al absurdo, ligando la existencia hipotética de *Ma-Em* a la de *Ma-D.*

Supongamos que la máquina *Ma-Em* existe.

En tal caso, se podría construir una máquina *Ma-Hm* que determinaría si *Ma-m* escribe 0 un número infinito de veces o no.

Sea $Ma\text{-}m_1$ una máquina que escribe la misma serie que *Ma-m,* con la única diferencia siguiente: cuando *Ma-m* escribe su primer 0, $Ma\text{-}m_1$ escribe ω. Sea $Ma\text{-}m_2$ una máquina que reemplaza así a los dos primeros 0 de *Ma-m* por ω. Y así sucesivamente.

Se puede construir una máquina *Ma-Fm* que, cuando se le alimenta con el número-D de *Ma-m,* escribe sucesivamente los números-D de $Ma\text{-}m_1$, de $Ma\text{-}m_2$, de $Ma\text{-}m_3$, etc.

Es posible entonces combinar *Ma-Em* y *Ma-Fm* para obtener una máquina *Ma-Gm* que opere como sigue:

En la primera etapa de su cálculo, *Ma-Gm* utiliza *Ma-Fm* para escribir el número-D de $Ma\text{-}m_1$ *Ma-Em* interviene entonces para determinar si $Ma\text{-}m_1$ escribe 0 o no en su resultado (al menos una vez). Si la respuesta es negativa, *Ma-Gm* escribe 0. A continuación, interviene de nuevo *Ma-Fm* para dar el número-D de $Ma\text{-}m_2$ y *Ma-Em* examina este número-D. Si $Ma\text{-}m_2$ no escribe nunca 0, *Ma-Gm* escribe un segundo 0. Y así sucesivamente.

Combinando *Ma-Gm* con *Ma-Em* se obtiene la máquina *Ma-Hm. Ma-Em* permite conocer si *Ma-Gm* escribe 0 al menos una vez. Si *Ma-Gm* escribe 0 al menos una vez, es que *Ma-m* no escribe 0 un número infinito de veces. (Existe al menos una máquina $Ma\text{-}m_n$ que nunca escribe 0, al ser reemplazados todos los 0 de *Ma-m* por ω.)

Si *Ma-Gm* no escribe nunca 0, quiere decir que todas las máquinas $Ma\text{-}m_j$ escriben 0, cualquiera que sea j; por consiguiente, *Ma-m* escribe 0 un número infinito de veces.

Por un procedimiento análogo, se puede construir una máquina que permita decidir si *Ma-m* escribe 1 un número infinito de veces o no. Y así sucesivamente.

Combinando estos diversos procedimientos (para las diferentes cifras), se podrá obtener una máquina que haga posible determinar si *Ma-m* escribe una infinidad de cifras, es decir, si *Ma-m* es no-circular. (Si *Ma-m* fuese circular, no se podría rebasar una cierta etapa del cálculo, y, por consiguiente, la serie efectivamente calculada sería finita.)

Es así que el teorema principal nos muestra que no existe una máquina que cumpla estos requisitos.

Por consiguiente, la máquina *Ma-Em* no existe.

159. Los resultados de Turing y el problema de la decisión.

Estos resultados permiten a Turing coincidir, mediante su teoría de máquinas, con los resultados de Church sobre el *problema de la decisión.* Turing considera directamente la lógica de predicados de primer orden. El resultado obtenido es váli-

do para toda la extensión de este cálculo y, por tanto, para los cálculos de orden superior. Y, *a fortiori,* para el sistema de los *Principia Mathematica,* que incluye una teoría completa de los tipos.

CHURCH reduce el problema de la decisión a un problema del cálculo de la conversión-λ; TURING lo centra en un problema de la teoría de máquinas.

Su demostración puede esquematizarse como sigue:

Sea una cierta máquina *Ma,* y sea m_a su número-D.

Podemos introducir predicados que correspondan a ciertas propiedades y operaciones de la máquina, y construir, sirviéndonos de estos predicados, un enunciado *Unm* m_a que signifique: *La máquina Ma escribe el símbolo 0 en el curso de una de las etapas de su funcionamiento.*

Completando la lógica de predicados de primer orden con ciertas constantes predicativas y los axiomas que les corresponden, se obtiene un sistema *LFP-A* (lógica *de predicados aplicada*), en el cual el enunciado *Unm* m_a sea representable por medio de una proposición $\mathfrak{A}\text{nm}\ N_{m_a}$ [54].

TURING establece dos lemas.

Primer lema. (XLVIII). *Si el símbolo 0 aparece en el curso de una de las etapas de funcionamiento de la máquina Ma, la proposición* $\mathfrak{A}\text{nm}\ N_{m_a}$ *es derivable en LFP-A* [55].

Segundo lema. (XLIX). *Si la proposición* $\mathfrak{A}\text{nm}\ N_{m_a}$ *es derivable en LFP-A, la máquina Ma escribe el símbolo 0 en un momento dado* [56].

Si el problema de la decisión puede ser resuelto por el sistema *LFP-A,* se dispone de un procedimiento efectivo que permitirá decidir si la proposición $\mathfrak{A}\text{nm}\ N_{m_a}$ es derivable o no, y, por tanto, si la máquina *Ma* escribe o no el símbolo 0 en el curso de su funcionamiento. Si se descubre la existencia de un *procedimiento efectivo* en el de una máquina adecuada, se ve que esta conclusión contradice el corolario del parágrafo precedente (XLVII (158)). De aquí, se sigue que el problema de la decisión no puede ser resuelto para *LFP-A.*

Se puede demostrar que, si el problema de la decisión pudiese resolverse para la lógica de predicados de primer orden, también podría resolverse para la *LFP-A* [57].

(L) *La lógica de predicados de primer orden no es, pues, resoluble (en el sentido sintáctico).*

Para todo sistema coherente saturado sintácticamente en el sentido fuerte, es decir, con proposiciones derivables o refutables, el método de TURING ofrece un procedimiento efectivo de decisión.

Efectivamente, se puede aritmetizar este sistema y construir una máquina que escriba sucesivamente los números-G de todas las proposiciones derivables del sis-

---

[54] La expresión N_{ma} representa en *LFP-A* el entero m_a.

[55] TURING 1, § 11, pág. 261. Lema 1.

[56] TURING 1, § 11, pág. 262. Lema 2.

[57] Por una argumentación análoga a la utilizada por CHURCH 5, pág. 41.

tema. Dada una proposición A, la máquina escribe, en un momento dado, *Ngd*(A) o *Ngd*(~ A).

En el primer caso, se sabe que A es derivable. En el segundo, puesto que el sistema es coherente, se sabe que A no es derivable.

Una función se dice que es M-definible si la serie de sus valores puede representarse por una serie M-definible. Dada la equivalencia que existe entre las nociones de *función* M-*definible* y *función recursiva general,* la noción de serie M-*definible* es equivalente a la de *conjunto recursivamente enumerable.* Decir que los números asociados a las proposiciones derivables de un sistema pueden escribirse sucesivamente mediante una máquina-T, equivale, pues, a decir que estas proposiciones forman un conjunto recursivamente enumerable.

Pero la expresión *procedimiento efectivo de decisión* se puede entender en un sentido más exigente. Así, se dirá que existe un procedimiento efectivo que permite decidir si una proposición de un sistema *LF* es derivable o no, si se puede poner a punto una máquina *Ma* que tenga la propiedad siguiente: si el número asociado a una proposición A es *n,* la *n*-ésima cifra de la serie escrita por la máquina *Ma* es 0 ó 1, según que A sea derivable o no en *LF.* Esto equivale a decir que existe una función recursiva general que toma el valor 0 ó 1, según que A sea derivable o no en *LF.* O también, que el conjunto de las proposiciones derivables de *LF* es recursivo (general).

Como un conjunto recursivamente enumerable no es necesariamente recursivo, estos dos métodos de decisión no coinciden, y el primero puede aplicarse a sistemas a los cuales no se aplicaría el segundo.

SECCIÓN 4.—LOS METODOS DE POST.

160. SISTEMAS CANÓNICOS Y SISTEMAS NORMALES.

POST ha desarrollado una teoría de conjuntos recursivos muy parecida a la teoría de funciones recursivas y que le ha permitido abordar desde otro ángulo los problemas de decisión. La teoría de POST es tanto más interesante para el punto de vista que nos ocupa, pues conduce a una forma simplificada del teorema de GÖDEL. De esta forma manifiesta el vínculo que existe entre el problema de la decisión y la existencia de proposiciones indecidibles.

El método de POST descansa sobre la consideración de sistemas que obedecen a ciertas condiciones de estructura, a los que llama *sistemas canónicos.*

Un sistema canónico queda definido cuando responde a las condiciones siguientes:

1. El número de sus componentes primitivas es finito.

2. El número de axiomas es finito, y cada axioma se compone de una serie finita de componentes primitivas.

3. El número de reglas de derivación es finito, y cada regla adopta la forma de un esquema que permite plantear, a partir de un conjunto finito de premisas, una cierta conclusión. Estos esquemas presentan la forma general que se expone a continuación:

$$\begin{array}{l} Sy_{i1}\ \Sigma_{i1}\ Sy_{i2}\ \Sigma_{i2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ Sy_{1\,m'}\ \ \Sigma_{1\,m'}\ \ Sy_{1\,(m'+1)} \\ Sy_{i2}\ \Sigma_{i2}\ Sy_{i2}\ \Sigma_{i2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ Sy_{2\,m''}\ \ \Sigma_{2\,m''}\ \ Sy_{2\,(m''+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Sy_{k1}\ \Sigma_{k1}\ Sy_{k2}\ \Sigma_{k2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ Sy_{k\,m^{(k)}}\ \ \Sigma_{k\,m^{(k)}}\ \ Sy_{k\,(m^{(k)}+1)} \\ \hline Sy_{i1}\ \Sigma_{i_1}\ Sy_{i2}\ \Sigma_{i_2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ Sy_{1\,m}\ \ \Sigma_{i_m}\ \ Sy_{1\,(m+1)}. \end{array}$$

En este esquema, los símbolos Sy_i designan series finitas determinadas de componentes primitivas; estas series se fijan en cada regla. Los símbolos Σ_i son variables sintácticas: pueden ser reemplazados por series finitas cualesquiera de componentes primitivas. Todas las premisas y la conclusión deben contener, al menos, un símbolo Σ_{i_1} y todo símbolo Σ_i que figure en la conclusión, debe figurar, al menos, en una de las premisas.

El número de premisas (designado por el índice k) es arbitrario, pero debe ser finito. En cada línea, el número de signos Sy_i es igual al de Σ_i aumentado en una unidad. Este número (designado por el índice $m^{(j)}$) puede ser diferente en cada una de las filas. Determinados símbolos Sy_i pueden designar una serie vacía, y cada uno de los símbolos Σ_i puede ser reemplazado por una serie vacía.

Damos dos ejemplos de un esquema de este tipo.

Consideremos un sistema canónico que incluye las siguientes componentes primitivas:

$$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_p.$$

Tal sistema podrá incluir el esquema:

$$\frac{\Sigma_{i1}\ a_1\ a_2}{\Sigma_{i1}\ a_2\ a_1.}$$

Los símbolos Sy_{i1} y Sy_{i1} del esquema general, corresponden aquí a series vacías. El símbolo Σ_{i1} del esquema general es aquí Σ_{i1}. Los símbolos Sy_{i2} y Sy_{i2} del esquema general se reemplazan aquí por las series $a_1\ a_2$ y $a_2\ a_1$. Este esquema significa: dada una serie determinada por los símbolos a_1 y a_2, inviértase el orden de estos símbolos.

Nuestro sistema podrá también incluir el esquema:

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ \Sigma_{11}\ a_{m-1}\ a_m \\ b_1\ b_2\ \Sigma_{21}\ b_{n-1}\ b_n \\ c_1\ c_2\ \Sigma_{31}\ c_{p-1}\ c_p \\ \hline a_1\ b_1\ c_1\ \Sigma_{11}\ a_m\ \ b_n\ c_p \end{array}$$

El símbolo Σ_{i_1} del esquema general es aquí Σ_{11}.

Los símbolos Sy_{11}, Sy_{12}, Sy_{21}, Sy_{22}, Sy_{31}, Sy_{32}, Sy_{11}, Sy_{12} del esquema general, se reemplazan aquí, respectivamente, por las series $a_1\ a_2$, $a_{m-1}\ a_m$, $b_1\ b_2$, $b_{n-1}\ b_n$, $c_1\ c_2$, $c_{p-1}\ c_p$, $a_1\ b_1\ c_1$, $a_m\ b_n\ c_p$.

Este esquema opera una transformación de la primera premisa utilizando el primero y el último símbolo de cada uno de los dos siguientes.

Los *teoremas* son los *axiomas* y todas las series finitas de componentes primitivas que es posible obtener de los axiomas mediante la aplicación de *reglas* (esquemas).

Se dice que un sistema es *normal* si es canónico y, además, obedece a las condiciones siguientes:

1. Incluye solamente un axioma (o una sola serie inicial de componentes primitivas).

2. Cada regla es del tipo simple:

$$\frac{Sy\ \Sigma}{\Sigma\ Sy.}$$

161. El problema de la decisión para los sistemas canónicos y para los sistemas normales.

El *problema de la decisión* para un sistema canónico o normal es el siguiente: encontrar un procedimiento efectivo que permita determinar si una serie finita de componentes primitivas del sistema constituye un teorema o no.

Post demuestra que todo sistema canónico LF_c puede reducirse a un sistema normal LF_n.

Más exactamente: dado un sistema canónico LF_c, se puede formar un sistema normal LF_n tal que las componentes primitivas de LF_c forman parte del conjunto de las componentes primitivas de LF_n y que los teoremas de LF_c sean los teoremas de LF_n que no llevan otras componentes positivas que las de LF_c[58].

[58] Post 3.

De aquí se sigue que el problema de la decisión para los sistemas canónicos se reduce al problema de la decisión para los sistemas normales.

La mayor parte de los sistemas formales que se utilizan no son sistemas canónicos, pero se puede demostrar, para una clase muy amplia de sistemas, que el problema de la decisión para estos sistemas se reduce al problema de la decisión para los sistemas canónicos.

El *problema general de la decisión* para la clase de los sistemas canónicos (o para los sistemas normales) es el siguiente: encontrar un procedimiento efectivo que permita resolver el problema de la decisión para cada uno de los sistemas de esta clase.

POST sostiene que, en 1921, había esbozado la demostración de dos teoremas muy importantes sobre los problemas de decisión.

1. (LI) *El problema de la decisión para el sistema de los* Principia Mathematica *se reduce al problema de la decisión para un sistema canónico, y lo mismo sucede para una amplia clase de sistemas emparentados con los de los* Principia Mathematica.

2. (LII) *El problema general de la decisión para la clase de sistemas normales es insoluble.*

Igualmente sostiene que, a partir de éstos, había entrevisto la posibilidad de demostrar el siguiente teorema, prefiguración del de GÖDEL.

(LIII) *Todo sistema formal que comprende solamente un número finito de axiomas contiene proposiciones indecidibles* [60] *y puede extenderse de tal forma, que estas proposiciones se hagan decidibles.*

Pero POST nunca ha publicado demostración de estos resultados.

Por el contrario, ha indicado [61] que es posible, apoyándose en los resultados conseguidos por CHURCH, demostrar de manera rigurosa el teorema LII anteriormente expuesto (§ 161).

Consideremos el problema siguiente: encontrar un procedimiento efectivo que permita determinar si una fórmula bien construida del sistema *LF*-λ tiene o no una forma normal. Se puede demostrar que este problema puede reducirse a un problema de decisión para un cierto sistema canónico, y, por consiguiente, para un cierto sistema normal LF_n.

CHURCH ha dado una demostración explícita de este resultado [62].

Si se identifican los conceptos de *procedimiento efectivo* y *función recursiva*, se deduce del corolario 2 del § 154 (enunciado XLII (154)) que el problema de la decisión para un sistema LF_n es insoluble. Y como el problema general de la decisión para la clase de sistemas normales (y, por consiguiente, para la de los sistemas canónicos) es insoluble.

---

[59] POST 3, pág. 215, nota 18.

[60] Se trata de proposiciones correspondientes a enunciados del tipo: *Tal serie de componentes primitivas es un teorema de tal sistema formal.*

[61] POST 3.

[62] CHURCH 14, pág. 51.

POST ha demostrado también este resultado por un procedimiento indirecto, sin utilizar los resultados de CHURCH, apoyándose únicamente sobre su teoría de los conjuntos recursivos.

162. CONJUNTOS RECURSIVOS Y CONJUNTOS RECURSIVAMENTE ENUMERABLES.

La teoría de POST puede ser incorporada a la de las funciones recursivas.

Consideremos un grupo de letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, y el conjunto *En* de las series finitas que pueden formarse por medio de estas letras.

Se dice que un subconjunto En_a de *En* es un *conjunto normal* respecto al grupo de letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, si existe un sistema normal que incluya estas letras entre sus componentes primitivas y tal que el conjunto de las series En_a constituya el conjunto de los teoremas de este sistema que no contiene otras componentes primitivas que las letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$.

Se dice que un subconjunto En_a de *En* es un *conjunto binormal* respecto al grupo de letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ si es normal (respecto a este grupo de letras) y si su complemento En_b (respecto a *En*) es normal (respecto al grupo de letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$).

Un subconjunto En_a de *En* es, pues, un conjunto binormal respecto al grupo de letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, si existen dos sistemas normales LF_a y LF_b que incluyan estas letras entre sus componentes primitivas, y tales que el conjunto de las series En_a y su complemento En_b (respecto a *En*) constituyan, respectivamente, el conjunto de los teoremas de LF_b que no contienen otras componentes primitivas que las letras $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$.

Se puede demostrar que la noción de normalidad corresponde con la de enumerabilidad recursiva y que la noción de binormalidad corresponde con la de recursividad general [63].

La noción de *sistema normal* proporciona, por tanto, una nueva representación formal de la noción de *procedimiento efectivo* y permite obtener resultados emparentados con los de CHURCH, KLEENE y TURING.

En lugar de considerar conjuntos normales respecto a un cierto grupo de letras, puede ser suficiente —para obtener una correspondencia más explícita entre la noción de normalidad y la de enumerabilidad recursiva— considerar sistemas normales que poseen solamente dos componentes primitivas: 1 y 0.

Denominemos a tal sistema: *sistema normal numeral.* Un entero *n* podrá estar representado por una serie de *n* símbolos 1; 0 desempeña el papel de un símbolo auxiliar.

[63] POST 3.

Las reglas serán del tipo:

$$\frac{0\ 1\ 0\ \Sigma}{\Sigma\ 1\ 0\ 0\ 1.}$$

(Esta regla se aplica a una serie que comienza por la serie parcial 0 1 0: suprime esta serie parcial y escribe, a continuación de lo que queda, la serie parcial 1 0 0 1.)

Sea Sy_A la serie de componentes primitivas que constituyen el axioma del sistema. Las series derivadas son todas las que se pueden derivar de Sy_A por medio de reglas. Entre estas series derivadas se pueden encontrar series de 1 que representen enteros. Así, todo sistema normal numeral determina unívocamente un cierto conjunto de enteros (eventualmente vacía): el conjunto de las series derivadas del tipo 1 ..... 1.

Se puede demostrar que todo conjunto recursivamente enumerable de enteros es el conjunto de enteros definido por un cierto sistema normal numeral, e inversamente [64].

Se denomina *base* de un sistema normal la serie de símbolos:

Sy_A; $Sy_{11}\ \Sigma_1,\ \Sigma_1\ Sy_{12}$; $Sy_{21}\ \Sigma_2,\ \Sigma_2\ Sy_{22}$; .....; $Sy_{n1}\ \Sigma_n\ Sy_{n2}$.

(Esta serie representa el axioma único y el conjunto de las reglas del sistema.)

Gracias al procedimiento de aritmetización se puede hacer corresponder a esta serie de símbolos un número entero que determine unívocamente el sistema en cuestión. El conjunto de bases es numerable, lo que demuestra que la clase de los conjuntos recursivamente enumerables es numerable.

Este conjunto puede ser ordenado (por ejemplo, según el orden de magnitud de los enteros correspondientes).

Sobre la base de estos conceptos, POST redescubre ciertos teoremas establecidos por KLEENE mediante su teoría de las funciones recursivas.

1. (LIV) *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto infinito de enteros positivos sea recursivo, es que éste sea recursivamente enumerable sin repetición siguiendo el orden de magnitud* [65].

2. (LV) ***Existe un conjunto recursivamente enumerable de enteros positivos que no es recursivo*** [66].

Este conjunto es el *En-D* definido de la manera siguiente: el entero *n* está en *En-D* si pertenece al *n*-ésimo conjunto de la serie ordenada de los conjuntos recursivamente enumerables. La demostración se basa en el procedimiento de la diagonal.

Este último teorema no corresponde solamente a una propiedad establecida por KLEENE, sino también a una propiedad establecida por CHURCH para el sistema *LF-λ*:

---

[64] POST 4, Introducción.

[65] POST 4, § 1. KLEENE 5. Teorema VII.

[66] POST 4, § 1. KLEENE 5. Teorema XV y demostración del Teorema XVI. Véase § 155 Corolario 1 (Enunciado XLIV 155).

(LVI) *La clase de las fórmulas bien construidas que poseen una forma normal no es recursiva, pero es recursivamente enumerable* [67].

El *problema de la decisión para un conjunto de enteros* consiste en hallar un procedimiento efectivo que permita decidir, para cada entero, si pertenece o no a este conjunto. Diremos que un conjunto para el cual el problema de la decisión puede ser resuelto es *resoluble.* Si se identifican los conceptos de *procedimiento efectivo* y *función recursiva* se observa que un conjunto de enteros sólo es resoluble si es recursivo.

Y el teorema LV(162) de este mismo parágrafo nos permite decir que existen conjuntos de enteros recursivamente enumerables que no son resolubles.

163. El Teorema de Post.

Considerando un conjunto de esta especie, POST ha podido establecer uno de los teoremas más importantes de su teoría, a propósito del problema de la decisión.

Este teorema puede enunciarse como sigue:

(LVII) *El problema de la decisión para la clase de los sistemas normales numerales es insoluble* [68].

Dicho de otra forma: no es posible dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para todo sistema normal numeral y para todo entero *n,* si este entero pertenece o no al conjunto de los enteros engendrados (bajo la forma de series de 1) por este sistema.

Dado que existe correspondencia entre sistema normal numeral y conjunto recursivamente enumerable, este teorema afirma que el problema de la decisión para la clase de los conjuntos recursivamente enumerables es insoluble. Por otra parte, se deduce inmediatamente de este teorema que el problema general de la decisión para la clase de los sistemas normales (y, por consiguiente, para la de los sistemas canónicos) es insoluble.

Por tanto, este resultado queda establecido de manera directa.

He aquí el bosquejo de la demostración.

En lugar de considerar directamente un conjunto recursivamente enumerable o el sistema normal numeral que permita engendrarle, se puede considerar la base de este sistema.

El problema de la decisión al que se refiere el teorema puede entonces formularse así: para toda base *Ba* y para todo entero *n,* determinar de manera efectiva si *n* forma parte o no del conjunto de enteros engendrado a partir de la base *Ba.*

Se puede dar una formulación más precisa a este problema identificando los conceptos de *procedimiento efectivo* y *función recursiva.* El problema depende de dos

[67] CHURCH 8, § 6. Teorema XV y § 8, Corolario 2. Véase § 154, Corolario 2 (enunciado XLII 154).

[68] POST 4, § 2.

elementos: la base *Ba* y el entero *n*. En lugar de utilizar funciones recursivas biargumentales, se pueden utilizar funciones de un argumento considerando simultáneamente la base *Ba* y el entero *n* bajo la forma de par (*Ba, n*).

A cada par (*Ba, n*) se puede hacer corresponder un número entero. Las bases pueden, en efecto, ser ordenadas, por ejemplo, según el orden de magnitud de los enteros a los que van asociadas. Combinando la ordenación de las bases y la ordenación natural de los enteros, se puede obtener fácilmente una ordenación de los pares (*Ba, n*). A cada par se puede, por tanto, asociar su número de orden en esta ordenación, y el problema depende ya solamente de un solo elemento: el número entero asociado al par (*Ba, n*).

A todo par así considerado se puede hacer corresponder un enunciado. Así, al par (Ba_m, *k*) se hará corresponder el enunciado: *el entero k pertenece al conjunto de enteros engendrado a partir de la base* Ba_m. Un enunciado de este tipo puede ser verdadero o falso.

Denominemos *En-C* al conjunto ordenado de los pares (Ba_m, *k*). Denominemos *En-Cv* al subconjunto de *En-C* constituido por pares correspondientes a enunciados ciertos. El complemento *En-Cf* de *En-Cv* respecto a *En-C* estará constituido por el conjunto de los pares correspondientes a enunciados falsos.

El problema se reduce a lo siguiente: ¿es posible encontrar una función recursiva de un argumento *F* tal que *Fm* adopte el valor 0 ó 1 según que el par (*Ba, n*) asociado al entero *m* pertenezca a *En-Cv* o a *En-Cf*? Dicho de otra forma: ¿Es recursivo el conjunto *En-Cv*?

Se puede demostrar que este conjunto es recursivamente enumerable. En efecto, se dispone de un procedimiento efectivo que permite escribir sus diferentes elementos. Se considera sucesivamente cada base, siguiendo el orden de las bases. Para cada base Ba_m se derivan las series que es posible obtener a partir de ella. Cada vez que se encuentra una serie correspondiente a un entero *k* se escribe el par (Ba_m, *k*). Se obtienen así los diferentes elementos del conjunto *En-Cv* en un orden que puede ser evidentemente del de *En-C*. A partir de este orden se puede establecer que *En-Cv* es recursivamente enumerable.

Si *En-Cf* fuese también recursivamente enumerable, *En-Cv* sería recursivo y el problema de la decisión sería resoluble. Pero vamos a ver que *En-Cf* no disfruta de esta propiedad.

Sea, en efecto, En_a un subconjunto recursivamente enumerable de *En-Cf*. Construyamos un par (Ba_i, *i*) que pertenezca a *En-Cf*, pero no a En_a. Para ello comencemos por construir un conjunto de enteros En_i de la manera siguiente:

Enumeremos los pares que pertenecen a En_a.

Cada vez que obtengamos un cierto par (Ba_m, *k*), tomemos la *k*-ésima base Ba_k en la serie ordenada de las bases. Si $Ba_k = Ba_m$, *k* pertenece a En_i. Disponemos, por tanto, de un procedimiento efectivo para obtener sucesivamente los diversos elementos de En_i. Se puede demostrar que En_j es recursivamente enumerable, partiendo de los razonamientos expuestos.

Existe, pues, un cierto sistema normal numeral que le corresponde, y, por consiguiente, una cierta base. Sea i el número de orden de esta base en la serie ordenada de las bases. Designemos por Ba_i esta base y formemos el par (Ba_i, i).

El conjunto En_i es el conjunto de los enteros n que corresponden a los pares de forma (Ba_n, n) que pertenecen a En_a.

El par (Ba_i, i) no pertenece a En_a.

Supongamos, en efecto, que (Ba_i, i) perteneciese a En_a. Entonces, con mayor motivo (Ba_i, i) forma parte de *En-Cf*, lo que significa que i no pertenece al conjunto de enteros engendrado por la base Ba_i y, por tanto, en virtud de la definición de Ba_i, que i no pertenece a En_i. Pero, por otra parte (Ba_i, i) es un par de forma (Ba_n, n) perteneciente a En_a, motivo por el cual, por definición de En_i, i pertenece a En_i.

Terminamos, por tanto, en una contradicción y debemos afirmar que (Ba_i, i) no puede pertenecer a En_a.

Sin embargo (Ba_i, i) pertenece a *En-Cf*.

Este par (Ba_i, i) no puede, en efecto, pertenecer a *En-Cv* a no ser que el entero i pertenezca al conjunto engendrado por Ba_i, es decir (por definición de Ba_i), al conjunto En_i. Pero i sólo puede pertenecer a En_i si (Ba_i, i) pertenece a En_a, lo que no es posible.

Así, cualquiera que sea el subconjunto recursivamente enumerable En_a de *En-Cf* existe un par (Ba_i, i) que pertenece a *En-Cf* pero no pertenece a En_a. Si *En-Cf* fuese recursivamente enumerable, se podría en particular considerarlo como subconjunto recursivamente enumerable de sí mismo, y se llegaría a la conclusión absurda de que *En-Cf* es diferente de sí mismo.

De aquí se sigue que *En-Cv* no es recursivo, y que el problema de la decisión para la clase de conjuntos recursivamente enumerables es insoluble.

Se ve que lo esencial de la demostración consiste en construir un conjunto recursivamente enumerable En_i y demostrar que el número asociado a este conjunto no forma parte del conjunto. El tipo de paradoja utilizado es el de la paradoja del embustero, que se manifiesta en las propiedades del par (Ba_i, i).

164. Consecuencias de las proposiciones indecidibles.

A través de este teorema POST redescubre la existencia de proposiciones indecidibles en ciertas lógicas.

El conjunto *En-C* de los pares (Ba_m, k) puede considerarse como un conjunto de enunciados, algunos de los cuales son ciertos (los que corresponden a los pares del subconjunto *En-Cv*) y otros falsos (los correspondientes a los pares del subconjunto *En-Cf*). Si En_a es un subconjunto recursivamente enumerable cualquiera de *En-Cf*, existe un par (Ba_i, i) que pertenece a *En-Cf*, pero no a En_a. Así, la reunión de *En-Cv* y En_a no puede agotarse en *En-C*.

Consideremos el conjunto En_r obtenido por la reunión de *En-Cv* (o de un subconjunto recursivamente enumerable En_b de *En-Cv*) y de En_a. Como *En-Cv* y

En_a son ambos recursivamente enumerables, disponemos de un procedimiento efectivo para obtener sucesivamente los diversos elementos de este conjunto En_r. Esto se puede expresar diciendo que este conjunto es *recursivamente engendrado*. A En_r corresponde un conjunto de enunciados formados por enunciados asociados a los pares que componen En_r. A tal conjunto de enunciados se le puede denominar *lógica recursivamente engendrada* (correspondiente al conjunto *En-Cv*).

Si un par (Ba_m, k) está comprendido en *En-Cv* (o en En_b), el enunciado correspondiente es cierto; si está comprendido en En_a, el enunciado correspondiente es falso.

No es posible determinar si el enunciado que corresponde al par (Ba_i, i) es cierto o falso en esta lógica, puesto que (Ba_i, i) no está incluido ni en *En-Cv* ni en En_a.

Por consiguiente, este enunciado es indecidible en esta lógica.

Por otra parte, es posible construir una extensión de esta lógica en la que este enunciado se haría decidible. Dado En_a disponemos de un procedimiento efectivo para encontrar el entero i tal que (Ba_i, i) esté en *En-Cf* pero no en En_a. El conjunto En_a es recursivamente enumerable, y, por tanto, existe una base Ba_a que permite engendrar los números correspondientes a los pares de En_a. Utilizando esta base se pueden hallar los pares de la forma (Ba_n, n) y de esta forma engendrar el conjunto En_i. La base Ba_a juega, por tanto, el papel de Ba_i. Basta entonces con examinar la serie de bases para descubrir el menor índice j para el cual $Ba_j = Ba_a$. Este índice j es el entero i buscado.

Si añadimos este par (Ba_i, i) al conjunto En_a, se obtiene un conjunto En_d que es también recursivamente enumerable y que constituye siempre un subconjunto de *En-Cf*. El conjunto reunión de *En-Cv* (o de un subconjunto En_b recursivamente enumerable de *En-Cv*) y de En_d constituye, pues, una lógica recursivamente engendrada (respecto a *En-Cv*) y el enunciado correspondiente a (Ba_i, i) es decidible en ella. Así, pues:

(LVIII) *Toda lógica recursivamente engendrada respecto a En-Cv contiene proposiciones indecidibles, pero puede ser extendida a una lógica recursivamente engendrada donde estas proposiciones se hagan decidibles* [69].

POST estima que la generalidad de los conceptos utilizados justifica probablemente la generalización siguiente, que amplía no sólo su propio resultado, sino también el Teorema de GÖDEL.

(LIX) *Toda lógica simbólica es incompleta y extensible respecto a la clase de los enunciados de este tipo*: el entero n pertenece al conjunto recursivamente enumerable *En*.

(Se trata, pues, de enunciados donde interviene una propiedad recursiva. Las proposiciones indecidibles de las que se ocupa el Teorema de GÖDEL son igualmente proposiciones que contienen un predicado de tipo recursivo) [70].

[69] POST 4, § 2.

[70] Más exactamente, una expresión predicativa que corresponda a una propiedad recursivamente representable.

SECCIÓN 5.—PROBLEMAS INSOLUBLES.

165. PROBLEMAS DE DECISIÓN INSOLUBLES.

El estudio de los problemas de decisión no queda agotado por estos resultados de alcance general. En la práctica existe la tendencia de plantearse el problema de la decisión por ramas particulares de las matemáticas o a considerar problemas particulares de decisión, y en ambas direcciones se ha centrado el esfuerzo de la investigación.

Por una parte, en lugar de estudiar el problema de la decisión para formalismos muy generales, se puede estudiar para formalismos reducidos, correspondientes a un cierto problema matemático: teoría de enteros, teoría de cuerpos algebraicos, etc.

Por otra parte, los teoremas de tipo general que se han ido obteniendo enseñan que deben existir problemas insolubles. Efectivamente, ciertos problemas matemáticos se presentan en forma de problemas de decisión, como los problemas del tipo siguiente: encontrar una función efectivamente calculable F de n argumentos, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tal que la igualdad $(F\ X_1, X_2, \ldots, X_n = 0)$ sea condición necesaria y suficiente para que se cumpla una determinada propiedad de la teoría de números (o expresable en términos de esta teoría por medio de una correspondencia apropiada) compuesta de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$. El problema de FERMAT es de este tipo [71].

Ciertos problemas metateóricos (y en particular el problema de la decisión para un formalismo dado) se reducen a problemas de este tipo mediante la aritmetización del formalismo considerado. Se trata, por tanto, de problemas de la misma naturaleza y los mismos métodos expuestos anteriormente, que deben llevar a resultados negativos en lo que concierne a algunos de ellos.

Los métodos de POST son a este respecto extraordinariamente interesantes; los problemas de decisión que tales métodos consideran son de forma muy sencilla y pueden utilizarse para obtener resultados análogos en dominios restringidos o en casos particulares.

166. TEORÍAS NO-RESOLUBLES Y TEORÍAS ESENCIALMENTE NO-RESOLUBLES.

En la primera dirección de investigación se debe señalar particularmente los trabajos de TARSKI, MOSTOWSKI y JULIA ROBINSON.

---

[71] El *problema* de FERMAT puede formularse así:

Encontrar un procedimiento efectivo que permita determinar para qué enteros n existen números enteros a, b y c tales que:

$a^n + b^n = c^n$.

O también: Encontrar una función efectivamente calculable F de un argumento tal que $(En = 0)$ sea una condición necesaria y suficiente para que existan enteros a, b y c tales que: $a^n + b^n = c^n$.

TARSKI ha introducido una noción muy interesante: la de *teoría esencialmente no-resoluble* [72].

Una teoría Th_2 constituye una extensión de la teoría Th_1 si toda proposición derivable en Th_1 es también derivable en Th_2.

Una teoría Th se dice que es *esencialmente no-resoluble* si es coherente y ninguna extensión coherente de Th es resoluble.

Por otra parte, TARSKI ha introducido en el estudio del problema de la decisión el método de las interpretaciones.

Interpretar una teoría Th_1 en otra teoría Th_2 consiste en establecer entre las proposiciones de Th_1 y Th_2 una correspondencia tal que a toda proposición derivable de Th_1 corresponda una proposición derivable de Th_2 [73]. En ciertas condiciones es posible interpretar una teoría Th_1 en otra teoría Th_2 de tal manera que si Th_1 es esencialmente no-resoluble, Th_2 también lo es.

Con este método, MOSTOWSKI y TARSKI demuestran que toda teoría que contenga como únicas constantes funcionales las funciones de *suma y multiplicación* y como únicas constantes predicativas los predicados *menor que* y *ser un número entero,* y cuyos axiomas no-lógicos [74] correspondan a enunciados ciertos de la aritmética de los enteros, es no-resoluble [75].

El resultado se extiende a la teoría de anillos [76] y a la de anillos conmutativos. Sin embargo, estas teorías no son esencialmente no-resolubles, pues la teoría del anillo de los números reales, por ejemplo, es resoluble [77].

También ha demostrado TARSKI que la teoría de grupos es no-resoluble, pero no esencialmente no-resoluble (pues la teoría de grupos abelianos, por ejemplo, es resoluble) [77].

Igualmente ha demostrado que la teoría de mallas modulares, la de mallas arbitrarias, la de mallas modulares de complemento y la de geometrías proyectivas abstractas son no-resolubles [78]. Pero no son esencialmente no-resolubles, pues la teoría de las álgebras de BOOLE y la de la geometría proyectiva real son resolubles.

J. ROBINSON demuestra que toda teoría que contiene como únicas constantes funcionales las funciones de *suma* y *multiplicación* y como única constante predicativa el predicado *ser un número racional,* y cuyos axiomas no-lógicos corresponden a enunciados ciertos de la aritmética de números racionales, es no-resoluble [79].

---

[72] TARSKI 12.

[73] En esta definición, Th_1 y Th_2 se supone que están formalizadas. También se las puede considerar no formalizadas, y nuestra noción, en tal caso, se convierte en la siguiente: interpretar una teoría Th_1 en otra Th_2, es establecer entre los enunciados de Th_1 y de Th_2 una correspondencia tal que a todo enunciado cierto de Th_1 corresponda un enunciado cierto de Th_2.

[74] O sea, los axiomas que no pertenecen a un sistema lógico puro (Véase § 47).

[75] MOSTOWSKI y TARSKI 1.

[76] Considerado como sistema formal.

[77] TARSKI 13.

[78] TARSKI 14.

[79] ROBINSON (JULIA) 1.

En particular, la teoría de los cuerpos es no-resoluble, pero no es esencialmente no-resoluble, pues, como ha demostrado TARSKI, la teoría de los cuerpos algebraicos cerrados y la de cuerpos reales cerrados son resolubles [79 bis].

167. EL PROBLEMA INSOLUBLE DE SKOLEM.

En la segunda dirección de las investigaciones se han estudiado problemas particulares. Merecen especial mención los trabajos de SKOLEM y POST.

SKOLEM considera una determinada clase de enunciados aritméticos y propone, en relación a esta clase, un problema de decisión que es insoluble [80].

Denominemos, utilizando la terminología de SKOLEM, *relación aritmética* a un enunciado aritmético formado por constantes y variables individuales, funciones de *suma* y *multiplicación*, predicado de *igualdad* y operadores *lógicos* [81].

Consideremos las relaciones aritméticas (en el sentido de SKOLEM) en las que solamente figura una variable libre. (También pueden llevar un cierto número de variables ligadas. Así, un enunciado del tipo $(X)\,(E\,Y)\,PXYZ$ pertenece a la clase de la que nos estamos ocupando). Podemos considerar estas relaciones aritméticas como enunciados que aplican un cierto predicado a una cierta variable. (Así, en nuestro ejemplo, se trata del predicado $\hat{Z}\,[(X)\,(E\,Y)\,PXYZ]$: ser tal que, para toda X y al menos para una cierta Y, $PXYZ$ se cumple). Los predicados de este tipo pueden clasificarse en una serie ordenada [82]. Designemos por P_n el n-ésimo predicado de esta serie.

El problema de decisión planteado por SKOLEM es el siguiente: determinar de manera efectiva para qué valores (enteros) de n y de X el enunciado $P_n\,X$ es cierto. Esto se reduce a preguntarse: encontrar una función recursiva F de dos argumentos tal que $F_n\,X$ adopte el valor 0 ó 1 según que $P_n\,X$ sea cierto o falso.

Supongamos que tal función existe. Entonces tenemos: $F_n\,X = 0$ si la relación aritmética $P_n\,X$ es cierta, y sólo en tal caso.

SKOLEM ha demostrado que toda ecuación en la que figuren funciones recursivas puede ponerse bajo la forma de una relación aritmética que dependa de las mismas variables libres. Si consideramos la ecuación $FXX = 1$, que depende de una sola variable libre, podremos afirmar que existe un entero k tal que la ecuación $FXX = 1$

[79 bis] TARSKI 17 contiene una exposición completa y sistemática de cuanto se refiere a la no-resolubilidad.

[80] SKOLEM 9.

[81] Por tanto, una *relación aritmética* en el sentido de SKOLEM puede considerarse como un enunciado relativo a identidades entre polinomios.

[82] Por ejemplo, sirviéndose del procedimiento de la aritmetización y clasificando las expresiones consideradas en el orden creciente de sus números-G.

puede ponerse en la forma de la relación aritmética $P_k\ X$. Las expresiones $FXX = 1$ y $P_k\ X$ son ciertas o falsas al mismo tiempo.

Hagamos $X = k$.

Entonces tenemos: las expresiones $Fkk = 1$ y $P_k\ k$ son ciertas o falsas al mismo tiempo.

Así, si la ecuación $Fkk = 1$ es cierta, la relación aritmética $P_k\ k$ es igualmente cierta. Pero, por otra parte, en virtud de la definición de F, si la ecuación $Fkk = 1$ es cierta, la relación aritmética $P_k\ k$ es falsa.

Terminamos, por tanto, en una contradicción. La función F no existe, pues, y nuestro problema es insoluble.

168. El problema de Thue y el problema de las palabras para los semigrupos.

Post ha estudiado un problema de decisión de naturaleza combinatoria referente a series finitas de símbolos.

Designemos por Sy_{ij} una serie finita (no vacía) constituida por símbolos $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$.

Consideremos dos conjuntos finitos de n series de este género:

Sy_{11}, Sy_{12}, ..., Sy_{1n} y Sy_{21}, Sy_{22}, ..., Sy_{2n}.

Representemos por la yuxtaposición de dos símbolos Sy_{ij} la concatenación de las series que designan.

Se trata ahora de hallar un método efectivo que permita determinar si se da o no se da la identidad:

$$Sy_{1j_1}, Sy_{1j_2}, \ldots, Sy_{1j_n} = Sy_{2j_1}, Sy_{2j_2}, \ldots, Sy_{2j_n}$$

para cualquier serie de índices $j_1, j_2, \ldots, j_n$ (y por tanto para toda combinación de una permutación cualquiera de los Sy_{1j} con una permutación cualquiera de los Sy_{2j}) [83].

Post ha demostrado con su teoría de los sistemas normales que este problema es insoluble [84].

Valiéndose de este resultado, Post establece igualmente el carácter insoluble de otro problema de decisión [85]. Se trata del problema de Thue, o *problema de las palabras para los semigrupos.*

Se considera un conjunto *En* de símbolos: $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$.

Una sucesión de símbolos tomados en este conjunto forma una *serie* (o *palabra*).

Un *sistema* de Thue es un conjunto de series de este género.

Es posible definir operaciones que permitan transformar las series de un sistema dado.

Se define un cierto número (finito) de pares de series (Sy_{1i}, Sy_{2i}) $(i = 1, 2, \ldots m)$.

---

[83] La serie $j_1, j_2, \ldots, j_n$, designa una permutación cualquiera de la serie 1, 2, ..., n.

[84] Post 6.

[85] Post 5.

Las operaciones de transformación son las siguientes:

$\Sigma_1\ Sy_{1i}\ \Sigma_2$ se transforma en $\Sigma_1\ Sy_{2i}\ \Sigma_2$ (para $i = 1, 2, \ldots, m$),

y $\Sigma_1\ Sy_{2i}\ \Sigma_2$ se transforma en $\Sigma_1\ Sy_{1i}\ \Sigma_2$ (para $i = 1, 2, \ldots, m$).

Σ_1 y Σ_2 designan series cualesquiera del sistema, y la yuxtaposición de dos series designa la concatenación de los signos que las expresan.

Dos series Sy_1 y Sy_2 se dice que son *equivalentes* si se puede transformar Sy_1 en Sy_2 por medio de operaciones de transformación.

El problema de THUE es el siguiente:

Hallar un método general que permita determinar, para un sistema cualquiera de THUE, si dos series dadas Sy_1 y Sy_2 son equivalentes o no.

Este problema es el mismo que el de las *palabras para los semigrupos.*

Un *semigrupo* es un conjunto *En* de elementos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., provisto de una operación de composición denominada *producto* [86] que satisfaga los dos axiomas siguientes:

a) Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son elementos de *En*, el producto $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ es un elemento $\mathfrak{c}$ de *En* y sólo uno.

b) $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ [87].

Un semigrupo puede quedar definido por medio de un conjunto finito $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ de sus elementos (denominados *generadores*) y de un conjunto de relaciones Sy_{1i}, Sy_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, m$) [88], de tal manera que todo elemento de *En* pueda ser considerado como un producto de generadores.

El *problema de las palabras para los semigrupos* es el siguiente: dos productos arbitrarios Sy_1 y Sy_2 de generadores, ¿dan el mismo producto de *En* o no?

Este problema corresponde exactamente al de THUE.

POST ha demostrado que el *problema de* THUE para un *sistema de* THUE cualquiera, puede reducirse al mismo problema para un sistema de THUE basado en símbolos solamente. Este último problema es exactamente el mismo que el de las plazas para semigrupos con dos generadores.

Este problema es insoluble, como ha demostrado POST [89].

De ello se sigue que el *problema de las palabras para los semigrupos* con un número cualquiera de generadores —y, por consiguiente, el problema de THUE en su forma general— son insolubles [90].

---

[86] Se representa el producto de dos elementos mediante la yuxtaposición de éstos.

[87] Es decir: si se efectúa primero el producto $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ y a continuación el producto del resultado y de $\mathfrak{c}$, se obtiene el mismo elemento que si se efectúa el producto de $\mathfrak{a}$ y del producto $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

[88] Los símbolos Sy_{ij} designan aquí productos determinados de elementos de *En*. (Estos productos pueden eventualmente reducirse a un solo elemento).

Así, se podrá dar la relación $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{a}$.

[89] POST 8.

[90] NOVIKOV ha extendido este resultado demostrando que el *problema de las palabras para los grupos* es igualmente insoluble (Véase NOVIKOV 1).

El *problema de las palabras para los grupos* se formula de la misma manera que el *problema de las palabras para los semigrupos,* pero el conjunto *En* considerado debe satisfacer los axiomas de los grupos (véase § 6, esquemas de axiomas 1 a 4).

SECCIÓN 6.—RESULTADOS POSITIVOS - GRADOS DE INSOLUBILIDAD.

169. RESULTADOS POSITIVOS A PROPÓSITO DEL PROBLEMA DE LA DECISIÓN PARA LOS SISTEMAS FORMALES [91].

Todos los resultados precedentes son resultados negativos, únicos que nos interesan desde el punto de vista de las limitaciones. Pero conviene indicar que también podía haberse llegado a resultados positivos en lo que concierne a problemas de decisión. En efecto, es posible demostrar que, para ciertos formalismos, el problema de la decisión es efectivamente resoluble, e incluso, para determinadas categorías de problemas o de expresiones, es posible dar un procedimiento efectivo de decisión.

Ante todo debemos preguntarnos cuáles son las condiciones que deben quedar satisfechas para que un formalismo sea resoluble. Se trata, en suma, de determinar el umbral a partir del cual un formalismo deja de ser resoluble.

Para responder a esta pregunta, JANICZAK ha demostrado la teoría siguiente (apoyándose en la teoría de conjuntos recursivos y recursivamente enumerables) [92].

Sea un formalismo *LF* que cumple las siguientes condiciones.

1. *LF* es coherente.
2. *LF* es saturado sintácticamente en sentido fuerte.
3. *LF* puede ser aritmetizado por medio de una *correspondencia de* GÖDEL y, sobre la base de tal correspondencia, tenemos:

a) La clase de las proposiciones de *LF* es recursiva (general).

b) La clase de los axiomas de *LF* es recursivamente enumerable.

c) Las reglas de derivación de *LF* pueden ordenarse según una serie Re_1, Re_2, ..., tal que existe una función recursiva general triargumental *Sim* dotada de la propiedad siguiente:

Si *a, b* y *c* son los números asociados respectivamente a las proposiciones A, B y Γ, la condición necesaria y suficiente para que se cumpla (*Sim n a b* = *c*) es que Γ sea la proposición que se obtiene a partir de las proposiciones A y B haciendo uso de la regla Re_n (dicho de otra forma, la propiedad, para una proposición, de ser consecuencia inmediata de las otras dos es representable recursivamente).

d) Existe una función recursiva general de un argumento, *Neg*, tal que, si *a* es el número asociado a una proposición A, *Neg a* es el número asociado a la negación

---

[91] Esta Sección no tiene relación directa con los hechos de limitación, y debe ser considerada como simple nota complementaria de los problemas de decisión.

[92] JANICZAK 1.

de esta proposición (dicho de otra forma, la negación es una operación recursivamente representable).

(LX) *Por consiguiente, la clase de las proposiciones derivables de LF es recursiva (general) y el formalismo LF es, por tanto, resoluble.*

Por otra parte, el problema de la decisión ha podido ser resuelto para algunas categorías de proposiciones de la Lógica de Predicados de primer orden.

En relación con este punto hay que señalar los trabajos de ACKERMANN [93], BEHMANN [94], BERNAYS [95] y SCHÖNFINKEL, CHURCH [96], GÉGALKINE [97], GÖDEL [98], HERBRAND [99], KALMÁR [100], KALMÁR y SURÁNYI [101], LÖWENHEIM [102], QUINE [103], SCHÜTTE [104] y SKOLEM [105].

Toda proposición de la Lógica de Predicados de primer orden puede transformarse en una proposición equivalente dentro de la cual todos los cuantificadores figuran a la cabeza de la serie de símbolos que constituyen esta proposición. A esta serie de cuantificadores se les denomina *prefijo*.

Los resultados positivos conseguidos sobre las clases de proposiciones que llevan prefijos de una forma particular (por ejemplo, un prefijo constituido por dos series de cuantificadores de universalización separados por una serie de cuantificadores de particularización). Algunos de estos resultados suponen, por otra parte, restricciones en lo que concierne a la parte de la proposición que sigue al prefijo.

Por otra parte, TARSKI ha facilitado métodos de decisión para la Geometría y el Algebra elemental [106].

170. GRADO DE INSOLUBILIDAD DE UN PROBLEMA INSOLUBLE. TEOREMAS DE TURING Y TARSKI.

POST se ha basado en su teoría de los conjuntos recursivamente enumerables para abordar el problema de la decisión desde otro punto de vista: en lugar de considerarle en su forma absoluta, ha introducido la idea de *grado de insolubilidad.*

Un problema Pb_1 se dice que es *reducible* a un problema Pb_2 si toda solución de Pb_2 es una solución de Pb_1, y si, cuando Pb_1 es insoluble, Pb_2 es igualmente insoluble.

[93] ACKERMANN 3, 4 y 11.
[94] BEHMANN 1.
[95] BERNAYS y SCHÖNFINKEL 1.
[96] CHURCH 16 y 17.
[97] GÉGALKINE 1.
[98] GÖDEL 6 y 13.
[99] HERBRAND 3.
[100] KALMÁR 1, 2, 3, 4, 9, 12 y 13.
[101] KALMÁR y SURÁNYI 1 y 2.
[102] LÖWENHEIM 1.
[103] QUINE 4.
[104] SCHÜTTE 1 y 2.
[105] SKOLEM 1 y 4.
[106] TARSKI 10 y 16.

Dos problemas insolubles son del *mismo grado de insolubilidad* si son reducibles el uno al otro. Un problema insoluble Pb_1 es de un grado de insolubilidad *inferior* al de un problema insoluble Pb_2 si Pb_1 es reducible a Pb_2, sin que Pb_2 sea reducible a Pb_1. Uno de los problemas fundamentales que se presentan en el estudio de los problemas insolubles es determinar el grado de insolubilidad de un problema insoluble. En particular, es lícito preguntarse si existe un grado máximo y otro mínimo de insolubilidad.

TURING ha construido lógicas no-constructivas utilizando la representación de los ordinales transfinitos que pueden obtenerse a través del *cálculo de la conversión-λ* de CHURCH. A estas lógicas se las denomina *lógicas ordinales.*

En su teoría de *lógicas ordinales* [107], TURING ha obtenido a propósito del problema de los grados de insolubilidad, un resultado que POST ha generalizado en la forma siguiente:

(LXI) *Para todo problema insoluble de tipo recursivo* [108], *existe otro problema de un grado más elevado de insolubilidad* [109].

Existe, por otra parte, un teorema debido a TARSKI que establece una propiedad análoga a ésta; según POST [110], es posible que este teorema pueda transformarse en un teorema absoluto del mismo género que el de TURING. Este teorema de TARSKI pertenece a la teoría de tipos.

A cada símbolo de esta teoría se puede atribuir un *nivel*: el entero que caracteriza el tipo al que pertenece est símbolo. Se denomina *nivel de una proposición* al nivel del signo de nivel más elevado que figure en esta proposición.

El Teorema de TARSKI afirma:

(LXII) *Si la clase de las proposiciones de nivel n no es vacía, existe una proposición de nivel n que no es equivalente a ninguna proposición de nivel inferior* [111].

Este teorema puede ser extendido a sistemas en los que intervienen tipos transfinitos (entonces se asocia a cada nivel un ordinal finito o transfinito) y a sistemas que no están basados en la teoría de tipos. (La demostración se funda en la existencia de proposiciones indecidibles en ciertas clases de proposiciones).

171. GRADOS DE INSOLUBILIDAD DE LOS PROBLEMAS DE DECISIÓN INSOLUBLES RELATIVOS A CONJUNTOS RECURSIVAMENTE ENUMERABLES.

POST ha demostrado que hay un grado máximo de insolubilidad para los problemas de decisión insolubles relativos a conjuntos recursivamente enumerables de enteros [112].

---

[107] TURING 4. Para la noción de *lógica ordinal,* véase § 123 y § 182.
[108] Es decir: que puede ser formulada por medio de funciones y predicados recursivos.
[109] POST 4. Introducción.
[110] POST 4. Introducción.
[111] TARSKI 6. Teorema 9.1.
[112] Véase § 162.

Para ello considera el conjunto *En-K* de los enteros que van asociados a los pares (Ba_m, k) del conjunto *En-Cv* anteriormente considerado [113] y denomina a este conjunto *En-K conjunto completo.* Como el conjunto *En-Cv* no es recursivo [114], el conjunto *En-K* tampoco lo es y el problema de la decisión para *En-K* es, pues, insoluble.

Por otra parte, define lo que llama *conjunto hiper-simple*: conjunto recursivamente enumerable de enteros *En-H* cuyo complemento es infinito y tal que no existe conjunto infinito recursivamente enumerable de series finitas separadas por enteros de tal manera que cada serie posea al menos un elemento que pertenezca a este complemento de *En-H.*

Para comparar los grados de insolubilidad de los problemas de decisión de conjuntos de enteros hay que dar un sentido preciso a la noción de reductibilidad para problemas de este género.

Sean En_1 y En_2 dos conjuntos de enteros.

El problema de decisión de En_1 se dice que es *reducible* al de En_2 *en sentido elemental* si existe un método efectivo que permita hacer corresponder a todo entero n otro entero m tal que n pertenece o no al En_1 según que m pertenezca o no a En_2. O también, más exactamente: si existe una función recursiva F tal que si $F\,n = m$, n pertenece o no a En_1 según que m pertenezca o no a En_2.

Es posible aplicar a esta idea dos generalizaciones sucesivas. Se puede hacer depender la presencia o la ausencia de n en En_1 de la presencia o la ausencia en En_2 no sólo del entero m, sino de k enteros diferentes $m_1, m_2, \ldots, m_k$. La sucesión $m_1, m_2, \ldots, m_k$ puede ser infinita. Cada m_i puede pertenecer bien a En_2 bien al complemento de En_2 (en relación al conjunto de enteros).

Denominemos *distribución* de los m_i a una regla de reparto que fije cuáles son los m_i que pertenecen a En_2 y cuáles pertenecen al complemento de En_2. Hay 2^k distribuciones posibles de m_i.

Para cada una de estas distribuciones de los m_i, n puede pertenecer a En_1 o al complemento de En_1.

Esta correspondencia puede ser fijada por medio de un cuadro de 2^k líneas, cada una de las cuales es del tipo:

$$+ - \ldots\ldots\ldots - / +$$ [115].

Denominemos a este cuadro: *tabla de distribuciones.*

El problema de decisión de En_1 se dice que es *reducible* al de En_2 *por tablas de distribuciones* si existe un método efectivo que permita hacer corresponder a todo entero n una serie $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k$ de enteros, y asociar a esta serie una tabla de distribuciones que indique, para cada distribución de los m_i, si n se encuentra o no en el En_1.

---

[113] Véase § 163.

[114] Véase § 163.

[115] El signo + corresponde a la presencia; el signo — a la ausencia. Esta línea debe leerse: si m_1 pertenece a En_2, m_2 al complemento de En_2, etc., y m_k al complemento de En_2, entonces n pertenece a En_1. (El signo / significa *entonces*).

Finalmente, se puede dar de la reductibilidad una definición completamente general en términos de máquinas de TURING.

El problema de decisión de En_1 se dice reducible al de En_2 *en sentido general* si existe una máquina de TURING dotada de la propiedad siguiente: para todo entero n, la máquina determina un entero m, examina si este entero pertenece o no a En_2 y si puede darse una respuesta correcta a este problema, determina si n pertenece o no a En_1.

POST ha demostrado que el problema de la decisión para todo conjunto recursivamente enumerable de enteros es reducible en sentido elemental al de *En-K* [116]. De aquí se sigue que el grado de insolubilidad del problema de la decisión para *En-K* es el grado máximo de insolubilidad —en el sentido de la reductibilidad elemental— para los problemas de decisión referentes a conjuntos recursivamente enumerables de enteros. Este resultado se extiende al caso de la reductibilidad general. Como la definición de la reductibilidad en sentido general constituye la definición más general que conserva en la noción de reductibilidad un sentido efectivo, se puede decir que el problema de la decisión para *En-K* posee el grado máximo de insolubilidad *en sentido absoluto* para los problemas de decisión relativos a conjuntos recursivamente enumerables de enteros.

La cuestión se plantea entonces de la siguiente forma: todos los problemas de decisión insolubles relativos a tales conjuntos, ¿son del mismo grado de insolubilidad que el de *En-K* o existe (al menos) un conjunto para el cual el problema de decisión es de un grado de insolubilidad menor que éste?

POST demuestra que el problema de la decisión para *En-H* es insoluble [117] y de un grado de insolubilidad menor —en el sentido de la reductibilidad por tablas de distribuciones— que el de *En-K* [118]. Pero no es cierto que este resultado subsista si se entiende la noción de reductibilidad en el sentido general. Por tanto no es posible decir que el problema de la decisión para *En-H* sea de un grado de insolubilidad menor que el de *En-K* en sentido absoluto.

No se puede dar al problema planteado una respuesta absoluta. Sin embargo, no se excluye que se pueda llegar a conseguirlo reforzando las condiciones impuestas a *En-H*.

Todos estos resultados se extienden inmediatamente a los problemas de decisión relativos a conjuntos recursivamente enumerables cualesquiera.

[116] POST 4, § 4.
[117] POST 4, § 9 y § 5.
[118] POST 4, § 10.

Capítulo VII

La teoría de los predicados de Kleene

Sección 1.—El teorema de estratificacion.

172. Introducción.

Kleene ha llevado a cabo una generalización del Teorema de Gödel partiendo de un teorema general relativo a las formas en que pueden representarse ciertos predicados.

El interés de esta generalización está en el vínculo que establece entre el Teorema de Gödel y el de Church, entre la existencia de proposiciones indecidibles (dentro de ciertos formalismos de naturaleza muy general) y el carácter insoluble del problema de decisión (para formalismos de la misma especie). La teoría de Kleene destaca la raíz común de ambos tipos de limitaciones, unificándolos en ciertas propiedades generales de los formalismos en cuestión.

Kleene procede sintéticamente, estudiando directamente las propiedades metateóricas que suscitan los fenómenos de limitación, dando de estas propiedades una formulación general. En el caso de la limitación del tipo de la de Gödel, la propiedad en cuestión es la *saturación* [1]; en el caso de Church, tal limitación es la *resolubilidad*. Kleene construye predicados que expresan estas propiedades y, aplicándolos a su teoría de predicados, obtiene inmediatamente los teoremas de limitación. La forma de obtención es muy general: las demostraciones no se refieren, en efecto, a un sistema particular, sino que establecen directamente la existencia de un predicado que da lugar al tipo de limitación estudiado en cualquier sistema formal que responda a una condición muy general de estructura.

Como los demás problemas de limitación, los resultados de Kleene se basan en la utilización de una determinada paradoja. La paradoja utilizada por Kleene es la de Epiménides.

---

[1] Más exactamente: saturación sintáctica en sentido fuerte. (Véase § 37).

La *Teoría de predicados* de KLEENE se articula en torno a un teorema central, que establece una especie de jerarquía entre los predicados expresables mediante un predicado recursivo; esta jerarquía se basa en la naturaleza de los prefijos [2] de las expresiones que representan estos predicados. Designaremos a este teorema *teorema de estratificación* [3]. Su argumentación descansa sobre un lema que hace intervenir el *predicado de* KLEENE *Pkl* [4], cuya demostración utiliza el operador *Min* [5].

173. LEMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DE PREDICADOS DE KLEENE.

El enunciado del lema es el siguiente [6]:

(LXIII) *Dado un predicado recursivo general P de* $(n + 1)$ *argumentos, existen dos enteros a y b tales, que se dan las siguientes equivalencias*:

(1) $(EY)\, P\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y \leftrightarrow (EY)\quad Pkl^{(n)}\, a\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y$

y (2) $(Y)\, P\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl^{(n)}\, b\, X_1\, X_2 \ldots X_n\, Y.$

La demostración de este lema hace uso de la noción de recursividad parcial, tal como ha sido definido por KLEENE [7].

Como P es un predicado recursivo general, existe una función representativa F tal que $F\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y = 0$

para todo sistema de valores de las variables que verifique

$$P\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y.$$

Entonces, y utilizando el operador *Min*, se puede definir una nueva función G de n variables para la ecuación siguiente:

$$G\, X_1\, X_2 \ldots X_n = Min\, Y\, [F\, X_1\, X_2 \ldots X_n Y = 0].$$

Utilizando la función auxiliar H, podremos definir también esta misma función G, sin recurrir al operador *Min*, por medio de un sistema de ecuaciones:

(3) $H\, o\, X_1\, X_2 \ldots X_n\, \beta = \beta$

(4) $H\, (Scc\, \alpha)\, X_1\, X_2 \ldots X_n\, \beta = H\, [F\, X_1\, X_2 \ldots X_n\, (Scc\, \beta)]\; X_1\, X_2 \ldots X_n\, (Scc\, \beta)$

(5) $G\, X_1\, X_2 \ldots X_n = H\, [F\, X_1\, X_2 \ldots X_n\, 0]\; X_1\, X_2 \ldots X_n\, 0.$

---

[2] El *prefijo* de una expresión es la serie (eventualmente vacía) de los cuantificadores colocados al comienzo de esta expresión. (Véase § 169).

[3] El término *estratificación*, tal como se utiliza aquí, no tiene nada que ver con el término estratificación utilizado por QUINE, en QUINE 7.

[4] Véase § 112.

[5] Véase § 63.

[6] KLEENE 10, pág. 47. Teorema I.

[7] Véase § 64.

Si para un cierto sistema de valores de las variables $X_1\ X_2 \ldots, X_n$ $(EY)\ P\ X_1\ X_2 \ldots X_nY$, y, por tanto, $(EY)\ [F\ X_1\ X_2 \ldots X_nY = 0]$, el cálculo de G se puede realizar como sigue:

Se calcula, en primer lugar, $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0$.

Si se encuentra 0, se utiliza la ecuación 3(173), haciendo en ella $\beta = 0$, y se obtiene: $H\ o\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0 = 0$.

La ecuación 5(173) da entonces: $G\ X_1\ X_2 \ldots X_n = 0$.

Si el valor hallado para $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0$ no es cero, sea m este valor.

La ecuación 4(173) permite calcular $H\ m\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0$.

Pero es preciso calcular previamente $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 1$.

Si $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 1 = 0$, se puede utilizar la ecuación 3(173) para obtener el valor de $H\ o\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 1$.

Se ve que: $H\ o\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 1 = 1$.

De donde, por 4(173): $H\ m\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0 = 1$.

Finalmente, en virtud de la 5(173): $G\ X_1\ X_2 \ldots X_n = 1$.

Si el valor de $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 1$ no es cero, será preciso calcular $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 2$ y utilizar nuevamente la ecuación 4(173). Y así sucesivamente.

Sea p el primer entero tal que $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ p = 0$.

La ecuación 3(173) da: $H\ o\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ p = p$.

Mediante p aplicaciones sucesivas de la ecuación 4(173) se obtiene:

$$H\ m\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0 = H\ o\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ p = p.$$

Finalmente, por la ecuación 5(173):

$$G\ X_1\ X_2 \ldots X_n = H\ m\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ 0 = p.$$

El cálculo termina, pues, y da para $G\ X_1\ X_2 \ldots X_n$, el menor valor de Y para el cual $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ Y = 0$.

Y el cálculo sólo puede terminar cuando se encuentra en un momento dado un valor de Y para el cual $F\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ Y = 0$, es decir, si existe un Y tal que $P\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ Y$.

El sistema de ecuaciones que define la función G responde a las condiciones de la definición dada por KLEENE de las funciones recursivas generales. Y el cálculo de los valores sucesivos de G puede realizarse, a partir de estas ecuaciones, por medio de las operaciones On_1 y On_2 [8].

Por otra parte, la función G está definida para todos los sistemas de valores de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, para los cuales $(EY)\ P\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ Y$.

Esta función G responde, por tanto, a la definición de las funciones parcialmente recursivas. Así, cada vez que se cumple la condición prevista para P, se puede definir a través de P una función parcialmente recursiva G.

Aplicando a las ecuaciones que definen G el procedimiento de aritmetización [9], se obtiene el resultado siguiente:

[8] Véase § 59.

[9] Véase § 112.

Si hay un Y tal que $P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y$, existe un sistema de ecuaciones cuyo número-G es a y del que se puede derivar —por medio de las operaciones On_1 y On_2— una ecuación de la forma $G\,X_1\,X_2 \ldots X_n = \gamma$ cuyo número-G es e, y recíprocamente esto sólo es posible si existe un Y tal como el expresado.

Por otra parte, si no hay ningún Y tal que $P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y$, tampoco existe ningún Y para el cual $F\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y = 0$, y el cálculo de G no puede realizarse. En otros términos: en este caso, no hay sistema de ecuaciones del que se pueda derivar una ecuación de la forma $G\,X_1\,X_2 \ldots X_n = \gamma$.

Estos resultados pueden expresarse como sigue:

Si $(EY)\,P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y$, existe un Y que es el número-G de una ecuación que se puede derivar mediante las operaciones On_1 y On_2 del sistema de ecuaciones cuyo número-G es a, y si, cualquiera que sea Y, no se verifica $P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y$, entonces cualquiera que sea la ecuación considerada (del tipo $G\,X_1\,X_2 \ldots X_n = \gamma$), no es posible derivarla de un sistema de este tipo.

Utilizando el *predicado de* KLEENE $Pkl^{(n)}$, podemos escribir:

(1) $(EY) \quad P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y \leftrightarrow (EY) \quad Pkl^{(n)}\,a\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y$

y $\quad (Y) \sim P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl^{(n)}\,a\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y.$

Reemplazando el predicado $\sim P$ por otro predicado recursivo general, al que podemos designar igualmente con el símbolo P (puesto que se trata de un símbolo sintáctico, y sólo nos interesa la forma general de la equivalencia), y utilizando entonces otro sistema de ecuaciones apropiado (puesto que la función G no será ya la misma que anteriormente) cuyo número-G es b, podremos escribir la segunda equivalencia:

(2) $(Y)\,P\,X_1\,X_2 \ldots X_n \leftrightarrow (Y) \sim Pkl^{(n)}\,b\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y,$

y el lema queda completamente establecido.

174. ENUNCIADO DEL TEOREMA DE ESTRATIFICACIÓN.

El lema que acabamos de demostrar proporciona la base de enumeración de los predicados expresables a través de un predicado recursivo. Esta enumeración va a permitir una utilización del procedimiento de la diagonal.

$Pkl^{(n)}$ es un predicado recursivo primitivo y, por tanto, recursivo general. Así, $\hat{Z}\,\hat{X}_1\,\hat{X}_2 \ldots \hat{X}_n\,[(EY)\,Pkl^{(n)}\,Z\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$ es un predicado particular de la forma $\hat{Z}\,\hat{X}_1\,\hat{X}_2 \ldots \hat{X}_n\,[(EY)\,Q\,Z\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$, donde Q es recursivo general. Si se hace sucesivamente $Z = 0, 1, 2, \ldots$, se obtiene una enumeración (con posibilidad de repeticiones) de todos los predicados da la forma $\hat{X}_1\,\hat{X}_2 \ldots \hat{X}_n\,[(EY)\,P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$, donde P es recursivo general.

Igualmente $\hat{Z}\,\hat{X}_1\,\hat{X}_2 \ldots \hat{X}_n\,[(Y) \sim Pkl^{(n)}\,Q\,Z\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$ es un predicado particular de la forma $\hat{Z}\,\hat{X}_1\,\hat{X}_2 \ldots \hat{X}_n\,[(Y)\,Q\,Z\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$, donde Q es recursivo general. Y si hacemos sucesivamente $Z = 0, 1, 2, \ldots$, se obtiene una enumeración (con posibilidad de repeticiones) de todos los predicados de la forma $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n\,[(Y)\,P\,X_1\,X_2 \ldots X_n\,Y]$, donde P es recursivo general.

Esta particularidad es básica para el teorema de estratificación, cuyo enunciado exponemos [10]:

(LXIV) *Para cada forma predicativa* [11] *de la lista siguiente*:

$\hat{X}\ [P\,X]$ [12]

$\hat{X}\ [(EY)\,P\,X\,Y]$ $\qquad$ $\hat{X}\ [(Y)\,P\,X\,Y]$

$\hat{X}\ [(Y_1)\,(Y_2)\,P\,X\,Y_1\,Y_2]$ $\qquad$ $\hat{X}\ [(EY_1)\,(Y_2)\,P\,X\,Y_1\,Y_2]$

$\hat{X}\ [(EY_1)\,(Y_2)\,(EY_3)\,P\,X\,Y_1\,Y_2\,Y_3]$ $\qquad$ $\hat{X}\ [(Y_1)\,(EY_2)\,(Y_3)\,P\,X\,Y_1\,Y_2\,Y_3]$

etcétera...,

donde P es un predicado recursivo general, existe un predicado que es expresable en esta forma, pero no lo es bajo cualquier otra de la misma fila (con el mismo número de cuantificadores) *ni bajo ninguna de las formas de las filas precedentes* (con un número menos de cuantificadores).

Esta primera parte del teorema es válida bajo el punto de vista de la lógica clásica. Desde el punto de vista intuicionista, sólo es válida para las formas con un solo cuantificador.

Y, por otra parte, para cada forma existe un predicado expresable en la forma negativa correspondiente (obtenida colocando un operador de negación ante la expresión entre paréntesis), *pero que no es expresable en esta misma forma ni en otras de las filas precedentes.*

Esta segunda parte del teorema es válida, tanto desde el punto de vista intuicionista como desde el punto de vista clásico.

(Nada impide considerar, en el enunciado del teorema, *n* variables no cuantificadas en lugar de una sola: sólo por razones de simplificación nos hemos limitado al caso de una sola variable libre.)

175. Demostración del Teorema de estratificación.

Ocupémonos en primer término de la expresión $\hat{X}\ [(Y)\,P\,X\,Y]$.

Se trata de un predicado uniargumental.

El predicado $\hat{X}\ [(Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ es de esta forma, pero este predicado no es expresable en la forma $\hat{X}\ [(EY)\,P\,X\,Y]$ ni en la forma $\hat{X}\ [P\,X]$ (y no es, por consiguiente, recursivo general).

En efecto, supongamos que se haya elegido un cierto predicado recursivo general *P*, y que *a* sea el número-G del sistema de ecuaciones que define la función *G* asociada a *P* (según el procedimiento indicado en el § 173).

---

[10] Kleene 10, pág. 49. Teorema II.

[11] Formas en las cuales pueden expresarse los predicados. Se trata de formas predicativas y no de predicados; el símbolo *P* es una variable sintáctica.

[12] O más simplemente, *P*. Se ha utilizado la forma $\hat{X}\ [PX]$ para tener una notación homogénea en el enunciado del teorema.

Entonces se tiene, en virtud de la equivalencia 1(173) del lema:

$$(EY)\,P\,X\,Y \leftrightarrow (EY)\,Pkl\,a\,X\,Y.$$

Y, reemplazando X por a:

(1) $\quad (EY)\,P\,a\,Y \leftrightarrow (EY)\,Pkl\,a\,a\,Y$ [13].

En lógica clásica como en lógica intuicionista, la negación de la expresión $(EY)\,R\,Y$, donde R es un predicado cualquiera, es equivalente a la expresión $(Y) \sim R\,Y$. Ambas expresiones no son, por tanto, equivalentes entre sí.

$$\sim [(EY)\,R\,Y \leftrightarrow (Y) \sim R\,Y].$$

Por consiguiente, tenemos:

(2) $\quad \sim [(EY)\,Pkl\,a\,a\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl\,a\,a\,Y].$

En virtud de 1(175) y 2(175):

(3) $\quad \sim [(EY)\,P\,a\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl\,a\,a\,Y].$

Así, cuando se aplica el predicado $\hat{X}\,[(Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ al entero a, se obtiene un enunciado que no es equivalente al enunciado obtenido aplicando al mismo entero a el predicado $\hat{X}\,[(EY)\,P\,X\,Y]$.

Diremos que dos predicados de enteros P y Q de n argumentos son *equivalentes* cuando, cualquiera que sea el sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de los valores que adoptan como argumentos, o bien se verifican ambos valores para este sistema de valores, o bien no se verifica ninguno de ellos. En otros términos: dos predicados P y Q son *equivalentes* cuando dan lugar a enunciados que son ciertos o falsos al mismo tiempo, cualesquiera que sean los enteros a los que se apliquen.

Esta condición puede escribirse:

$$(X_1)\,(X_2) \ldots (X_n)\,[P\,X_1\,X_2 \ldots X_n \leftrightarrow Q\,X_1\,X_2 \ldots X_n].$$

La condición para que los predicados $\hat{X}\,[(Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ y $\hat{X}\,[(EY)\,P\,X\,Y]$ sean equivalentes, es decir, para que se dé:

$$(X)\,[(EY)\,P\,X\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y].$$

Pero la expresión 3(175) nos da un contra-ejemplo que demuestra que esta expresión no tiene lugar. Por consiguiente, estos dos predicados no son equivalentes.

Este razonamiento puede repetirse para todos los predicados de la forma $\hat{X}\,[(EY)\,P\,X\,Y]$, donde P es recursivo general, enumerados, como se ha visto más arriba [14]. Para cualquiera de estos predicados existe un entero α para el cual el enunciado $(Y) \sim Pkl\,\alpha\,\alpha\,Y$ no le es equivalente (procedimiento de la diagonal). El predicado $\hat{X}\,[(Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ no puede, por tanto, representarse bajo la forma $\hat{X}\,[(EY)\,P\,X\,Y]$, donde P es recursivo general.

---

[13] Aquí interviene el procedimiento que constituye el núcleo de la paradoja de EPIMÉNIDES.

[14] § 174.

Con mayor razón, tampoco puede ser representado en la forma $\hat{X}\ [P\ X]$, pues, si así fuese, podría ser presentado bajo la forma $\hat{X}\ [(EY)\ (P\ X\ \&\ (Y = Y))]$, donde la expresión entre paréntesis es de la forma $(EX)\ Q\ X\ Y$.

Pero esto es imposible, en virtud del razonamiento anterior.

Consideremos ahora la expresión $\hat{X}\ [(EY)\ P\ X\ Y]$.

El predicado $\hat{X}\ [(EY)\ Pkl\ X\ X\ Y]$ es de esta forma, y se puede demostrar igualmente que no es expresable ni en la forma $\hat{X}\ [(Y)\ P\ X\ Y]$ ni en la forma $\hat{X}\ [P\ X]$.

Para las formas que llevan más de un cuantificador, se puede razonar de la siguiente manera:

Tomemos la forma $\hat{X}\ [(Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3)\ P\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3]$.

El predicado $\hat{X}\ [(Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3) \sim Pkl^{(3)}\ X\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3]$ es de esta forma.

Pero no es expresable, ni bajo la otra forma de la misma fila, ni bajo ninguna de las formas precedentes.

En virtud de la equivalencia 1(173) del lema, tenemos, en efecto, para un a conveniente:

$(EY_3)\ P\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3 \dashv\vdash (EY_3)\ Pkl^{(3)}\ a\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3$.

Esta equivalencia se conserva en la cuantificación. Por tanto, se puede escribir:

$(EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\ P\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3 \dashv\vdash (EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\ Pkl^{(3)}\ a\ X\ Y_1\ Y_2\ Y_3$.

Y, reemplazando X por a:

$(EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\ P\ a\ Y_1\ Y_2\ Y_3 \dashv\vdash (EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\ Pkl^{(3)}\ a\ a\ Y_1\ Y_2\ Y_3$.

Desde el punto de vista de la lógica clásica, toda expresión

$(EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\ R\ Y_1\ Y_2\ Y_3$ y $(Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3) \sim R\ Y_1\ Y_2\ Y_3$,

donde R es un predicado cualquiera, es equivalente a la negación de la otra [15].

Por consiguiente, no son equivalentes entre sí.

Entonces, los enunciados

$$(EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\quad Pkl^{(3)}\ a\ a\ Y_1\ Y_2\ Y_3$$

y

$$(Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3) \sim Pkl^{(3)}\ a\ a\ Y_1\ Y_2\ Y_3$$

no son equivalentes entre sí.

No obstante, este razonamiento no es válido desde el punto de vista de la lógica intuicionista (como lo era en el caso de un solo cuantificador).

A partir de aquélla, la demostración (que no es, pues, válida sino desde el punto de vista clásico) se realiza exactamente como en el primer caso.

---

[15] Lo que puede escribirse:

$\sim (EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\quad R\ Y_1\ Y_2\ Y_3 \dashv\vdash (Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3) \sim R\ Y_1\ Y_2\ Y_3$.

y $\sim (Y_1)\ (EY_2)\ (Y_3) \sim R\ Y_1\ Y_2\ Y_3 \dashv\vdash (EY_1)\ (Y_2)\ (EY_3)\quad R\ Y_1\ Y_2\ Y_3$.

La aplicación del operador de negación a una expresión con cuantificadores tiene por efecto cambiar todos los cuantificadores que figuran en el prefijo de esta expresión y afectar de negación a la parte de la expresión que sigue al prefijo.

Para demostrar la segunda parte del teorema, consideremos de nuevo la expresión $\hat{X}\,[(Y)\,P\,X\,Y]$.

La forma negativa correspondiente es $\hat{X}\,[\sim (Y)\,P\,X\,Y]$.

El predicado $\hat{X}\,[\sim (Y)\ \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ es de esta forma.

Sea P un cierto predicado recursivo general.

La equivalencia 2(173) del lema nos da, para un b conveniente:

$$(Y)\,P\,X\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl\,b\,X\,Y.$$

Y, reemplazando X por b:

$$(Y)\,P\,b\,Y \leftrightarrow (Y) \sim Pkl\,b\,b\,Y.$$

Es evidente que:

$$\sim [(Y) \sim Pkl\,b\,b\,Y \leftrightarrow \sim (Y) \sim Pkl\,b\,b\,Y],$$

y, por consiguiente,

$$\sim [(Y)\quad P\,b\,Y \leftrightarrow \sim (Y) \sim Pkl\,b\,b\,Y].$$

Así, cuando aplicamos el predicado $\hat{X}\,[\sim (Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ al entero b, se obtiene un enunciado que no es equivalente al enunciado obtenido aplicando al mismo entero b el predicado $\hat{X}\,[(Y)\,P\,X\,Y]$.

Los predicados $\hat{X}\,[\sim (Y)\ \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ y $\hat{X}\,[(Y)\,P\,X\,Y]$ no son, pues, equivalentes.

De ello se sigue, en virtud del razonamiento de la diagonal, que el predicado $\hat{X}\,[\sim (Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$ no puede ser representado en la forma $\hat{X}\,[(Y)\,P\,X\,Y]$, donde P es recursivo general. Con mayor motivo, tampoco puede ser representado en la forma $\hat{X}\,[P\,X]$.

El mismo razonamiento puede aplicarse a las demás formas, y como no se debe utilizar en adelante el cambio de cuantificadores (bajo el símbolo de negación) [16], este resultado es válido, tanto desde el punto de vista intuicionista como clásico.

SECCIÓN 2.—TEORIA DE PREDICADOS DE KLEENE Y LOS TEOREMAS DE LIMITACION.

176. TEORÍA DE UN PREDICADO.

Utilizando su *teorema de estratificación*, KLEENE redescubre los teoremas de GÖDEL y de CHURCH. Su razonamiento descansa en la idea general de una *teoría relativa a un predicado determinado.*

[16] Véase nota 15 de este capítulo.

Cuando se estudia una teoría matemática hay que abordar dos categorías de elementos: los objetos de que se ocupa tal teoría y las propiedades que pueden poseer dichos objetos.

En el caso de la Aritmética de los números enteros, los objetos son dichos números enteros, y las propiedades son, o bien propiedades individuales de los enteros, o bien relaciones entre enteros. Estas propiedades pueden estar representadas por predicados de una o varias variables que adoptan, a su vez, los valores de los enteros. Los enunciados de la Aritmética se construyen por medio de predicados de esta especie. Formalizar la Aritmética es construir una teoría formalizada de los predicados de la Aritmética. Por supuesto, se pueden tomar en consideración algunos predicados solamente. Pero la teoría formalizada deberá enumerar explícitamente los predicados de que se ocupa o dar unos procedimientos generales (por ejemplo, esquemas de recursión) que permitan construir nuevos predicados partiendo de los predicados básicos dados explícitamente.

El punto de vista que ahora vamos a considerar es el siguiente: ¿Cómo se puede representar en una teoría formalizada el dominio de validez de los predicados que incluye?

Para simplificar el razonamiento, podemos limitarnos al caso de un solo predicado P de un solo argumento.

El estudio de este predicado debe permitirnos determinar a qué números se aplica este predicado y a cuáles no se aplica. En otros términos: debe permitirnos determinar, para todo entero α, si $P\alpha$ es cierto o falso. Denominaremos *teoría de un predicado* P a todo mecanismo formal que permita efectuar esta determinación. Esto puede hacerse de dos maneras: construyendo una teoría algorítmica o construyendo una teoría deductiva.

Se denomina *teoría algorítmica de un predicado* P a la que da un procedimiento de cálculo que permite asociar a toda expresión del tipo $P\alpha$ (en la que α puede reemplazarse por un entero cualquiera) un símbolo correspondiente al valor *cierto* o un símbolo correspondiente al valor *falso* [17]. Esta teoría puede construirse formando una función F tal que $F\ \alpha$ tenga el valor 0 ó 1, según que $P\alpha$ sea verdadero o falso. (Esta función F es la función representativa del predicado P.)

Esta teoría se dice que es *completa* si permite realizar esta determinación, cualquiera que sea el entero α (en otros términos: si el cálculo característico queda completado en cada caso).

Se denomina *teoría de un predicado* P a un sistema formal que permite derivar de ciertos axiomas, por medio de reglas explícitamente formuladas, proposiciones que corresponden a expresiones del tipo $P\alpha$ obtenidas aplicando el predicado P a un entero cualquiera.

Esta teoría se dice que es *completa* si permite derivar todas las proposiciones que corresponden a las expresiones $P\alpha$ ciertas, y solamente a éstas. (Dicho de otra forma:

[17] Por ejemplo uno de los símbolos *Vri* o *Fal* utilizados en § 26.

un formalismo en el cual el conjunto de proposiciones derivables corresponde al conjunto de los enunciados ciertos de la forma $P\alpha$.)

177. La forma de Kleene del Teorema de Church.

Kleene ha redescubierto el teorema de Church en la siguiente forma [18]:

(LXV) *No existe teoría algorítmica completa de los predicados* $\hat{X}$ [(EY) *Pkl XXY*] y $\hat{X}$ [(*Y*) ~ *Pkl XXY*].

La existencia de una teoría algorítmica completa de un predicado *P* cualquiera puede expresarse mediante otro predicado *P** tal que el enunciado *P** α tenga por significación el proceso que permite asociar el anunciado P α el valor *cierto* o *falso* se remata efectivamente y da el valor *cierto*. El predicado *P** podrá indicar lo siguiente: ser un entero para el cual la función representativa del predicado *P* adopte efectivamente el valor 0 [19].

El predicado *P** depende de la misma variable que *P* y puede considerarse como equivalente a *P* (pues $P\alpha$ y $P^*\alpha$ son ciertos o falsos conjuntamente). En virtud de su significación intuitiva, este predicado $P^*\alpha$ es un predicado metateórico; puede expresarse bajo la forma de un predicado aritmético por medio de la teoría algorítmica que estamos considerando. Decir que esta teoría es completa equivale a afirmar que podemos efectivamente decidir, para cualquier valor α de la variable, si $P^*\alpha$ es cierto o es falso.

Si identificamos la noción de *procedimiento efectivo* con la de *operación recursivamente representable,* se puede expresar esto de manera más precisa diciendo: la teoría del predicado *P* es completa si (y solamente si) el predicado *P** es recursivo general.

Así, pues, dar una teoría algorítmica completa para un predicado *P* equivale a encontrar un predicado recursivo equivalente a *P**, o también a expresar $\hat{X}$ [*P X*] en la forma $\hat{X}$ [*P* X*] donde *P** es recursivo general.

El teorema de estratificación nos indica que se encuentran predicados que no son expresables en esta forma, y para los cuales, por consiguiente, no existe teoría algorítmica completa.

Esto ya hemos visto que es cierto de los predicados con un cuantificador.

$\hat{X}$ [(EY) *Pkl X X Y*] y $\hat{X}$ [(*Y*) ~ *Pkl X X Y*].

De ahí el Teorema.

Este teorema corresponde al Teorema de Church (y demás teoremas emparentados), pues se limita a afirmar la existencia de problemas insolubles: no es posible determinar, en cada caso, si los predicados en cuestión son ciertos o falsos.

---

[18] Kleene 10, pág. 61. Teorema VII.

[19] El enunciado *P*a* significa entonces: para el argumento *a*, la función representativa del predicado *P* adopta el valor 0.

178. LA FORMA DE KLEENE DEL TEOREMA DE GÖDEL.

KLEENE redescubre el Teorema de GÖDEL, generalizándole, en la siguiente forma[20]:

(LXVI) *No existe teoría deductiva completa del predicado* $\hat{X}$ [(*Y*) ~ *Pkl X X Y*].

Consideremos un predicado cualquiera *P*.

Si una teoría deductiva *LF* de estos predicados existe, debe llevar, para cada enunciado $P\alpha$, una proposición que le corresponda $\mathfrak{B}(\kappa)$[21] y debe poderse determinar efectivamente si existe una serie de proposiciones de *LF* que constituya una derivación de esta proposición o no.

Para expresar este hecho podemos construir el predicado: *ser una serie Sp de proposiciones de LF que constituya una derivación de una proposición* $\mathfrak{B}(\kappa)$ *correspondiente a un enunciado* $P\alpha$. Si se aritmetiza la teoría *LF*, este predicado podrá expresarse bajo la forma de un predicado aritmético *R* de dos argumentos y que responda a la siguiente propiedad:

Si *s* es el número-G de una serie de proposiciones *Sp* de *LF* y *a* un cierto número entero, *R a s* es cierto o falso según que *Sp* sea o no sea una derivación de la proposición $\mathfrak{B}(N_a)$. Es preciso que se pueda determinar efectivamente si *R a s* es cierto o es falso, cualquiera que sea *a* y cualquiera que sea *s*. Si identificamos la noción de *procedimiento efectivo* con la de *operación recursivamente representable*, esto equivale a postular que el predicado *R* sea recursivo *general*.

Podemos expresar mediante el enunciado (E *Y*) *R a Y* el hecho de que existe en *LF* una derivación de la proposición que corresponde a *P a*; y se puede formular como sigue la condición para que el sistema *LF* constituya una teoría deductiva *completa* de *P*: siempre que el enunciado $P\alpha$ es cierto, el enunciado (E*Y*) $R\,\alpha\,Y$ y debe ser igualmente cierto, y falso en los demás casos.

Recíprocamente, si en todos los casos en que $P\alpha$ es cierto se tiene (E*Y*) $R\,\alpha\,Y$, donde *R* es un predicado recursivo, y sólo en tal caso se puede construir un sistema *LF* dotado de las dos siguientes propiedades:

a) Se puede determinar efectivamente para toda serie de proposiciones de *LF* si constituye o no una derivación de una proposición determinada.

b) Las proposiciones derivables del sistema *LF* son las que corresponden a los casos en que el predicado *P* se cumple, y solamente éstas. En otros términos, se puede construir una teoría deductiva completa del predicado *P*.

Así, pues, si existe una teoría deductiva completa de un predicado *P*, los enunciados de la forma $P\alpha$ y los de la forma (E*Y*) $R\,\alpha\,Y$ deben ser ciertos o falsos al mismo

[20] KLEENE 10, pág. 63. Teorema VIII.

[21] Donde κ es el símbolo de *LF* correspondiente al entero α.

tiempo, y los predicados $\hat{X}\ [P\,X]$ y $\hat{X}\ [(EY)\ R\,X\,Y]$ deben, por tanto, ser equivalentes.

En consecuencia, podemos afirmar:

Dar una teoría deductiva completa de un predicado P se reduce a encontrar un predicado equivalente de la forma $\hat{X}\ [(EY)\ R\,X\,Y]$, donde R es recursivo general, o también a expresar P en esta forma.

De acuerdo con el teorema de estratificación, existen predicados que llevan un cuantificador de universalización o un número mayor de cuantificadores que no son expresables en esta forma.

Así, pues, en tanto que es posible dar una teoría deductiva completa para todos los predicados de la forma $\hat{X}\ [P\,X]$ o de la forma $\hat{X}\ [(E\,Y)\ P\,X\,Y]$, para cada una de estas dos formas hay al menos un predicado para el cual esto no es posible.

En particular, limitándonos a la forma que lleva un solo cuantificador, no es posible dar una teoría deductiva completa del predicado $\hat{X}\ [(Y) \sim Pkl\ X\,X\,Y]$.

179. Construcción de proposiciones indecidibles por el método de Kleene.

El teorema que acabamos de establecer es una generalización del Teorema de Gödel. Sin embargo, esto no es directamente evidente, puesto que no se trata directamente, en las demostraciones precedentes, de la existencia de proposiciones indecidibles.

Para demostrar que el teorema obtenido por Kleene generaliza efectivamente el de Gödel, vamos a establecer de manera directa, basándonos —como se ha hecho en la demostración del parágrafo precedente— en el teorema de estratificación, la existencia de proposiciones indecidibles en ciertos sistemas.

De manera más precisa, vamos a demostrar el teorema siguiente:

(LXVII) *Cualquiera que sea el sistema LF propuesto como teoría deductiva del predicado* $\hat{X}\ [(Y) \sim Pkl\ X\,X\,Y]$, *existe en este sistema al menos una proposición indecidible.*

Este teorema puede considerarse como una forma particular del establecido en el parágrafo anterior.

Al demostrarle, vamos a dar un sentido preciso a la expresión: *no existe teoría deductiva completa del predicado* $\hat{X}\ [(Y) \sim Pkl\ X\,X\,Y]$.

En efecto, vamos a indicar un entero para el cual este predicado es válido y para el cual la proposición correspondiente —cualquiera que sea el sistema que se utilice como teoría deductiva de este predicado— no es derivable.

Consideremos el sistema *LF* y supongamos que constituye una teoría deductiva del predicado $\hat{X}\ [(Y) \sim Pkl\ X\,X\,Y]$.

Como hemos indicado en el parágrafo anterior, la propiedad de ser derivable una proposición de tal sistema debe poder expresarse por medio de un predicado recursivo R.

Según la demostración del teorema de estratificación, existe un entero *a* para el que el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ no es equivalente al enunciado $(EY)\ R\ a\ Y$ (que es de la forma $(EY)\ P\ a\ Y$, donde *P es recursivo*) [22].

Por definición, el sistema *LF* debe llevar una proposición $\mathfrak{V}_K^*$ que corresponda al enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$. El enunciado $(EY)\ R\ a\ Y$ significa: la proposición $\mathfrak{V}_K^*$ es derivable en *LF*. Y el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ significa: la proposición $\mathfrak{V}_K^*$ no es derivable en *LF*.

Sea, en efecto, *G* la función definida a partir de *R* a la manera del lema del § 173. El valor *G a* es el menor entero *s* para el cual se tiene *R a s*, es decir, el menor entero *s* que sea el número-G de una derivación de $\mathfrak{V}_K^*$. El enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ significa que no es posible encontrar un sistema de ecuaciones mediante el cual se pueda calcular el valor de *G a*; en otros términos, que no se encuentra nunca ningún *s* tal que *R a s*, o también que no existe derivación de $\mathfrak{V}_K^*$

Esta proposición $\mathfrak{V}_K^*$ tendrá una estructura análoga a la del enunciado que representa. Por tanto, se presentará en la forma siguiente: $((\mathfrak{y}) \sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ \mathfrak{y}$, donde $\mathfrak{P}\mathfrak{r}[$ designa una expresión predicativa de *LF* que corresponde al predicado *Pkl*.

Supongamos que el sistema *LF* esté construido de tal manera que la proposición $\mathfrak{V}_K^*$ sólo sea derivable en él si el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ es cierto.

Basta, para que esta condición se satisfaga, que el sistema *LF* sea coherente, que incluya ciertas posibilidades de derivación del cuantificador de universalización [23] y que el predicado recursivo *Pkl* sea representable en el sistema [24].

Supongamos, en efecto, que la proposición $\mathfrak{V}_K^*$ sea derivable en *LF* y que, al mismo tiempo, el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ sea falso. Existe entonces una derivación de la proposición a la que representa $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ en *LF*. Dicho de otro modo, existe un entero *s* (que es el número-G de esta derivación) tal que *R a s*. Por consiguiente, tenemos: *Pkl a a s*.

Como *Pkl* es representable en *LF* (en virtud de nuestras condiciones), la proposición $\mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ N_s$ es derivable en *LF*.

Por otra parte, si $\mathfrak{V}_K^*$ es derivable en *LF*, en virtud de nuestras condiciones también podemos derivar en *LF* la proposición $\sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ N_s$ [25].

---

[22] Véase la expresión 3 (175).

[23] De manera precisa, basta con que se pueda derivar de la proposición $\mathfrak{V}_K^*$ o $(\mathfrak{y}) \sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ \mathfrak{y}$, una proposición de la forma $\sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ N_s$, para un cierto entero *s*. Esta derivación es ciertamente posible en un sistema que incluya el primer esquema de axiomas para el cuantificador de universalización (esquema 3.1 del § 79) y la regla de la consecuencia (regla 1 del § 80).

[24] Esta condición se cumple ciertamente para todo sistema que responda a la condición 4 del § 108, pero es naturalmente mucho menos restrictiva.

[25] Por el primer esquema para el cuantificador de universalización:

$$(\mathfrak{y}) \sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ \mathfrak{y} \rightarrow \sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a N_a N_s.$$

y por la regla de la consecuencia: $\sim \mathfrak{P}\mathfrak{r}[\ N_a\ N_a\ N_s$.

Pero esto es imposible si *LF* es coherente. Por consiguiente, nuestra hipótesis no puede ser mantenida.

En tales condiciones, se ve inmediatamente que $\mathfrak{G}^*_K$ no es derivable en *LF*.

Supongamos, en efecto, que $\mathfrak{G}^*_K$ fuese derivable en *LF*. Entonces el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ es falso, por lo que $\mathfrak{G}^*_K$ no puede ser derivable más que si este enunciado es cierto.

Es posible, por otra parte, formar en *LF* la proposición $\sim \mathfrak{G}^*_K$, que corresponde a la negación del enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ [26].

Supongamos que el sistema *LF* esté construido de tal manera que esta proposición $\sim \mathfrak{G}^*_K$ sólo sea derivable en él si el enunciado $\sim (Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ es cierto.

Para que esta condición se cumpla, basta con que el sistema *LF* sea ω-coherente y que el predicado *Pkl* sea representable en él.

Supongamos, en efecto, que la proposición $\sim \mathfrak{G}^*_K$ sea derivable en *LF* y que, al mismo tiempo, el enunciado $\sim (Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ sea falso. Entonces el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ es cierto; dicho de otra forma, la proposición $\mathfrak{G}^*_K$ no es derivable en *LF*.

Así, cualquiera que sea el entero *s*, *s* no puede ser el número-G de una derivación de $\mathfrak{G}^*_K$.

Por consiguiente, cualquiera que sea *s*, tenemos: $\sim R\ a\ s$.

E igualmente, como consecuencia de la propiedad anterior, cualquiera que sea *s*, tendremos: $\sim Pkl\ a\ a\ s$.

En otros términos, todos los enunciados de la forma $\sim Pkl\ a\ a\ \alpha$ son ciertos. Y como *Pkl* es representable en *LF* en virtud de nuestras condiciones, todas las proposiciones de la forma $\sim \mathfrak{Pf}[\ N_a\ N_a\ \kappa$ [27] son derivables en *LF*.

Por otra parte, hemos supuesto que $\sim \mathfrak{G}^*_K$, es decir $\sim (\mathfrak{Y}) \sim \mathfrak{Pf}[\ N_a\ N_a\ \mathfrak{Y}$, es derivable en *LF*, pero esto es imposible si *LF* es ω-coherente.

Por consiguiente, nuestra hipótesis no puede ser mantenida.

En tales condiciones, se ve inmediatamente que $\sim \mathfrak{G}^*_K$ no es derivable en *LF*.

Entonces, como *LF* se supone que es coherente, $\mathfrak{G}^*_K$ no es ciertamente derivable en *LF*, y el enunciado $\sim (Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$ es entonces falso. Pero $\sim \mathfrak{G}^*_K$ no puede ser derivable a no ser que este enunciado sea cierto.

Así, pues, bajo las hipótesis que hemos precisado, y que son de naturaleza extremadamente general, la proposición $\mathfrak{G}^*_K$ es indecidible en el sistema *LF*.

Por tanto, tenemos al menos un caso en el cual el predicado $\mathfrak{X}\ [(Y) \sim Pkl\ X\ X\ Y]$ es válido, y en el cual, no obstante, la proposición correspondiente no es ni deriva-

---

[26] El sistema *LF* debe llevar un operador de negación. Si no sería imposible representar en *LF* el enunciado $(Y) \sim Pkl\ a\ a\ Y$. Esta condición es la 1 del § 108.

[27] κ designa una constante individual cualquiera de *LF*, correspondiente a un entero.

ble ni refutable. El sistema *LF* no constituye, pues, una teoría deductiva completa de este predicado.

Obsérvese que la proposición utilizada por KLEENE es de la misma forma que la considerada en el teorema de GÖDEL.

180. ELIMINACIÓN DE LA HIPÓTESIS DE ω-COHERENCIA.

Es posible, como en el segundo teorema de ROSSER[28], eliminar la condición de ω-coherencia (utilizada en la segunda parte de la demostración), conservando solamente la hipótesis de coherencia. Basta para ello con introducir un nuevo predicado *S* de dos argumentos que responda a la propiedad siguiente:

Si *s* es el número-G de una serie de proposiciones *Sp* de *LF*, y *c* un cierto número entero, *S c s* es verdadero o falso según que *Sp* sea o no una derivación de la proposición $\sim (\mathfrak{P}) \sim \mathfrak{Bew}[N_c N_c \mathfrak{P}]$[29].

Utilizando este predicado *S*, podemos reemplazar el predicado $\hat{X}\,[(EY)\,R\,X\,Y]$ por el predicado $\hat{X}\,[(EY)\,(R\,X\,Y\,\&\,(Z)\,(Z < Y \rightarrow \sim S\,X\,Z))]$.

Los enunciados del tipo $(EY)\,(R\,\alpha\,Y\,(Z)\,(Z < Y \rightarrow \sim S\,\alpha\,Z))$ que podemos formar mediante este nuevo predicado, significan: la proposición que corresponde al enunciado $(Y) \sim Pkl\,\alpha\,\alpha\,Y$ es derivable en *LF* a través de una serie de proposiciones $Nga^{-1}\,(Y)$, y no hay ninguna serie de proposiciones cuyo número-G sea inferior a *Y* y constituya una refutación de esta proposición.

Si rehacemos el mismo razonamiento anterior utilizando este nuevo predicado, podremos decir: existe un entero *d* para el cual el enunciado $(Y) \sim Pkl\,d\,d\,Y$ no es equivalente al enunciado $(EY)\,(R\,d\,Y\,\&\,(Z)\,(Z < Y \rightarrow \sim S\,d\,Z))$. (Como el predicado utilizado es diferente, tenemos que enfrentarnos con un entero *d* diferente a *a*.) A partir de aquél, la demostración puede desarrollarse de la misma manera que la anterior, demostrándose que la proposición correspondiente al enunciado $(Y) \sim Pkl\,d\,d\,Y$ es indecidible. Pero ya no será necesario, para establecer que esta proposición es irrefutable, postular la ω-coherencia de *LF*.

181. CASO EN QUE LA FORMA DE KLEENE DEL TEOREMA DE CHURCH SE REDUCE A LA FORMA DE KLEENE DEL TEOREMA DE GÖDEL.

Supongamos que el sistema formal *LF* utilizado como teoría deductiva de un predicado *P* no sólo hace posible derivar todas las proposiciones correspondientes a los enunciados $P\alpha$ ciertos, y solamente a éstos, sino que permite igualmente refutar todas

[28] Véase § 117.

[29] Este predicado *S* queda, pues, definido de manera simétrica al predicado *R*, pero concierne a las proposiciones que corresponden al predicado $\hat{X}\,[\sim (Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$, y no a las que correspondan al predicado $\hat{X}\,[(Y) \sim Pkl\,X\,X\,Y]$.

las proposiciones correspondientes a los enunciados $P\alpha$ falsos, y sólo éstas. En otros términos, supongamos que este sistema constituye una teoría deductiva completa a la vez para $\hat{X}\,[P\,X]$ y para $\hat{X}\,[\sim P\,X]$.

Se puede demostrar (aplicando el principio de exclusión de tercero a los enunciados $P\alpha$) que este sistema es entonces, y simultáneamente, una teoría algorítmica completa de P.

En efecto, sea R el predicado que expresa la derivabilidad de las proposiciones correspondientes a los enunciados $P\alpha$, y S el predicado que expresa la derivabilidad de las proposiciones correspondientes a los enunciados $\sim P\alpha$.

Bajo tal hipótesis, tendremos las equivalencias:

$$P\,X \leftrightarrow (EY)\,R\,X\,Y$$

y $$\sim P\,X \leftrightarrow (EY)\,S\,X\,Y.$$

En virtud de la ley de exclusión de tercero, tendremos:

$$P\,X \vee \sim P\,X.$$

Y, por tanto, $(EY)\,(R\,X\,Y \vee S\,X\,Y)$.

Entonces podremos escribir:

$$P\,X \leftrightarrow R\,X\,(Min\,Y\,[R\,X\,Y \vee S\,X\,Y])\,^{30}.$$

Lo cual significa: un enunciado $P\alpha$ es cierto o falso según que dispongamos de una derivación o de una refutación de la proposición correspondiente.

En otros términos, la teoría deductiva completa *LF* correspondiente a P es, a la vez, una teoría algorítmica completa de P: para decidir si un enunciado $P\alpha$ es cierto o falso, basta con recorrer la lista de las proposiciones derivables de *LF* hasta encontrar una proposición que corresponda a $P\alpha$ o a la negación de esta proposición.

Si consideramos un sistema formal de esta naturaleza, la forma de KLEENE del teorema de CHURCH se retrotrae, por tanto, a la forma de KLEENE del teorema de GÖDEL.

SECCIÓN 3.—EXTENSION DE LA FORMA DE KLEENE DEL TEOREMA DE GÖDEL A LOGICAS NO-CONSTRUCTIVAS Y LIMITE DE ESTA EXTENSION.

182. LÓGICAS ORDINALES.

La demostración dada por KLEENE de su generalización del teorema de GÖDEL sólo impone al sistema formal *LF* —y esta es su ventaja— una condición absoluta-

[30] *Min Y* [*R X Y* ∨ *S X Y*] designa el menor entero que es el número-G de una derivación o una refutación de la proposición correspondiente a *P X*.

mente general. Esta condición puede formularse así: la propiedad de derivabilidad en el sistema *LF* debe ser recursivamente representable. Dicho de otra forma: debe ser posible asegurarse mediante un procedimiento efectivo si una serie de proposiciones dadas de *LF* constituye o no una derivación de una proposición dada de *LF*.

Hay, no obstante, sistemas que no cumplen esta condición: se trata de las lógicas no-constructivas [31].

Lo teoría de predicados de KLEENE permite extender fácilmente el teorema de GÖDEL a ciertas lógicas de este género.

Permite, en particular, reconstruir los resultados obtenidos por ROSSER para los sistemas que utilizan la regla *Re-C* (regla de CARNAP) [32]. En efecto, el uso de la regla *Re-C* puede representarse mediante la introducción de un cuantificador de universalización en el predicado que expresa la propiedad de derivabilidad de la lógica considerada. Este predicado tendrá, por tanto, una de las formas previstas por el teorema de estratificación, y podrá prestarse al tipo de demostración utilizado para las lógicas ordinales.

En general, la forma dada por KLEENE al teorema de GÖDEL puede extenderse a todo formalismo *LF* que responda a la condición siguiente:

Para una proposición de *LF*, la propiedad de ser derivable en ese sistema puede expresarse mediante un predicado que tenga una de las formas previstas en el teorema de estratificación del § 174.

Por supuesto, existen lógicas no-constructivas que no responden ya a este criterio, y a las cuales, por consiguiente, no se puede aplicar la generalización de KLEENE. Este autor da el ejemplo de un predicado que no es expresable bajo ninguna de las formas enumeradas por su teorema de estratificación [33].

183. LOS CONJUNTOS DE ENTEROS DEFINIBLES DE MOSTOWSKI.

En lugar de considerar predicados, como hace KLEENE, se puede considerar aquellos enteros para los cuales estos predicados se verifican. MOSTOWSKI ha elaborado una teoría de *conjuntos de enteros definibles* en la cual ha obtenido resultados análogos a los de KLEENE [34].

Los conjuntos de enteros en cuestión, en esta teoría, son aquellos que se pueden definir mediante predicados que adoptan enteros por argumentos.

Sea P un predicado de enteros de k argumentos.

Consideremos el conjunto de todos los sistemas de k enteros $(a, b, \ldots, k)$, y sea *En-Sk* este conjunto.

[31] Véase § 122.
[32] Véase § 123.
[33] KLEENE 10, pág. 71. Teorema XI.
[34] MOSTOWSKI 3.

Podemos definir un subconjunto *En-Spk* de la manera siguiente:

El sistema (*a, b, ..., k*) pertenece a *En-Spk* si el enunciado *P a b ... k* es cierto.

Para que *En-Spk* sea definido, es evidentemente necesario que se disponga de un procedimiento de decisión para el predicado *P*.

Se puede disponer el problema de otra forma utilizando un formalismo *LF* en el cual el predicado *P* es representable, y que comporte constantes individuales correspondientes (biunívocamente) a los enteros.

Sea $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_k$) la expresión de *LF* que corresponde al predicado $\hat{X}_1\, \hat{X}_2 \ldots \hat{X}_k\, [P\ X_1\ X_2 \ldots X_k]$ y sean $N_a, N_b, \ldots, N_k$ las constantes individuales de *LF* que corresponden, respectivamente, a los enteros *a, b, ..., k*. Diremos entonces que el sistema (*a, b, ..., k*) pertenece al conjunto *En-Spk* si la proposición $\mathfrak{P}$ ($N_a, N_b, \ldots, N_k$) es derivable en *LF* [35].

De esta forma, a todo predicado *P* podrá corresponder un subconjunto de *En-Sk*.

Imponiendo condiciones suplementarias a estos subconjuntos, se los puede distribuir en clases, de tal manera que estas clases puedan ser engendradas de manera regular partiendo de clases iniciales. Tales clases se definen de manera inductiva.

Todo subconjunto del tipo *En-Spk* se dice que pertenece a dos clases iniciales *Cl-E0k* y *Cl-Unk* previamente definidas (para una *k* cualquiera). A continuación se define *Cl-E* (*n* + 1) *k* y *Cl-U* (*n* + 1) *k* de la manera siguiente:

Un subconjunto *En-S a k* de *En-Sk* se dice que pertenece a *Cl-E* (*n* + 1) *k* si existe un subconjunto *En-Sb* (*k* + 1) de *En-S* (*k* + 1) que pertenece a *Cl-Un* (*k* + 1) y si la condición necesaria y suficiente para que un sistema (*a, b, ..., k*) pertenezca a *En-S a k* es que exista un entero *l* tal que el sistema (*a, b, ..., k, l*) pertenezca a *En-Sb* (*k* + 1).

Si, por tanto, el subconjunto *En-S b* (*k* + 1) está definido por el predicado $\hat{X}_1\, \hat{X}_2 \ldots \hat{X}_k\, \hat{Y}\ [P\ X_1\ X_2 \ldots X_n\ Y]$, el subconjunto *En-S a k* estará definido por el predicado $\hat{X}_1\, \hat{X}_2 \ldots \hat{X}_k\ [(EY)\ P\ X_1\ X_2 \ldots X_k\ Y]$. En otros términos, el paso de una clase del tipo *Cl-U n k* a otra del tipo *Cl-E n k* corresponde a la introducción de un cuantificador de particularización.

Y, por otra parte, un subconjunto *En-S a k* de *En-S k* se dice que pertenece a la clase *Cl-U* (*n* + 1) *k* si es el complemento, en relación al conjunto *En-S k* de un conjunto *En-S b k* perteneciente a la clase *Cl-E* (*n* + 1) *k*.

Si, por tanto, el subconjunto *En-S b k* queda definido por el predicado $\hat{X}_1\, \hat{X}_2 \ldots \hat{X}_k\ [P\ X_1\ X_2 \ldots X_k]$, el subconjunto *En-S a k* estará constituido por todos los sistemas de *k* enteros que convierten este predicado en falso. En otros términos, el paso de una clase de tipo *Cl-E* (*n* + 1) *k* a otra clase de tipo *Cl-U* (*n* + 1) *k* corresponde a la operación de negación.

Esta clasificación generaliza la de KLEENE.

Las clases *Cl - E 0 k* y *Cl - U 0 k* corresponden a la forma predicativa sin cuantificadores. Las clases *Cl - E j k* corresponden a las formas predicativas en las que el

[35] La expresión $\mathfrak{P}$ ($N_a, N_b, \ldots, N_k$) designa la proposición obtenida reemplazando en $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_k$), las variables $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_k$, respectivamente, por las constantes $N_a, N_b, \ldots, N_k$.

primer cuantificador es un cuantificador de particularización. Las clases *Cl - U j k* corresponden a las formas predicativas en las que el primer cuantificador es de universalización. (Se puede obtener, en efecto, un predicado del tipo $\hat{X}$ [(*Y*) *R X Y*] a partir de un predicado de tipo $\hat{X}$ [(E*Y*) *S X Y*], afectando de un operador de negación a la expresión contenida entre corchetes) [36].

La clasificación de MOSTOWSKI es más general que la de KLEENE, pues no lleva ninguna cláusula que corresponda a la condición de recursividad del Teorema de Estratificación de KLEENE [37].

MOSTOWSKI demuestra que si los subconjuntos recursivos primitivos de *En - Sk* pertenecen a *Cl - E 0 k*, y si, para todo predicado *P* de *k* argumentos, la propiedad *ser el número-G de una derivación de* $\mathfrak{P}$ (N_a, N_b, ..., N_k) *en LF* es recursivamente representable mediante un predicado recursivo primitivo, entonces *Cl - E 0 k* es la clase de los subconjuntos recursivos generales de *En - Sk*. En tal caso, la clasificación de MOSTOWSKI coincide con la de KLEENE, pues los predicados que corresponden a la forma predicativa $\hat{X}$ [*P X*] de la clasificación de KLEENE son recursivos generales (en virtud de la definición de conjunto recursivo).

184. GENERALIZACIÓN POR MOSTOWSKI DEL TEOREMA DE ESTRATIFICACIÓN DE KLEENE.

MOSTOWSKI demuestra, para la serie de clases definida en el parágrafo precedente, un teorema que constituye una generalización del Teorema de Estratificación de KLEENE. Este teorema descansa sobre un conjunto de condiciones cuya esencia consiste en exigir que la propiedad de derivabilidad, para el formalismo *LF* [38], sea expresable por medio de un predicado que corresponda a una de las clases previstas en la clasificación anteriormente descrita (o también: que tenga una de las formas previstas en el Teorema de Estratificación de KLEENE, pero con un *P* cualquiera). De manera más precisa: habiéndose previsto el sistema *LF* como aritmetizable, los números-G de las derivaciones de *LF* deben formar un subconjunto de *En - S* 1 que pertenezca a una clase *Cl - E j* 1 (para un cierto *j*).

El Teorema de MOSTOWSKI se enuncia como sigue:

(LXVIII) *Para todo sistema LF que responda a las hipótesis previstas, y para todo* $n > 0$, *la clase Cl - E* $(n + 1)$ *k es diferente de la clase Cl - E n k, y la clase Cl - U* $(n + 1)$ *k es diferente de la clase Cl - U n k. Además, ningún conjunto perteneciente a una de las clases Cl - E n k o Cl - U n k está contenida en la otra* [39].

---

[36] Véase nota 15 del presente capítulo.

[37] Que impone al predicado *P* ser recursivo.

[38] Se trata del formalismo *LF* del que se ha tratado más arriba, y en el cual el predicado *P* es representable.

[39] Las clases de que se trata son clases formadas, como se indicó anteriormente, a partir de los conjuntos del tipo *En-Spk* correspondiente a los predicados *P* representables en el sistema *LF*.

Si *Cl - E 0 k* es la clase de conjuntos recursivos generales de *En - S k*, se formula el Teorema de Estratificación de KLEENE, pero bajo una forma más débil, pues el método de KLEENE permite construir efectivamente, para todo *n*, un subconjunto de *En - S k* que pertenece a la clase *Cl - E n k*, pero que no está contenido en *Cl - U n k* ni en ninguna de las clases más simples.

Este teorema permite obtener, de manera exacta al Teorema de Estratificación de KLEENE, una forma generalizada del Teorema de GÖDEL y extender esta generalización a sistemas no-constructivos. El método de MOSTOWSKI permite llevar esta extensión tan lejos como lo permite el método de KLEENE. Las condiciones impuestas al sistema *LF*, en el Teorema de MOSTOWSKI, son, por otra parte, análogas a las que se deben imponer, en la teoría de KLEENE, a los sistemas a los cuales se quiere extender la forma de KLEENE del Teorema de GÖDEL.

CAPÍTULO VIII

El método semántico. Teoremas de Tarski y de Mostowski

SECCIÓN 1.—EL METODO SEMANTICO.

185. LA NOCIÓN DE VERDAD EN UN SISTEMA FORMAL.

Todos los resultados hasta aquí examinados se apoyaban exclusivamente en las propiedades sintácticas de los sistemas formales. TARSKI ha introducido en la ciencia de los fundamentos un método que se ha revelado extremadamente fecundo, basado en las propiedades semánticas de los sistemas formales [1]. Las propiedades semánticas hacen intervenir necesariamente la relación que existe entre el sistema formal considerado y tal o cual dominio de objetos [2] que se pueden representar [3] en este sistema, o mediante el cual es posible construir una interpretación de este sistema [4].

---

[1] Véase § 33.

[2] Estos objetos pueden ser individuos, funciones, operaciones, predicados o enunciados. Se podrían considerar como si formasen parte de una teoría matemática intuitiva (no formalizada, o en todo caso no enteramente formalizada). Pero es necesario evitar un cierto equívoco. No sería correcto decir que el estudio semántico de un sistema consiste en analizar las relaciones que existen entre este sistema y las teorías intuitivas que se le puedan adscribir. Si así ocurriese, la semántica no podría ser una disciplina exacta; en efecto, no es posible someter una teoría a un examen riguroso (como puede hacerse en el caso de un sistema formal). El estudio semántico de un sistema se refiere a las relaciones que existen entre este sistema y la estructura matemática de la que este sistema debe constituir la representación formal. Evidentemente, una estructura matemática puede ser presentada de manera aproximada a través de una teoría intuitiva; sucederá esto aunque esté presentada de tal suerte antes de ser formalizada estrictamente. También es posible servirse de esta presentación intuitiva para darle una idea previa de la estructura en cuestión. Pero esto no es indispensable, y de todas formas la semántica debe dar una caracterización rigurosa de esta estructura. Esto es lo que sucede, por ejemplo, cuando da una definición precisa de las *proposiciones verdaderas* del sistema que estudia (véase un ejemplo de tal definición en § 186).

[3] Véase a este propósito § 41.

[4] Véase a este propósito § 22.

La propiedad, para una proposición de un sistema, de ser *verdadera en un campo de interpretación* dado [5], o la propiedad, para una función (u operación, o predicado), de ser *representable* en un cierto sistema formal [6], son propiedades semánticas.

TARSKI ha basado sus investigaciones sobre el estudio de la función de *verdad* en un sistema formal [7].

Si se puede dar una definición precisa de la propiedad *ser una proposición verdadera de un sistema LF,* entonces es posible clasificar las proposiciones del sistema no ya en *derivables* y *no-derivables,* sino en proposiciones *verdaderas y falsas* (no-ciertas) [8].

En otros términos, dado un sistema *LF,* se puede considerar el predicado metateórico *verdadero* y proponernos dar de él una definición precisa. Este predicado es un predicado semántico que puede ser aplicado a las proposiciones de *LF* y que permite separar estas proposiciones en dos clases diferentes.

TARSKI ha demostrado el procedimiento de definición rigurosa de un tal predicado, inspirándose en la noción intuitiva de verdad.

En lo que sigue, siempre que hablemos del predicado verdadero subentenderemos que se trata del predicado *verdadero* en el sistema que consideremos. Este predicado lo designaremos con el símbolo *Vri* [9].

En los teoremas que serán tratados más adelante, tendremos que utilizar el predicado *Vri* (para un determinado formalismo), pero no será necesario dar una definición explícita; solamente tendremos que precisar ciertas condiciones generales a las que la definición de *Vri* debe ser sometida.

Entre tanto, indiquemos esquemáticamente cómo se puede construir una definición explícita de *Vri* para un determinado formalismo.

186. DEFINICIÓN DEL PREDICADO VRI PARA EL SISTEMA LFN-V.

Consideremos el sistema *LFN-V* que corresponde a la aritmética clásica.

Este sistema posee (esquemáticamente) la siguiente estructura.

Está dotado de las siguientes componentes primitivas: variables individuales ($\mathfrak{X}$, y esta misma letra afectada de índices), constantes individuales (N_0, N_1, N_2, ...), una

[5] Véase § 29.

[6] Véase § 41.

[7] TARSKI 4. Véase también TARSKI 9 y 15.

[8] O también: si se puede asociar a toda proposición de un sistema uno de los símbolos *Vri* o *Fal* (y sólo uno), es posible clasificar las proposiciones de este sistema en proposiciones *verdaderas* y *falsas.* Se puede, naturalmente, utilizar, en lugar de los símbolos *Vri* y *Fal,* cualquier otro par de símbolos; lo esencial es que las proposiciones del sistema queden repartidas en dos clases distintas.

[9] Si se pretende un rigor absoluto se impone utilizar un símbolo diferente para cada formalismo. Pero como nosotros consideraremos solamente resultados de forma general y no tendremos que temer ninguna ambigüedad, podemos convenir sin reparo la utilización del mismo símbolo.

constante predicativa (=), tres constantes funcionales (σ, + y $\times$), los operadores proposicionales habituales y símbolos de agrupamiento.

También posee los axiomas y esquemas siguientes: esquemas de recursión para definir las funciones + y $\times$, axiomas para el predicado =, los axiomas de PEANO (comprendido el principio de inducción), los axiomas y esquemas de derivación de la lógica de predicados de primer orden (axiomas de la lógica proposicional, axiomas para los cuantificadores, esquema correspondiente a la regla de la consecuencia, esquema para el cuantificador de universalización). Los axiomas de PEANO sirven para caracterizar las constantes N_0 y σ. Las constantes individuales distintas de N_0 no pueden ser introducidas por vía de definición [10].

Este formalismo permite introducir por medio de definiciones explícitas todas las funciones recursivas primitivas y es suficiente para la formalización de *LAI* [11].

Las proposiciones de este sistema *LFN-V* corresponden a enunciados aritméticos (enunciados *LAI*) en el sentido de que representan propiedades de una cierta estructura matemática, la teoría de los números enteros [11 bis]. Pero mientras que las proposiciones de *LFN-V* se construyen según reglas precisas, los enunciados de *LAI* están formulados en un lenguaje que no es perfectamente riguroso. Por otra parte, mientras que el sistema *LFN-V* se presenta en forma de un sistema formal puro, la aritmética intuitiva sólo está formalizada parcialmente. En *LFN-V*, la noción de *teorema* está definida de manera precisa (como resultado de los axiomas y las reglas de derivación); en *LAI*, por el contrario, esta noción no está determinada por criterios precisos. No se puede, por tanto, pensar en definir de manera precisa un predicado *Vri* por *LFN-V* estableciendo una correspondencia entre las proposiciones de *LFN-V* y los enunciados de *LAI*. Ciertamente, en la construcción del predicado *Vri* nos dejaremos guiar por el conocimiento que poseemos de la teoría de números enteros, y este conocimiento se expresa, a nivel no estrictamente formalizado, y como conse-

[10] Como en el § 74.

[11] Como puede verse, el sistema *LFN-V* corresponde al sistema *LFN* del § 129. Tiene exactamente la misma potencia. La única diferencia entre ambos sistemas es que *LFN* lleva el esquema de recursión primitiva (en su forma general), mientras que *LFN-V* lleva esquemas especiales para la suma y la multiplicación, e introduce las demás funciones recursivas mediante definiciones explícitas (que hacen intervenir las funciones +, $\times$ y σ).

[11 bis] A decir verdad, esta manera de representar las cosas tan sólo corresponde a un punto de vista *heurístico*, y podría conducir a malentendidos. Hablando estrictamente, no se trata de establecer una correspondencia entre el sistema formal *LFN-V* y una teoría no formalizada *LAI*. Se trata de establecer una correspondencia entre *LFN-V* y una cierta estructura matemática de la cual *LAI* sólo da una descripción bastante aproximada. La definición dada no se refiere en absoluto al valor de certeza de los enunciados de *LAI*. Si así fuese no tendría ningún carácter preciso, pues el valor de certeza de los enunciados de *LAI* se fija por medio de criterios intuitivos, y, por tanto, no rigurosos. En realidad, dicha definición da un criterio preciso que permite determinar directamente y sin ambigüedad si una proposición dada de *LFN-V* es *verdadera* o *falsa*. Sin duda se ha inspirado para construirlo en las propiedades de los enunciados de *LAI*, y es esto lo que justifica la presentación anterior. Pero ésta posee una significación intrínseca que es independiente de estas propiedades, y en este sentido se puede afirmar que incluye implícitamente una caracterización rigurosa de la estructura matemática que el sistema *LFN-V* se sabe que puede representar formalmente.

cuencia más accesible a la intuición, en *LAI*. Y en este sentido, los criterios que permiten decidir sobre la verdad o la falsedad de los enunciados de *LAI* pueden servir de fácil conductor. Pero si pretendemos constituir la semántica en ciencia exacta, es preciso dar al predicado *Vri* el estatuto de una noción definida de manera rigurosamente formal. En otros términos, hay que dar un criterio preciso que permita determinar directamente y sin ambigüedad si una proposición dada de *LFN-V* es *verdadera* o *falsa*, independientemente del valor de verdad de los enunciados de *LAI* (que no se determina por criterios rigurosos). El predicado *Vri* para *LFN-V* debe recibir una significación intrínseca; su definición debe ser construida de manera que proporcione (implícitamente) una caracterización rigurosa de la estructura matemática que el sistema *LFN-V* trata de representar formalmente.

Si el sistema *LFN-V* sólo posee un número finito de proposiciones, podríamos definir *Vri* indicando, para cada una de estas proposiciones, si es *verdadera o falsa*, es decir, si posee el predicado *Vri* o no. Como, en realidad, el sistema *LFN-V* comprende una infinidad de proposiciones, no podemos limitarnos a elaborar una definición de este género. Pero podemos elaborar una definición formulada de manera recurrente; basta definir el predicado *Vri* por las proposiciones elementales e indicar después cómo puede ser extendido a las proposiciones complejas siguiendo las reglas de formación que indican cómo se puede pasar de las proposiciones elementales a otras más complejas. Pero debemos tener presente que ciertas proposiciones de *LFN-V* son *abiertas* (contienen variables libres). Tales proposiciones no representan directamente un hecho aritmético, la pertenencia de tal o cual propiedad a un número determinado, a una categoría de números o a todos los números, sino más bien una forma de hecho, una especie de pura posibilidad formal. Para pasar de la forma a un hecho es preciso transformar la proposición abierta en proposición cerrada, sea ligando las variables mediante cuantificadores, sea reemplazándolas por constantes individuales. TARSKI ha demostrado cómo se puede superar esta dificultad introduciendo un predicado metateórico intermediario *Sts* (que expresa la propiedad, para una determinada sucesión, de *satisfacer* una determinada propiedad). Este mismo predicado hace intervenir en su definición una función metateórica *Val*, que hace corresponder a cada término de *LFN-V* un número entero, *valor* adoptado por este término cuando las variables que en él figuran son reemplazadas por números enteros determinados. (La función *Val* estará constituida de manera que haga corresponder a los términos que no contengan variables el número que ellos representan). Las definiciones de la función *Val* y del predicado *Sts* hacen intervenir una aritmetización del sistema *LFN-V*.

La idea de la construcción es la siguiente: Sea un dominio de individuos, el conjunto de los números enteros. Dada una proposición cualquiera A de *LFN-V*, esta proposición podrá en general descomponerse en proposiciones elementales que tengan la forma de igualdades entre términos [12]. Se hará corresponder a cada una de estas constantes individuales que figuran en estos términos los enteros que estas constantes

[12] La noción de *término* puede definirse como en el caso del sistema *LFN-G*: véase también § 135 e INDICE DE NOTACIONES, 2.32.2.

representan, y se hará corresponder a cada una de las variables libres que contienen un entero elegido arbitrariamente. Entonces se podrá hacer corresponder a cada uno de estos términos un valor numérico: para ello bastará con calcular los valores que adoptan (para los argumentos numéricos elegidos) las funciones que figuran en estos términos mediante aproximaciones sucesivas (es decir, calculando primero los valores de las funciones que sólo tienen por argumento números enteros, después los de las funciones entre los argumentos en los que figuran funciones del tipo precitado, y así sucesivamente). Una proposición elemental se dice que está satisfecha por los enteros elegidos si se encuentra el mismo valor numérico a ambos lados del signo de igualdad. Entonces se podrá extender progresivamente la noción de satisfacción a las proposiciones complejas, interpretando los operadores proposicionales en el sentido habitual. Una proposición (cualquiera) se dirá que es verdadera si queda satisfecha por todas las elecciones posibles de los valores numéricos sustituidos en las variables libres que contiene.

He aquí cómo puede ponerse en práctica esta idea de manera precisa. Consideremos el conjunto de los enteros. Consideremos todas las series indefinidas *Se* de enteros que podemos formar tomando solamente cada vez un número finito de enteros diferentes de 1, y situando estos enteros a la cabeza de la serie. (Por tanto, estas series serán del tipo: $a_1, a_2, \ldots, a_n, 1, 1, 1, \ldots$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros distintos de 1). Dada una serie de esta naturaleza, podemos hacerla corresponder término a término la serie $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \ldots\ldots$ de las variables de *LFN-V*.

Denominemos a esta correspondencia una *atribución de valores* a las variables de *LFN-V*, asociada a la serie considerada. Esto establecido, si disponemos de una expresión en la que figuren las variables libres $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ y si tenemos una serie $a_1, a_2, \ldots, a_m, 1, 1, 1, \ldots$, la atribución de valores asociada a esta serie hace corresponder a estas variables los n primeros números de esta serie. (Si $m < n$, las variables de índice superior a m serán puestas en correspondencia con 1). Por otra parte, podemos proceder a una aritmetización de nuestras series, es decir, hacerlas corresponder biunívocamente números enteros.

La función *Val* hace corresponder a cada término de *LFN-V* y a toda serie de tipo *Se* un número entero determinado, que es el valor de este término, para la atribución de valores asociados a esta serie.

Sea s el número coordinado a la serie *Se*.
Si n es el número-G de N_0, $Val\ (n, s) = 0$.
Si n es el número-G de N_1, $Val\ (n, s) = i$.
Si n es el número-G de $\mathfrak{X}_n$, $Val\ (n, s) = a_n$.
(Donde a_n es el n-ésimo término de la serie *Se*.)
Si t_1 es el número-G del término τ_1
y n el número-G de $\sigma\ \tau_1$, $Val\ (n, s) = Val\ (t_1, 1) + 1$.

Si t_1 y t_2 son los números-G de los términos τ_1 y τ_2 y n el número-G de la expresión $(\tau_1 + \tau_2)$, $Val\ (n, s) = Val\ (t_1, s) + Val\ (t_2, s)$.

Si t_1 y t_2 son los números-G de los términos τ_1 y τ_2 y n el número-G de la expresión $(\tau_1 \times \tau_2)$, $Val\ (n, s) = Val\ (t_1, s) \times Val\ (t_2, s)$.

El predicado *Sts* queda definido ante todo por las proposiciones elementales y después por las que se forman a partir de proposiciones cualesquiera mediante operadores lógicos. Las proposiciones elementales de *LFN-V* tienen la forma de una igualdad entre términos.

Si e es el número-G de una proposición elemental $(\tau_1 = \tau_2)$ y si t_1 y t_2 son los números-G de los términos τ_1 y τ_2, tendremos:

$$Sts\ (e, s) \leftrightarrow Val\ (t_1, s) = Val\ (t_2, s).$$

(Dicho de otra forma: decir que la serie *Se satisface* a la proposición $(\tau_1 = \tau_2)$ equivale a decir que los valores de los términos τ_1 y τ_2, por la atribución de valores asociados a esta serie, son iguales.)

Si a es el número-G de una proposición A de *LFN-V*, y *Neg a* el número-G de la proposición $\sim$ A, tendremos:

$$Sts\ (Neg\ a, s) \leftrightarrow \sim Sts\ (a, s).$$

Si a es el número-G de una proposición A, b el número-G de una proposición B, k el número-G de una proposición (A $\vee$ B), l el número-G de la proposición (A & B), m el número-G de la proposición (A $\rightarrow$ B) y n el número-G de la proposición (A $\leftrightarrow$ B), tendremos:

$$\begin{aligned}
Sts\ (k,\ s) &\leftrightarrow [Sts\ (a, s)\ \vee\ Sts\ (b, s)] \\
Sts\ (l,\ s) &\leftrightarrow [Sts\ (a, s)\ \&\ Sts\ (b, s)] \\
Sts\ (m,\ s) &\leftrightarrow [Sts\ (a, s)\ \rightarrow\ Sts\ (b, s)] \\
\text{y } Sts\ (n,\ s) &\leftrightarrow [Sts\ (a, s) \leftrightarrow Sts\ (b, s)].
\end{aligned}$$

Si a es el número-G de una proposición A $(\mathfrak{X}_n)$ y b el número-G de la proposición (E $\mathfrak{X}_n$) A $(\mathfrak{X}_n)$, *Sts* equivale a: existe una serie *Se** diferente de la *Se* por el n-ésimo término cuando más, y tal que se tiene *Sts* (a, s^*), donde s^* es el número coordinado a la serie *Se**.

Si a es el número-G de una proposición A $(\mathfrak{X}_n)$ y b el número-G de la proposición $(\mathfrak{X}_n)$ A $(\mathfrak{X}_n)$, *Sts* (b, s) equivale a: toda serie *Se** que se diferencie de la *Se* por el n-ésimo término cuando más, es tal que se tiene *Sts* (a, s^*), donde s^* es el número coordinado a la serie *Se**.

Quedando definido de este modo el predicado *Sts*, es fácil definir el predicado *Vri*. Si a es el número-G de una proposición A, se tiene *Vri a* si (y solamente si) cualquiera que sea s, *Sts* (a, s). Dicho de otra forma: la proposición A es *verdadera* si puede quedar satisfecha por cualquier serie *Se* del tipo definido anteriormente.

Mediante estas definiciones se puede demostrar que todos los axiomas de *LFN-V* son proposiciones *verdaderas*. Igualmente se puede demostrar que los esquemas de *LFN-V*, aplicados a proposiciones *verdaderas*, dan proposiciones *verdaderas*. De aquí se sigue que todas las proposiciones derivables de *LFN-V* son *verdaderas*.

SECCIÓN 2.—LOS TEOREMAS DE TARSKI.

187. LOS RESULTADOS DE TARSKI. EL FORMALISMO LFT.

TARSKI ha establecido un teorema de limitación acerca de la propiedad semántica que acabamos de considerar: dado un formalismo *LFT* que responda a determinadas condiciones generales, no es posible representar en este formalismo las propiedades del predicado *Vri* correspondiente. A este enunciado le denominaremos *Teorema de la verdad.*

Por otra parte, TARSKI ha demostrado que es posible obtener, utilizando un método semántico, un resultado que generalice el de GÖDEL. El método utilizado por TARSKI le lleva a considerar clases de proposiciones: este autor establece la existencia de proposiciones indecidibles en el interior de determinadas clases de proposiciones.

Finalmente, ha demostrado que su *Teorema de la verdad* está ligado al de GÖDEL, pues este teorema puede deducirse de su versión propia del Teorema de GÖDEL.

Indicaremos en primer término la manera en que TARSKI ha generalizado el Teorema de GÖDEL y deducido su *Teorema de la verdad* partiendo del anterior. En la Sección 4 expondremos cómo se puede obtener de manera directa el *Teorema de la Verdad.*

Consideremos un formalismo *LFT.* Este formalismo responde a las siguientes condiciones:

1) Está dotado de medios suficientes para formalizar la aritmética ordinaria.

2) Incluye los axiomas de la lógica de proposiciones [13], los axiomas de los cuantificadores [14] y las reglas de derivación ordinarias (reglas de la consecuencia y esquema para el cuantificador de universalización).

3) Incluye la Teoría de Tipos (y, por tanto, los axiomas de reductibilidad y de determinación [15] o axiomas correspondientes a la Teoría de Conjuntos de ZERMELO.

Denominemos a estas tres condiciones 1(187), 2(187) y 3(187).

Consideremos ciertas clases de proposiciones pertenecientes a este formalismo.

Diremos que una clase *Cl* de proposiciones de *LFT* es *coherente* si no contiene simultáneamente una proposición y su negación. Diremos que esta clase es *completa* si, cualquiera que sea la proposición A, la clase *Cl* contiene A o su negación.

Sea *Cl-Pr* la clase de todas las *proposiciones* de *LFT* y *Cl-Dr* la clase de las *proposiciones derivables* de *LFT.* Supongamos que se haya construido un predicado *Vri* de *LFT,* y sea *Cl-Vr* la clase de las proposiciones *ciertas* de *LFT* (es decir, proposiciones que cumplen este predicado).

---

[13] Por ejemplo, los axiomas del § 79, 2. Son posibles otros sistemas de axiomas.

[14] Por ejemplo, los axiomas del § 79, 3. Son posibles otros sistemas de axiomas.

[15] Véase el § 79, 4 y 5.

El predicado *Vri* debe estar construido de tal forma, que la clase *Cl-Vr* responda a las propiedades siguientes:

a) La clase *Cl-Vr* contiene los axiomas de *LFT* y es cerrada respecto a la relación de consecuencia inmediata para *LFT* [16]; por consiguiente, la clase *Cl-Dr* está contenida en la clase *Cl-Vr.*

b) La clase *Cl-Vr* es coherente.

c) La clase *Cl-Vr* es completa.

Al conjunto de estos requisitos impuestos a la definición de *Vri* lo denominaremos condición 4(187).

188. El lema de Tarski.

Tarski obtiene un primer teorema sobre la existencia de clases incompletas, y un segundo teorema que generaliza el de Gödel. El primero no hace intervenir aún la clase *Cl-Vr.* Ambos teoremas están basados en un lema cuya demostración utiliza un procedimiento análogo al de Gödel.

Este lema hace intervenir la noción de clase de proposiciones *representable* en un formalismo.

Sea *Cl* una clase de proposiciones de un cierto formalismo *LF* y sea *A* una proposición cualquiera de *LF* perteneciente a *Cl.* Se dice que la clase *Cl* es *representable* en *LF* si, cualquiera que sea A, existe en *LF* una proposición A_m que representa en *LF* el enunciado metateórico: *La proposición* A *pertenece a la clase Cl* [17].

En el lema de Tarski se considera una determinada clase de proposiciones *Cl-Rp* que se supone *representable* en *LFT.*

Este lema se enuncia como sigue:

(LXIX) *Si el formalismo LFT responde a las condiciones* 1(187), 2(187) y 3(187), *y si la clase Cl-Rp es representable en LFT, LFT contiene una proposición* $\mathfrak{T}$ *tal que la proposición* $(\sim \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{T}_m)$ (donde $\mathfrak{T}_m$ representa en *LFT* el enunciado metateórico: *La proposición* $\mathfrak{T}$ *pertenece a la clase Cl-Rp*) *es derivable en LFT* [18].

Para demostrar este lema comencemos por aritmetizar nuestro sistema *LFT.* Sea entonces *Cl-Rp* una cierta clase de proposiciones de *LFT* representable en este formalismo. Sea A una proposición de *Cl-Rp* y *a* su número-G.

Consideremos el enunciado: A *pertenece a Cl-Rp.*

Podemos expresar este enunciado en forma aritmética utilizando el predicado aritmético *Mem-Rp*: *ser miembro de la clase Cl-Rp.*

Nuestro enunciado puede escribirse: *Mem-Rp a.*

---

[16] Esta relación puede definirse para *LFT* exactamente lo mismo que para *LFG.* Véase a este propósito § 80 y § 81. También se puede decir: la clase *Cl-Vr* es cerrada respecto a la aplicación de las reglas Re_1 y Re_2. (Véase § 122).

[17] O también: *La proposición* A *es miembro de la clase Cl.*

[18] Tarski 4, págs. 370-374. Y Tarski 6. Teorema 2.3.

Como *LFT* permite formalizar la Aritmética, podemos representar en *LFT* este enunciado por medio de una proposición $\mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ N_a$: se trata de la proposición A_m de la que se ha tratado anteriormente, dada aquí en forma explícita.

Consideremos la expresión $\mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ \mathfrak{X}$.

Vamos a transformar esta expresión sirviéndonos de la función abreviada de sustitución *Sbs* [19].

En virtud de nuestras hipótesis sobre *LFT*, esta función, por ser recursiva, es representable en *LFT* mediante una cierta expresión funcional $\mathfrak{Sbs}$. Podemos formar la proposición

(1) $\sim \mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ (\mathfrak{Sbs}\ \mathfrak{X}\ \mathfrak{X})$.

Esta proposición pertenece a *LFT*. Sea r su número-G.

Reemplacemos en 1(188) la variable $\mathfrak{X}$ por la constante N_r, y obtendremos la proposición:

$$\sim \mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_r\ N_r),$$

que es nuestra proposición $\mathfrak{T}$.

Sea t el número-G de esta proposición.

En virtud de las propiedades de la función *Sbs*, tenemos:

$$Sbs\ r\ r = t.$$

En virtud de nuestras hipótesis sobre *LFT*, podremos derivar en *LFT*:

$$\mathfrak{Sbs}\ N_r\ N_r = N_t.$$

Y a continuación:

$$\mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_r\ N_r) \leftrightarrow \mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ N_t$$

(pues *LFT* debe contener los axiomas de igualdad).

La proposición $\mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ N_t$ representa el enunciado: *La proposición* $\mathfrak{T}$ *pertenece a la clase Cl-Rp*, y es, por tanto, la proposición $\mathfrak{T}_m$ del enunciado.

El principio de la doble negación nos da:

$$\sim \sim \mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_r\ N_r) \leftrightarrow \mathfrak{Mem}\text{-}\mathfrak{Rp}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_r\ N_r).$$

Tenemos, por tanto, finalmente:

$$\sim \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{T}_m.$$

Equivalencia que es, pues, perfectamente derivable en *LFT*.

La proposición $\mathfrak{T}$ representa el enunciado: *La proposición cuyo número-G es t no pertenece a la clase Cl-Rp*. Pero t es el número-G de $\mathfrak{T}$. Esta proposición afirma, por consiguiente, de sí misma, que no pertenece a la clase *Cl-Rp*.

De este lema se pueden deducir los dos teoremas que enunciamos a continuación.

189. Existencia de clases incompletas en LFT.

El primero de estos teoremas establece la existencia en *LFT* de clases incompletas.

Se dice que una proposición A es *indecidible en una clase Cl de proposiciones* si esta clase no contiene ni la proposición A ni su negación. Si existe en un sistema dado

[19] Véase § 92.

(al menos) una proposición indecidible en una clase de proposiciones de este sistema, esta clase es incompleta.

(LXX) *Sea un formalismo LFT que responda a las condiciones* 1(187), 2(187) *y* 3(187).

Sea una clase Cl-Ic de proposiciones de LFT que posee las siguientes propiedades:

1) *La definición de Cl-Ic es representable en LFT.*

2) *Cl-Ic contiene la clase Cl-Dr de proposiciones derivables de LFT.*

3) *Cl-Ic es cerrada respecto a la aplicación de la regla de consecuencias* (si *Cl-Ic* contiene a A y (A → B), también contiene a B).

4) *Cl-Ic responde a la siguiente condición de coherencia*:

Si Cl-Ic contiene una proposición A, *no puede contener la proposición* $\sim A_m$, *y si Cl-Ic contiene la negación* $\sim$ A *de una proposición* A, *no puede contener la proposición* A_m.

Existe, pues, una proposición $\mathfrak{T}$ *de LFT que es indecidible en esta clase.*

Dicho de otra forma: esta clase es incompleta [20].

Efectivamente, en virtud del lema, existe una proposición $\mathfrak{T}$ de *LFT* tal que la equivalencia $(\sim \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{T}_m)$ pertenece a la clase *Cl-Dr* (es derivable en *LFT*).

Entonces, en virtud de la hipótesis 2 anterior, esta equivalencia pertenece también a la *Cl-Ic.*

Esta equivalencia se descompone en dos implicaciones:

$$(\sim \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_m) \quad \text{y} \quad (\mathfrak{T}_m \rightarrow \sim \mathfrak{T}).$$

Realizando una contraposición sobre la segunda implicación, obtenemos:

$$(\sim \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_m) \quad \text{y} \quad (\mathfrak{T} \rightarrow \sim \mathfrak{T}_m).$$

Si $\mathfrak{T}$ pertenece a *Cl-Ic*, en virtud de la hipótesis 3, $\sim \mathfrak{T}_m$ pertenece también a *Cl-Ic,* lo que contradice la hipótesis 4.

Y si $\sim \mathfrak{T}$ pertenece a *Cl-Ic,* en virtud de la hipótesis 3, $\sim \mathfrak{T}_m$ pertenece también a *Cl-Ic,* lo que contradice la hipótesis 4.

Así, pues, ni $\mathfrak{T}$ ni $\sim \mathfrak{T}$ pueden pertenecer a *Cl-Ic,* y ésta es una clase incompleta.

190. La generalización semántica del Teorema de Gödel.

El segundo teorema derivado del lema de Tarski es el que generaliza el teorema de Gödel. En el razonamiento interviene la clase *Cl-Vr,* y se supone que la definición de esta clase responde a la condición 4(187). Por otra parte, introduce la noción de clase *definible* en un formalismo

Consideremos un formalismo *LF.*

Se dice que un predicado *P* de *k* argumentos es *definible en una clase Cl* de proposiciones *LF* si existe una expresión predicativa $\mathfrak{P}$ de *LF* dependiente de *k* variables tales que:

[20] Tarski 6. Teorema 3.6.

Si el enunciado *P a b ... k* es cierto, la proposición $\mathfrak{P}\ N_a\ N_b\ \ldots\ N_k$ [21] pertenece a la clase *Cl*;

y si el enunciado *P a b ... k* es falso, la proposición $\sim \mathfrak{P}\ N_a\ N_b\ \ldots N_k$ pertenece a la clase *Cl*.

Se dice que un conjunto o una clase es *definible en la clase Cl* si la propiedad de pertenecer a este conjunto o clase es definible en *Cl*.

Supongamos ahora que se haya podido definir, para este formalismo *LF*, un predicado *Vri* y una clase *Cl-Vr* de tal manera que toda proposición derivable de *LF* pertenezca a *Cl-Vr*. Se dirá que un predicado es *definible en LF* si es definible en la clase *Cl-Vr* así definida.

Y se dirá que un conjunto o clase es *definible en LF* si este conjunto o clase es definible en esta misma clase *Cl-Vr*.

Vamos a considerar, como hicimos en el teorema del parágrafo precedente, una cierta clase de proposiciones, pero imponiéndole condiciones diferentes de las que habíamos impuesto a la clase *Cl-Ic*.

Consideremos una clase *Cl-Df* a la que exigiremos ser *definible en LFT*.

Sea A una proposición cualquiera de *LFT*. Podemos formular como sigue la condición impuesta a *Cl-Df*:

La condición necesaria y suficiente para que A pertenezca a *Cl-Df* es que exista en *LFT* una proposición A_m que represente el enunciado. *La proposición* A *pertenece a la clase Cl-Df*, y que esta proposición A_m pertenezca a la clase *Cl-Vr* [22].

Si A no pertenece a *Cl-Df*, A_m no pertenece a *Cl-Vr*. Y como la clase *Cl-Vr* se supone completa, $\sim A_m$ pertenecerá a *Cl-Vr*.

La condición que deberá satisfacer la clase *Cl-Df* es, pues, más exigente que la condición 1 del teorema LXX (189) [23].

En esta hipótesis de la clase *Cl-Df* es donde aparece la diferencia entre el método semántico y el método sintáctico (para el problema que nos ocupa).

El concepto de *proposición derivable* se reemplaza por el de *proposición verdadera* (sobre el predicado *Vri*, tal como se ha definido para el formalismo estudiado). Y la propiedad establecida en el teorema de GÖDEL [24] se reemplaza por la propiedad *ser definible* de la clase *Cl-Df*.

El lema de GÖDEL hace corresponder a todo enunciado A formado mediante un predicado recursivo *P* [25], una proposición cerrada A* de *LFG* dotada de la siguiente propiedad:

---

[21] Los símbolos N_a, N_b, ..., N_k designan las expresiones de *LF* que corresponden, respectivamente, a los enteros *a, b, ..., k*.

[22] Si *Cl-Df* es definible en *LFT*, se debe dar, en efecto, esta propiedad. Y, recíprocamente, si se da esta propiedad, *Cl-Df* es definible en *LFT*.

[23] Esta condición demanda solamente, en efecto, que, si A es una proposición de *Cl-Ic*, existe en *LFT* una proposición A_m que representa el enunciado: *La proposición* A *pertenece a Cl-Ic*.

[24] Véase § 90.

[25] Más precisamente: formado aplicando un predicado recursivo a números enteros.

Si el enunciado *A* es válido intuitivamente [26], la proposición A* es derivable en *LFG*, y si el enunciado *A* no es válido intuitivamente, la proposición A* es refutable en *LFG*.

La condición *ser definible* impuesta a la clase *Cl-Df* hace corresponder a toda proposición A de *Cl-Df* una proposición A_m de *LFT* dotada de la propiedad siguiente:

Si A pertenece a *Cl-Df*, A_m pertenece a *Cl-Vr*, y si A no pertenece a *Cl-Df*, $\sim A_m$ pertenece a *Cl-Vr*.

Por otra parte, vamos a imponer a la clase *Cl-Df* una condición de coherencia, exigiéndole que pertenezca a la clase *Cl-Vr*, es decir, que solamente contenga proposiciones *verdaderas* [27].

La generalización semántica del teorema de GÖDEL se presenta, por consiguiente, como sigue:

(LXXI) *Sea un formalismo LFT que responda a las condiciones* 1(187), 2(187), 3(187) y 4(187) [28].

Sea, por otra parte, una clase *Cl-Df* de proposiciones *LFT* dotada de las proposiciones siguientes:

1) Es definible en *LFT*.
2) Pertenece a la clase *Cl-Vr* de *LFT*.

Hay entonces una proposición $\mathfrak{T}$ *de LFT que es indecidible en la clase Cl-Df.*

Dicho de otra forma: la clase *Cl-Df* es incompleta [29].

En efecto, existe en *LFT*, en virtud del lema LXIX (188), una proposición $\mathfrak{T}$ tal que la equivalencia $(\sim \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{T}_m)$ es derivable en *LFT*.

Como la demostración del teorema LXX (189), esta equivalencia da dos implicaciones

(1) $\quad \sim \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_m$

y (2) $\quad \mathfrak{T} \rightarrow \sim \mathfrak{T}_m$.

Estas dos implicaciones son derivables en *LFT* y pertenecen, por tanto, a *Cl-Dr*.

Demostremos, primero, que $\mathfrak{T}$ pertenece a *Cl-Vr*.

Supongamos que $\mathfrak{T}$ no pertenece a *Cl-Vr*.

Entonces, como *Cl-Vr* es una clase completa [30], $\sim \mathfrak{T}$ pertenece a *Cl-Vr*. Como la implicación 1(190) pertenece a *Cl-Dr*, pertenece también a *Cl-Vr* [31].

Como la clase *Cl-Vr* es cerrada respecto a la relación de consecuencia inmediata para *LFT* [32] y contiene $\sim \mathfrak{T}$, también contiene a $\mathfrak{T}_m$.

---

[26] Es decir: si el predicado *P* se verifica en los enteros a los que es aplicado.

[27] Esta condición de coherencia reemplaza, en el presente Teorema, a la condición más complicada de coherencia del Teorema precedente: condición 4 del Teorema LXX (189).

[28] Esta última condición se refiere a la definición del predicado *Vri*.

[29] TARSKI 6, Teorema 6.2. Véase también TARSKI 4, pág. 370.

[30] Cláusula *c* de la condición 4 (187).

[31] En virtud de la cláusula *a* de la condición 4 (187). *Cl-Dr* pertenece, en efecto, a *Cl-Vr*.

[32] Cláusula *a* de la condición 4 (187).

Como la clase *Cl-Df* es definible en *LFT*, si $\mathfrak{T}_m$ pertenece a *Cl-Vr*, $\mathfrak{T}$ debe pertenecer a *Cl-Df*.

Pero, en tal caso, como *Cl-Df* pertenece a *Cl-Vr* (por hipótesis), $\mathfrak{T}$ debe pertenecer también a *Cl-Vr*, contrariamente a lo que se ha supuesto.

Nuestra hipótesis nos ha llevado a una contradicción, por lo que debemos admitir que $\mathfrak{T}$ pertenece a *Cl-Vr*.

A partir de ahora, podemos demostrar que $\mathfrak{T}$ es indecidible en *Cl-Df*, es decir, que *Cl-Df* no contiene ni $\mathfrak{T}$ ni $\sim \mathfrak{T}$.

Cl-Df no puede contener a $\sim \mathfrak{T}$, pues, si así fuese, *Cl-Vr* contendría igualmente a $\sim \mathfrak{T}$, lo que es imposible, puesto que *Cl-Vr* es una clase coherente [33] y contiene a $\mathfrak{T}$.

Por otra parte, la implicación 2(190) permite afirmar que $\sim \mathfrak{T}_m$ pertenece a *Cl-Vr* (pues *Cl-Vr* contiene a $\mathfrak{T}$ y es cerrada respecto a la relación de consecuencia inmediata para *LFT*). Como *Cl-Vr* es una clase coherente, $\mathfrak{T}_m$ no puede, por tanto, pertenecer a *Cl-Vr*. Y como *Cl-Df* es definible en *LFT*, $\mathfrak{T}$ no puede, pues, pertenecer a *Cl-Df*.

Con lo que el teorema queda demostrado.

Este teorema se aplica en particular a la clase *Cl-Dr*. Esta clase pertenece, en efecto, a la clase *Cl-Vr* (en virtud de la condición 4(187) que debe satisfacer *Cl-Vr*) y se puede demostrar fácilmente que es definible.

Con ello, nos encontramos con el teorema de GÖDEL:

(LXXII) *Existe una proposición* $\mathfrak{G}_T$ *tal, que ni* $\mathfrak{G}_T$ *ni* $\sim \mathfrak{G}_T$ *pertenecen a Cl-Dr.*

En otros términos: existe una proposición $\mathfrak{G}_T$ que no es ni derivable ni refutable en *LFT*.

La proposición $\mathfrak{T}$ expresa por sí misma que no pertenece a la clase *Cl-Df*, y la proposición $\mathfrak{G}_T$ expresa igualmente que no pertenece a la clase *Cl-Dr*. Por consiguiente, expresa que no es derivable: encontramos, por tanto, una proposición de la misma forma que la de GÖDEL.

El resultado de TARSKI es más general que el de GÖDEL. Su afirmación fundamental es que toda clase definible que no contenga más que proposiciones ciertas es incompleta. TARSKI demuestra, además, que la proposición indecidible en cuestión es una proposición *verdadera* (pertenece a *Cl-Vr*).

191. EXTENSIÓN DE ESTA GENERALIZACIÓN A LÓGICAS NO-CONSTRUCTIVAS.

Este resultado puede extenderse a lógicas no-constructivas. De manera general, para obtener la extensión de la fórmula de TARSKI del Teorema de GÖDEL a un sistema cualquiera *LF* que responda a las condiciones 1(187), 2(187) y 3(187), basta

[33] Cláusula *b* de la condición 4 (187).

con modificar de manera conveniente la condición 4(187) relativa a la clase *Cl-Vr*: a esta clase se le impone también la condición de ser coherente y completa (cláusulas *b* y *c*, pero se modificará la cláusula, imponiendo la condición de que la clase *Cl-Vr* sea cerrada respecto a la aplicación de todas las reglas de derivación de *LF* [34].

En particular, la forma de TARSKI del Teorema de GÖDEL puede ser extendida a un sistema que contiene la regla *Re-C* [35].

En tal caso, tendremos el Teorema siguiente [36]:

(LXXIII) *Sea LFT-Ω un formalismo obtenido añadiendo al formalismo LFT (del* 190) *la regla Re-C* [37].

Sea Cl-D Ω la mínima clase de proposiciones de LFT-Ω que contiene Cl-Dr y que es cerrada respecto a la aplicación de la regla Re-C [38].

Supongamos que se haya definido para este sistema LFT-Ω un predicado Vri de tal manera que la clase Cl-Vr de proposiciones verdaderas de LFT-Ω (respecto al predicado Vri) sea coherente y completa y que sea cerrada respecto a la aplicación de las reglas Re_1, Re_2 *y Re-C.*

Si se cumplen estas condiciones, existe una proposición de LFT-Ω que pertenece a Cl-Vr y que es indecidible en Cl-D Ω.

Así se formula el Teorema de ROSSER para el sistema *LFG-Ω* [39].

192. AMPLIACIONES SUCESIVAS DEL SISTEMA LFT.

El sistema *LFT* puede ser ampliado, obteniéndose un sistema en el cual la proposición indecidible $\mathfrak{V}_T$ del § 190 se haga decidible.

Dado un sistema LF_0 y una definición del predicado semántico *Vri* para este sistema, podemos proponernos la construcción de un sistema LF_1 dentro del cual este predicado será representable mediante una cierta expresión predicativa $\mathfrak{Vri}$ (dependiente de una sola variable). Supongamos que se haya podido construir tal sistema. En tal caso tendríamos la siguiente propiedad: si A es una proposición de *LF* y *a* su número-G y si tenemos el enunciado *Vri* (en otros términos, si A pertenece a la clase *Cl-Vr* de proposiciones *verdaderas* de *LF* respecto al predicado *Vri*), la proposición $\mathfrak{Vri}\ N_a$ es derivable en LF_1.

TARSKI demuestra que sí es posible construir para el sistema *LFT* del § 187 un predicado *Vri* que cumpla el teorema metateórico siguiente:

---

[34] Lo que significa: si la clase *Cl-Vr* contiene un conjunto *En* de proposiciones al cual se puede aplicar una de las reglas de derivación de *LF*, debe contener también la proposición que se puede derivar de este conjunto *En* por medio de esta regla.

[35] Véase § 122.

[36] Véase TARSKI 6, § 4.

[37] *LFT-Ω* satisface, pues, las condiciones 1 (187), 2 (187) y 3 (187).

[38] Sobre el sentido exacto de esta expresión, véase § 122. Se ve que la clase *Cl-D* corresponde a la clase de proposiciones derivables del sistema *LFG-Ω* definido en el § 122.

[39] Teorema XVI (123).

[40] Respecto al predicado *Vri* tal como ha sido definido para *LFT*.

(LXXIV) *La condición necesaria y suficiente para que una proposición* A *de LFT sea derivable en LFT, es que pertenezca a Cl-Vr* [41].

(Estando la clase *Cl-Vr* definida por medio del predicado *Vri.*)

Si el predicado *Vri* es representable en un sistema LFT_1, se podrá representar este teorema en LFT_1 por medio de la equivalencia:

$$\mathfrak{Vrí}\ N_a \leftrightarrow A.$$

También es posible, sin presuponer nada a propósito del predicado *Vri* y, por tanto, sin disponer de una definición explícita de este predicado, precisar en qué condiciones se puede obtener una expresión formalizada de la noción de verdad, respecto a un formalismo dado.

Para ello conviene inspirarse en la propiedad que acabamos de describir.

Dado un sistema LF_0 y un predicado *Vri* relativo a este sistema, se dice que la teoría del predicado *Vri* es *formalizable en un sistema* LF_1 si este predicado es representable en LF_1 mediante una expresión predicativa $\mathfrak{Vrí}$ que depende de una variable, y si, para toda proposición A de LF_0, siendo *a* el número-G de A, la equivalencia

$$\mathfrak{Vrí}\ N_a \leftrightarrow A$$ [42].

es derivable en LF_1.

Para obtener un sistema en el que la proposición $\mathfrak{V}_T$ sea decidible, basta construir un sistema LFT_1 en el cual la teoría del predicado *Vri* (relativo a *LFT*) sea formalizable.

Si el formalismo *LFT* incluye la teoría de tipos, se puede obtener un sistema que reúna tales condiciones introduciendo en éste variables de un nivel más elevado y adaptando los axiomas y reglas de derivación de *LFT* a esta extensión de las variables. Si el formalismo *LFT* corresponde a una axiomatización de la teoría de conjuntos, se puede obtener un sistema como el descrito añadiendo a *LFT* un axioma cuyo sentido sea el siguiente: existe un conjunto *En-LFT* cuyos elementos proporcionan un modelo del sistema *LFT.*

Si se dispone de un tal sistema LFT_1 es fácil percibir que $\mathfrak{V}_T$ es derivable en este sistema.

En virtud de la demostración del § 190, la proposición $\mathfrak{V}_T$ pertenece a *Cl-Vr.*

Por tanto, si *i* es su número-G, se tiene: *Vri i.* Y puesto que la teoría de *Vri* es formalizable en LFT_1, existe en LFT_1 una expresión predicativa $\mathfrak{Vrí}$ tal que las proposiciones

$$\mathfrak{Vrí}\ N_i$$
$$\text{y } \mathfrak{Vrí}\ N_i \leftrightarrow \mathfrak{V}_T$$

son ambas derivables en LFT_1 [43].

---

[41] TARSKI 6. Teorema 5.6.

[42] El símobolo N_a es el símbolo de *LF* que corresponde al entero *a.*

[43] $\mathfrak{Vrí}\ N_i$ es derivable en LFT_1, pues *Vri* es representable en LFT_1.

La proposición $\mathfrak{V}_T$ es, pues, derivable en LFT_1 (por una simple aplicación de la regla de la consecuencia).

Pero razonando igualmente que para *LFT*, se puede establecer de nuevo la existencia de una proposición indecidible (al menos) para LFT_1. Y nuevamente, si se construye un sistema ampliado LFT_2 en el cual la teoría del predicado *Vri* relativo a LFT_1 es formalizable, esta proposición, indecidible en LFT_1, se hace derivable en LFT_2.

El problema de saber si existe finalmente un sistema en el cual todas las proposiciones son decidibles no está aún resuelto. No obstante, se puede llevar bastante lejos esta construcción en lo transfinito (es decir, construir sistemas LFT_ν de índice transfinito muy alejado en la segunda clave de ordinales) sin encontrar un sistema completo.

193. El Teorema de la verdad.

Dado un sistema LF_0 y otro LF_1 en el cual la teoría del predicado *Vri* relativo a LF_0 es formalizable, se puede suscitar la cuestión de si LF_1 debe necesariamente ser distinto de LF_0. En particular, podemos preguntarnos si LFT_1 es necesariamente distinto de *LFT*, LFT_2 de LFT_1, y así sucesivamente.

Es evidente que si se pudiese hallar un sistema *LF* que respondiese a las condiciones 1(187), 2(187) y 3(187), y tal que la teoría del predicado *Vri* relativo a *LF* sea formalizable en el mismo sistema *LF*, en virtud del parágrafo precedente este sistema sería completo, y el Teorema de Gödel no sería aplicable.

Si la demostración del § 190 permanece válida, de ella se sigue que no es posible encontrar un sistema *LF* dotado de tal propiedad.

Este es precisamente el objeto del teorema *sobre la verdad.* Tarski ha demostrado que este teorema se deduce de la generalización semántica del Teorema de Gödel.

El *Teorema de la verdad* puede enunciarse como sigue:

(LXXV) *Dado un formalismo LFT que responda a las condiciones* 1(187), 2(187), 3(187) *y* 4(187), *la teoría del predicado Vri (respecto al sistema LFT) no es formalizable en el mismo sistema LFT* [44].

En efecto, supongamos que la teoría del predicado *Vri* sea formalizable en *LFT*.

Entonces existirá en *LFT* una expresión predicativa $\mathfrak{Vri}$ tal que, para toda proposición A de *LFT*, siendo *a* el número-G de A, la equivalencia

$$\mathfrak{Vri}\ N_a \dashv\vdash A$$

es derivable en *LFT*.

Se puede demostrar que, en tales condiciones, la clase *Cl-Vr* de las proposiciones *verdaderas* de *LFT* (respecto al predicado *Vri*) posee exactamente las mismas propiedades que la clase *Cl-Df* del § 190.

[44] Tarski 6, final del § 6. Véase también Tarski 4, pág. 370.

En efecto, sea A una proposición cualquiera de *LFT*.

La equivalencia anterior proporciona dos implicaciones:

(1) $A \rightarrow \mathfrak{Vri}\ N_a$

y (2) $\mathfrak{Vri}\ N_a \rightarrow A$.

Si *A* pertenece a *Cl-Vr*, $\mathfrak{Vri}\ N_a$ pertenece también a *Cl-Vr*, pues la clase *Cl-Vr* es cerrada respecto a la aplicación de la regla de la consecuencia [45]. Por otra parte, si A no pertenece a *Cl-Vr*, $\mathfrak{Vri}\ N_a$ debe pertenecer a *Cl-Vr*, pues si $\sim \mathfrak{Vri}\ N_a$ no pertenece a *Cl-Vr*, como *Cl-Vr* es una clase completa, $\mathfrak{Vri}\ N_a$ debe pertenecer también a *Cl-Vr*, y terminaríamos en una contradicción.

Ahora bien, la proposición $\mathfrak{Vri}\ N_a$ es la proposición de *LFT* que representa el enunciado: *La proposición* A *pertenece a la clase Cl-Vr.* Por tanto, corresponde a la proposición A_m del § 190.

Así, la clase *Cl-Vr* es definible en *LFT*, y como evidentemente está contenida en sí misma, verifica las propiedades de la clase *Cl-Df* del § 190.

Como consecuencia de esto, en virtud del Teorema LXXI (190), existe al menos una proporción indecidible en *Cl-Vr.*

Pero esto es imposible, puesto que, por hipótesis, *Cl-Vr* es una clase completa [46].

Por tanto, nuestro supuesto de partida es falso y la teoría del predicado *Vri* no es formalizable en *LFT.*

Este teorema nos pone en presencia de un hecho de limitación de tipo semántico, correspondiente a las posibilidades de expresión que posee un sistema formal. (Se trata de la posibilidad de expresar en un sistema formal la noción de verdad correspondiente a este sistema).

Sección 3.—El teorema de Mostowski. Comparación entre las diferentes formas del teorema de Gödel.

194. Formulación del Teorema de Gödel en términos de clases de proposiciones.

Existe otra forma semántica del Teorema de Gödel, más general que la de Tarski, que ha sido formulada por Mostowski.

Antes de exponer los resultados de Mostowski, y a fin de establecer una comparación entre los principales teoremas relativos a la existencia de clases incompletas de proposiciones, debemos indicar cómo puede formularse el Teorema de Gödel en

[45] Cláusula *a* de la condición 4 (187).

[46] Cláusula *c* de la condición 4 (187).

términos de clases de proposiciones. (Esta formulación es, por lo demás, más parecida a la forma original del Teorema de GÖDEL [47] que el enunciado VI(91)).

Observemos, ante todo, que el sistema *LFG* de GÖDEL responde a las condiciones 1(187), 2(187) y 3(187) impuestas al sistema *LFT* de los Teoremas de TARSKI.

Igual que en el caso de *LFT*, podemos considerar ciertas clases de proposiciones de *LFG*: la clase *Cl-Pr* de las *proposiciones*, la clase *Cl-Dr* de las proposiciones *derivables*, y —en la medida en que hayamos previamente definido un predicado *Vri* para *LFG*— la clase *Cl-Vr* de *proposiciones verdaderas* [48].

Podemos reconsiderar las definiciones dadas en el § 187 para las nociones de *clase coherente* y de *clase completa* de proposiciones y la definición dada en el § 189 para la noción de *proposición indecidible en una clase de proposiciones.*

El enunciado VI (91) afirmaba la existencia, en *LFG*, de una proposición indecidible en *LFG*. Decir que una proposición es *indecidible en un sistema* dado [49] equivale a decir que es *indecidible en la clase de las proposiciones derivables* de este sistema.

Antes de ocuparnos de nuestro enunciado, debemos introducir dos nuevas nociones metateóricas.

Diremos que una clase de proposiciones de un sistema *LF* es *cerrada* si contiene todos los axiomas de *LF* y si es cerrada respecto a la aplicación de todas las reglas de derivación de *LF* [50]. Una clase así puede contener, además de los axiomas y proposiciones derivables de *LF*, un cierto conjunto *En* de proposiciones no-derivables de *LF* que se pueden considerar como proposiciones iniciales dentro de las derivaciones, al mismo título que los axiomas: por consiguiente, contiene todas las proposiciones que se puede derivar, aplicando las reglas de derivación de *LF*, del conjunto formado por todos los axiomas de *LF* y por el conjunto *En.*

En el caso en que el conjunto *En* sea vacío, se obtiene simplemente la clase de proposiciones derivables de *LF.*

Diremos que una clase *Cl* de proposiciones de un sistema *LF* [51] es *ω-coherente* si no existe en *LF* ningún predicado Λ^2 de un argumento [52] tal que se tenga simultáneamente:

1) La clase *Cl* contiene todas las proposiciones $\Lambda^2\ \kappa$ formadas aplicando Λ^2 a una constante individual [53].

2) La clase *Cl* contiene una proposición $\sim (\Theta)\ \Lambda^2\ (\Theta)$ [54].

---

[47] Véase NOTA I, § 238, 3.1.

[48] Como *LFG* es del mismo tipo que *LFT* y como, por otra parte, no existirá ningún riesgo de confusión, utilizaremos las mismas notaciones que en el § 187 para no multiplicar inútilmente las notaciones.

[49] En el sentido del § 17.

[50] Véase nota 34 del capítulo presente.

En el caso de *LFG* esto se reduce a decir: si es cerrada respecto a la relación de consecuencia inmediata (para *LFG*).

[51] Que se supone satisface las condiciones 1(187) y 2(187).

[52] Véase CAPITULO II, nota 6.

[53] Véase CAPITULO II, nota 7.

[54] Véase CAPITULO II, nota 8.

Se ve que la condición necesaria y suficiente para que un sistema *LF* sea ω-coherente, es que la clase de las proposiciones derivables de *LF* sea ω-coherente.

Utilizando esta observación, podremos explicitar la condición 1 del § 107, diciendo que la clase de las proposiciones derivables de *FLG* debe ser ω-coherente. Por otra parte, la condición 2 del § 107 viene a exigir que la clase de los axiomas de *LFG* sea recursiva y que la relación de consecuencia inmediata, en *LFG,* sea representable por medio de un predicado recursivo primitivo. Si un sistema responde a esta condición, la clase de las proposiciones derivables de este sistema forma una clase recursivamente enumerable. (Una clase recursivamente enumerable puede definirse mediante una expresión de la forma $\hat{X}$ [(E*Y*) *P X Y*], donde *P* es un predicado recursivo general. Ahora bien, la propiedad, para una proposición de *LFG,* de ser derivable, puede ser representada por la expresión (E*X*) *Fdr X Y,* donde *Fdr* es un predicado recursivo primitivo y, por consiguiente, forzosamente general. La clase de las proposiciones derivables de *LFG* puede definirse, pues, mediante la expresión $\hat{Y}$ [(E*X*) *Fdr X Y*] (y, por este motivo, será numerable). Pero como se ha visto [55], la condición 2 del § 107 puede ser ampliada. El Teorema de GÖDEL continúa siendo válido con la única condición de que la clase de axiomas sea recursivamente enumerable y que la condición de consecuencia inmediata sea representable mediante un predicado recursivo general. Si reemplazamos la condición 2 del § 107 por esta condición más general, la clase de las proposiciones derivables de *LFG* continúa siendo recursivamente enumerable [56].

Si utilizamos los conceptos de *clase recursivamente enumerable,* de *clase ω-coherente* y de *clase completa* de proposiciones, podremos enunciar como sigue el Teorema de GÖDEL.

(LXXVI) *Si la clase de las proposiciones derivables de LFG es recursivamente enumerable y ω-coherente, no es completa.*

Esta manera de formular el teorema introduce implícitamente la generalización que acabamos de describir sobre los axiomas y las reglas de derivación, puesto que la condición de enumerabilidad recursiva es compatible con esta generalización.

En lugar de considerar simplemente la clase de las proposiciones derivables, podemos considerar una clase cerrada cualquiera de proposiciones *LFG,* con tal de que sea recursivamente enumerable. Y podemos reemplazar la propiedad *ser derivable* [57] por la propiedad *ser derivable en una clase cerrada de proposiciones de LFG.* Se dirá que una proposición es *derivable en una clase cerrada de proposiciones de LFG* si pertenece a esta clase. Si esta clase lleva un conjunto *En* de proposiciones no-derivables (a partir de los axiomas), una proposición A es derivable en esta clase si se la puede derivar de los axiomas y del conjunto *En* mediante unas reglas de derivación de *LFG.* Y para que esta clase sea recursivamente enumerable basta que

[55] Véase en el § 116 de la discusión de las hipótesis relativas a los axiomas y a las reglas de derivación.

[56] Véase § 116, nota (25).

[57] Que significa de manera explícita: *ser derivable a partir de los axiomas de LFG.*

la clase de proposiciones formadas por el conjunto *En* y los axiomas de *LFG* sea recursivamente enumerable y que la relación de consecuencia inmediata, en *LFG*, sea representable por medio de un predicado recursivo general. Si previamente se sabe que la clase da los axiomas de *LFG* es recursivamente enumerable, basta con exigir que el conjunto *En* lo sea, pues la unión de dos clases recursivamente enumerables es recursivamente enumerable. Para una proposición, la propiedad de ser derivable en una clase recursivamente enumerable podrá representarse mediante una expresión análoga a la que representa la propiedad, para una proposición, de ser derivable en un sistema cuya clase de proposiciones derivables es recursivamente enumerable. Y, por tanto, podremos introducir fácilmente en la demostración del Teorema de GÖDEL una modificación análoga a la utilizada por ROSSER en la demostración de su Primer Teorema, de manera que esto no se aplica ya solamente a la clase de proposiciones derivables, sino a una clase cerrada recursivamente enumerable cualquiera.

Así, pues, se puede dar al Teorema de GÖDEL la forma siguiente:

(LXXVII) *Dada una clase cerrada recursivamente enumerable y ω-coherente de proposiciones de LFG, es posible construir una proposición* $\mathfrak{G}^*$ *que sea indecidible en esta clase.*

O también:

(LXXVIII) *Ninguna clase cerrada recursivamente enumerable y ω-coherente de proposiciones de LFG es completa.*

Este último enunciado formula de manera explícita las condiciones impuestas a las clases de proposiciones consideradas.

Como hemos visto, estas condiciones extienden a clases cualesquiera las condiciones 1 y 2 del § 107 relativas a la clase de las proposiciones derivables, generalizando, además, la condición 2. La condición 3 del § 107 se cumple ciertamente para todo sistema que responda a las condiciones 1(187), 2(187) y 3(187). Nuestro enunciado vale también, por consiguiente, para el sistema *LFT* de los Teoremas de TARSKI. Por consiguiente, podemos formular el siguiente enunciado:

(LXXIX) *Ninguna clase cerrada, recursivamente enumerable y ω-coherente de proposiciones de LFT es completa.*

195. LA FORMA DE MOSTOWSKI DEL TEOREMA DE GÖDEL.

MOSTOWSKI propone generalizar este enunciado LXXIX (194) reemplazando la propiedad *recursivamente enumerable* por la propiedad *definible.*

Si una clase *Cl* de proposiciones es recursivamente enumerable, existe una función recursiva *F* que enumera las proposiciones de esta clase. Esta función es análoga a la *Enm-R* que interviene en la demostración del primer Teorema de ROSSER [58].

[58] Véase § 116. La función *F* de que aquí se trata juega, respecto a la clase considerada, el mismo papel que la función *Enm-R* respecto a la clase de las proposiciones derivables de *LFG-R*.

La propiedad, para una proposición, de ser derivable en la clase *Cl*, puede ser representada por un enunciado de la forma (EX) ($FX = Y$). Introduciendo en la demostración del Teorema de GÖDEL modificaciones análogas a las que han sido introducidas por la demostración del Primer Teorema de ROSSER, se puede hacer corresponder a todo enunciado de este tipo una proposición de *LFT* que es derivable o refutable según que el enunciado en cuestión sea verdadero o no. Así, la pertenencia de una proposición de *LFT* a una clase *recursivamente enumerable* puede representarse en *LFT* por una proposición perteneciente a *Cl-Vr*. Si suponemos que la definición de *Vri* responde a la condición 4(187), la clase *Cl-Dr* está contenida en la clase *Cl-Vr*. La condición propuesta por MOSTOWSKI es, pues, más general que la condición de enumerabilidad recursiva.

La forma de MOSTOWSKI del Teorema de GÖDEL se presenta como sigue:

(LXXX) *Ninguna clase cerrada, definible y ω-coherente de proposiciones de LFT es completa*[59].

196. LOS LEMAS DE MOSTOWSKI.

La demostración de este teorema utiliza dos lemas, debidos también a MOSTOWSKI. Consideremos un formalismo *LF*. Se dice que una función *F* (de *k* argumentos) es *definible en una clase Cl de proposiciones de LF* si existe en *LF* una expresión funcional $\mathfrak{F}$ (dependiente de *k* variables) tal que, si $F\,a\,b\,\ldots\,k = m$, entonces la proposición ($\mathfrak{F}\,N_a, N_b \ldots N_k = N_m$) pertenece a la clase *Cl*[59].

Primer lema de MOSTOWSKI[60]:

(LXXXI) *Sea una clase cerrada y coherente Cl de proposiciones de LFT, y sea P un predicado de n argumentos definible en esta clase. Si las n funciones Min* X_i [$P\,X_1\,X_2 \ldots X_i \ldots X_n$] ($1 \leqq i \leqq n$) *son también definibles en Cl, entonces todo predicado definible en LFT es definible en Cl.*

Segundo lema de MOSTOWSKI[61]:

(LXXXII) *Ninguna clase cerrada y coherente de proposiciones de LFT es definible dentro de sí misma*[62].

Este segundo lema es consecuencia inmediata del lema de TARSKI [Lema LXIX (188)].

Sea *Cl* una clase cerrada y coherente de proposiciones de *LFT*. Supongamos que esta clase sea definible en sí misma. Sea A una proposición de *Cl* y A_m la proposición de *LFT* que representa el enunciado: *La proposición* A *pertenece a la clase Cl*. Si

[59] El formalismo *LF* debe contener, evidentemente, constantes individuales correspondientes a los enteros y una constante predicativa correspondiente a la igualdad.

[60] MOSTOWSKI 9, pág. 82, Cap. V, Sec. 4, Teorema 1.

[61] MOSTOWSKI 9, pág. 88, Cap. VI, Sec. 1, Teorema 1.

[62] Sobre el sentido de la expresión, véase § 190.

la clase *Cl* es definible en sí misma, debe contener a la proposición A_m al mismo tiempo que la proposición A.

Por otra parte, toda clase definible en una clase cualquiera de *LFT* está ciertamente representable en *LFT*. En virtud del lema de TARSKI [63], existe, pues, una proposición $\mathfrak{T}$ de *LFT* tal que la equivalencia $(\sim \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{T}_m)$ (donde $\mathfrak{T}_m$ representa el enunciado: *La proposición* $\mathfrak{T}$ *pertenece a la clase Cl*) es derivable en *LFT*.

Esta equivalencia origina las dos implicaciones:

$$(\mathfrak{T}_m \rightarrow \sim \mathfrak{T}) \text{ y } (\sim \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_m).$$

Realizando una contraposición sobre la segunda implicación se obtiene:

(1) $\quad \mathfrak{T}_m \rightarrow \sim \mathfrak{T}$

y (2) $\quad \sim \mathfrak{T}_m \rightarrow \mathfrak{T}$

Si la clase *Cl* es definible en sí misma, y si contiene a $\mathfrak{T}$, también debe contener a $\mathfrak{T}_m$.

Pero como esta clase es cerrada debe contener todas las proposiciones derivables de *LFT* y en particular la implicación 1(196). También debe contener la proposición $\sim \mathfrak{T}$, lo que es imposible, al ser el sistema coherente.

Por otra parte, si la clase *Cl* es definible en sí misma, y si no contiene a $\mathfrak{T}$, entonces debe contener al $\sim \mathfrak{T}_m$.

Como es cerrada debe contener la implicación 2(196), que es derivable en *LFT*, y, por consiguiente, debe contener también la proposición $\mathfrak{T}$, contrariamente a lo que acabamos de suponer.

En cualquiera de los casos se llega a una contradicción. Por consiguiente, la clase *Cl* no puede ser definible en sí misma.

197. DEMOSTRACIÓN DE LA FORMA DE MOSTOWSKI DEL TEOREMA DE GÖDEL.

Ahora nos ocuparemos de la demostración de la forma de MOSTOWSKI del Teorema de GÖDEL.

Sea *Cl* una clase cerrada, definible y ω-coherente de proposiciones de *LFT*. Se puede demostrar fácilmente que, al ser ω-coherente, es también coherente.

En virtud del segundo lema de MOSTOWSKI, esta clase no es definible en sí misma. Existe al menos un predicado que es definible en *LFT* sin ser definible en *Cl*: el predicado que expresa la propiedad de pertenecer a la clase *Cl*.

Como consecuencia de esto, en virtud del primer lema de MOSTOWSKI, debe existir un cierto predicado *P* de *n* argumentos, definible en *Cl*, y un cierto índice *i* tal que la función $F = Min\ X_i\ [P\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_i\ \ldots\ X_n]$ no es definible en *Cl*. (En caso contrario, todo predicado definible en *LFT* sería definible en *Cl*).

[63] Véase § 188.

Sea $\mathfrak{B}$ la expresión predicativa que representa el predicado P en *LFT* y sea $\mathfrak{F}$ la expresión funcional que representa F en *LFT*.

Como F no es definible en *Cl*, existen enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tales que si

$$F\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1} = b$$ [64]

la proposición

$$\mathfrak{F}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{n-1}} = N_b$$

no pertenece a la clase *Cl*.

Podemos afirmar, en tal caso, que todos los enunciados

$$\sim P\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{i-1}\ \alpha\ a_{i+1}\ \ldots\ a_{n-1}$$

(donde α puede ser reemplazado por los enteros 1, 2, 3, ...)

son verdaderos.

En efecto. Supongamos que no sea así. Y sea b el menor entero para el cual el enunciado

$$\sim P\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{i-1}\ b\ a_{i+1}\ \ldots\ a_{n-1}$$

es falso.

Entonces tendremos:

$$F\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1} = b.$$

Y las b proposiciones

$$\sim \mathfrak{P}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{i-1}}\ \kappa\ N_{a_{i+1}}\ \ldots\ N_{a_{n-1}}$$

(donde κ puede ser reemplazado sucesivamente por las constantes $N_1, N_2, \ldots, N_{b-1}$)

y $$\mathfrak{P}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{i-1}}\ N_b\ N_{a_{i+1}}\ \ldots\ N_{a_{n-1}}$$

pertenecerán a *Cl*, puesto que P es definible en *Cl*.

Se puede demostrar fácilmente que, en este caso, la proposición

$$\mathfrak{F}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{n-1}} = N_b$$

también pertenecerá a *Cl*, lo que está en contradicción con lo anteriormente establecido.

Nuestra suposición es, pues, falsa y todos los enunciados

$$\sim P\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{i-1}\ \alpha\ a_{i+1}\ \ldots\ a_{n-1}$$

son verdaderos.

Como P es definible en *Cl*, todas las proposiciones

$$\sim \mathfrak{B}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{i-1}}\ \kappa\ N_{a_{i+1}}\ \ldots\ N_{a_{n-1}}$$

(donde κ puede ser reemplazado por las constantes $N_1, N_2, \ldots$) pertenecen a *Cl*.

Por tanto, como la clase *Cl* es ω-coherente, no puede contener la proposición

$$\sim (\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{P}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{i-1}}\ \mathfrak{X}\ N_{a_{i+1}}\ \ldots\ N_{a_{n-1}}$$

o (3) $$(E\mathfrak{X})\ \mathfrak{P}\ N_{a1}\ N_{a2}\ \ldots\ N_{a_{i-1}}\ \mathfrak{X}\ N_{a_{i+1}}\ \ldots\ N_{a_{n-1}}.$$

[64] El entero b es, pues, el menor entero para que el enunciado $P\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_{i-1}\ b\ a_{1+1}\ \ldots\ a_{n-1}$ se cumple.

Por otra parte, la negación de esta última proposición,

$$(\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{P}\, N_{a_1} N_{a_2} \ldots N_{a_{i-1}} \mathfrak{X}\, N_{a_{i+1}} \ldots N_{a_{n-1}},$$

ya no puede pertenecer a *Cl.*

En efecto, se puede demostrar que si perteneciese, la proposición

$$\mathfrak{F}\, N_{a_1} N_{a_2} \ldots N_{a_{n-1}} = N_b$$

también pertenecería a *Cl,* lo que, como hemos visto, no es posible.

La proposición 3(197) es, pues, indecidible en la clase *Cl,* y ésta es incompleta.

198. Las diferentes formas del Teorema de Gödel. Comparación de estas formas entre sí.

En relación con el Teorema de Rosser [65] se pueden desarrollar consideraciones análogas a las que han sido propuestas para el Teorema de Gödel en el § 194.

Entonces se obtiene la siguiente presentación para este Teorema:

(LXXXIII) *Ninguna clase cerrada, recursivamente enumerable y coherente de proposiciones de LFT es completa.*

Tenemos, en fin, cuatro teoremas que afirman la existencia de clases de proposiciones incompletas en ciertos formalismos. Estos cuatro teoremas pueden ser considerados como formas diferentes del Teorema de Gödel.

Cada una de estas formas se refiere a un formalismo *LFT* que responde a las condiciones 1(187), 2(187) y 3(187).

1. Forma de Gödel:

(LXXIX) *Ninguna clase cerrada, recursivamente enumerable y ω-coherente de proposiciones LFT es completa.*

2. Forma de Rosser:

(LXXXIII) Ninguna clase cerrada, recursivamente enumerable y coherente de proposiciones de *LFT* es completa.

3. Forma de Tarski:

(LXXXIV) *Ninguna clase definible de proposiciones de LFT (cerrada o no) perteneciente a la clase Cl-Vr es completa* [66].

4. Forma de Mostowski:

(LXXX) *Ninguna clase cerrada, definible y ω-coherente de proposiciones de LFT es completa.*

---

[65] Véase § 117.

[66] Esta forma del Teorema de Gödel supone que la definición de la clase *Cl-Vr* satisface la condición 4(187).

Estos diferentes enunciados no recogen todas las generalizaciones posibles del Teorema de GÖDEL, al menos en forma explícita. Pero, dada la generalidad de las hipótesis del sistema *LFT*, pueden ser consideradas como si contuviesen implícitamente las diferentes extensiones que se puede hacer del Teorema a formalismos dotados de otras propiedades (por ejemplo, a lógicas no-constructivas).

El interés de estos enunciados estriba en que enumeran las condiciones bajo las cuales una clase de proposiciones es incompleta. Cada uno de ellos presenta dos condiciones esenciales: una se refiere a la forma de la definición adoptada para la clase que se considera, y la otra es una condición de coherencia.

Comparemos estas hipótesis entre sí.

a) Comparación de (1) y (2).

La forma de la condición relativa a la clase considerada es la misma en los dos enunciados. La condición *ser ω-coherente* es menos general que la condición *ser coherente* [67].

b) Comparación de (1) y de (3).

La condición *ser recursivamente enumerable* es menos general que la condición *ser definible*, pues una clase puede ser definible sin ser recursivamente enumerable [68].

Contrariamente, la condición *ser ω-coherente* es más general que *pertenecer a la clase Cl-Vr*, pues una clase puede ser ω-coherente sin pertenecer a la clase *Cl-Vr* [suponiendo que está definida según la condición 4(187)] [69].

c) Comparación de (1) y de (4).

La condición *ser recursiva* es menos general que la condición *ser definible* [70].

La condición de coherencia es la misma en los dos enunciados.

d) Comparación de (2) y (3).

La condición de *ser recursivamente enumerable* es menos general que la condición *ser definible*, pues una clase puede ser definible sin ser recursivamente enumerable [71].

Por el contrario, la condición *ser coherente* es más general que *pertenecer a la clase Cl-Vr*, pues una clase puede ser coherente sin pertenecer a la clase *Cl-Vr* [72].

e) Comparación de (2) y (4).

La condición *ser recursivamente enumerable* es menos general que la condición

---

[67] Véase § 36.

[68] MOSTOWSKI demuestra que existe una clase definible y ω-corehente que no es recursivamente enumerable. MOSTOWSKI 9, pág. 99, Cap. VI, Sec. 4, Teorema 1.

[69] MOSTOWSKI demuestra que existe una clase cerrada que es ω-coherente y que no está contenida en *Cl-Vr*. MOSTOWSKI 9, pág. 101, Cap. VI, Sec. 4, Teorema 5.

[70] Véase nota 68 del presente capítulo.

[71] MOSTOWSKI demuestra que existe una clase cerrada definible perteneciente a *Cl-Vr* que no es recursivamente enumerable. MOSTOWSKI 9, pág. 101, Cap. VI, Sec. 4, Teorema 3.

[72] MOSTOWSKI demuestra que existe una clase cerrada recursivamente enumerable y coherente que no está contenida en *Cl-Vr*. MOSTOWSKI 9, pág. 101, Cap. VI, Sec. 4, Teorema 4.

ser definible [73]. Por el contrario, la condición *ser coherente* es más general que la condición ser *ω-coherente* [74].

f) Comparación de (3) y (4).

La condición *ser definible* es idéntica en los dos enunciados.

La condición *pertenecer a la clase Cl-Vr* es menos general que la condición *ser ω-coherente*, pues una clase puede ser ω-coherente sin pertenecer a la clase *Cl-Vr* [75].

SECCIÓN 4.—DEMOSTRACION DIRECTA DEL TEOREMA DE LA VERDAD. NUEVA FORMA DEL TEOREMA DE GÖDEL.

199. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA VERDAD PARTIENDO DEL LEMA DE TARSKI.

El *Teorema de la verdad* ha sido demostrado en el § 193 partiendo de la forma de TARSKI del Teorema de GÖDEL. Pero se puede demostrar sin hacer apelación a este Teorema, sea partiendo del lema de TARSKI [76], por medio del segundo lema de MOSTOWSKI [77], o de forma completamente autónoma.

Indiquemos ante todo cómo es posible demostrarle partiendo del lema de TARSKI.

Las hipótesis son las del § 193.

El segundo lema de MOSTOWSKI, que se apoya, como tal, en el lema de TARSKI, afirma que ninguna clase cerrada y coherente de proposiciones de *LFT* es definible por sí misma. Siendo la clase *Cl-Vr*, por hipótesis, cerrada y coherente [78], no es, pues, definible en su propio ámbito, y por consiguiente no es definible [79].

De aquí se sigue que la teoría del predicado *Vri* no es formalizable en *LFT*.

Efectivamente. Supongamos que lo fuese.

En tal caso existe en *LFT* una expresión predicativa $\mathfrak{Pri}$ tal que, para toda proposición A de *LFT*, siendo *a* el número-G de A, la equivalencia $(\mathfrak{Pri}\ N_a \leftrightarrow A)$ es derivable en *LFT*.

Sea A una proposición cualquiera de *LFT*.

---

[73] Véase nota 68 del presente capítulo.

[74] MOSTOWSKI demuestra que existe una clase cerrada recursivamente enumerable y coherente que no es ω-coherente. (MOSTOWSKI, 9, pág. 99, Cap. VI, Sec. 4, Teor. 2).

[75] Véase nota 69 del presente capítulo.

[76] Véase § 188.

[77] Véase § 196.

[78] Cláusulas *a* y *b* de la condición 4(187).

[79] Véase § 190.

En virtud de nuestro supuesto, la equivalencia ($\mathfrak{Prí}\ N_a \leftrightarrow A$) es derivable en *LFT*. Lo mismo ocurre entonces con las implicaciones ($A \rightarrow \mathfrak{Prí}\ N_a$) y ($\mathfrak{Prí}\ N_a \rightarrow A$), y, por consiguiente, también con la implicación ($\sim A \rightarrow \sim \mathfrak{Prí}\ N_a$), obtenida a partir de la precedente por contraposición.

La clase *Cl-Vr*, por ser cerrada y contener todas las proposiciones derivables de *LFT* [80], debe contener las implicaciones ($A \rightarrow \mathfrak{Prí}\ N_a$) y ($\sim A \rightarrow \sim \mathfrak{Prí}\ N_a$).

Si la proposición A pertenece a la clase *Cl-Vr*, como ésta es cerrada, debe contener también la proposición $\mathfrak{Prí}\ N_a$ [81].

Si la proposición A no pertenece a la clase *Cl-Vr*, como ésta es completa [82], debe contener la proposición $\sim A$, y, por tanto, la proposición $\sim \mathfrak{Prí}\ N_a$ [83].

Así, si A pertenece a *Cl-Vr*, es decir, si se cumple *Vri a*, $\mathfrak{Prí}\ N_a$ pertenece a la *Cl-Vr*. Y si A no pertenece a *Cl-Vr*, es decir, si se tiene $\sim$ *Vri a*, $\sim \mathfrak{Prí}\ N_a$ pertenece a *Cl-Vr*.

En otros términos, nuestra suposición tiene por consecuencia que la clase *Cl-Vr* es definible, lo que, como hemos podido comprobar, es imposible [84].

Por tanto, la teoría del predicado *Vri* no es formalizable en *LFT*.

200. Demostración autónoma del teorema de la verdad.

También se puede demostrar el *teorema de la verdad* de manera completamente autónoma, bajo hipótesis más generales que las del § 193. En efecto, es posible obtener esta demostración sin tener en cuenta la condición 3(187) impuesta al formalismo *LFT* ni la condición 4(187) impuesta a la definición del predicado *Vri*. Pero se debe suponer que el formalismo considerado es coherente.

Así, tendremos el teorema:

(LXXXV) *Dado un formalismo LF que responda a las condiciones* 1(187) *y* 2(187) *y a la de coherencia, la teoría del predicado Vri (respecto al sistema LF) no es formalizable en dicho sistema* [85].

En efecto, supongamos que se haya definido un predicado *Vri* para este sistema y que sea formalizable en *LF*. En tal caso existirá una expresión predicativa $\mathfrak{Prí}$ tal que, para toda proposición A de *LF*, siendo *a* el número-G de A la equivalencia ($\mathfrak{Prí}\ N_a \leftrightarrow A$) es derivable en *LF*.

---

[80] Cláusula *a* de la condición 4(187).

[81] En virtud de la regla de la consecuencia.

[82] Cláusula *c* de la condición 4(187).

[83] En virtud de la regla de consecuencia.

[84] Como se ve, esta demostración emplea, modificándola, una parte de la demostración del § 193.

[85] Como el sistema *LFT* responde a estas condiciones, la demostración de este teorema puede aplicarse al sistema *LFT*, con tal de que sea coherente.

Consideremos la expresión $\sim \mathfrak{Pri}\ \mathfrak{X}$.

Procediendo como en el caso del lema de TARSKI [86], vamos a transformar esta expresión sirviéndonos de la función abreviada de sustitución *Sbs*.

En virtud de nuestras hipótesis sobre *LF*, esta función, al ser recursiva, es representable en *LF* por medio de una cierta expresión funcional $\mathfrak{Sbs}$.

Ahora podemos formar la proposición

$$\sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ \mathfrak{X}\ \mathfrak{X})\ .$$

Esta proposición pertenece a *LF*. Sea v el número-G, y sea N_v la expresión de *LF* correspondiente a v.

Reemplazando $\mathfrak{X}$ por N_v en la proposición anterior, obtendremos:

$$\sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v).$$

Sea u el número-G de esta proposición, y sea N_u la expresión de *LF* correspondiente a u.

En virtud de las propiedades de la función *Sbs*, tenemos:

$$Sbs\ v\ v = u.$$

En virtud de nuestras hipótesis sobre *LF*, podremos derivar en *LF*:

$$\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v = N_u.$$

y a continuación:

$$\mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v) \dashv\vdash \mathfrak{Pri}\ N_u.$$

(pues *LF* debe contener los axiomas de igualdad).

Por otra parte, en virtud de nuestro supuesto, la proposición

$$\mathfrak{Pri}\ N_u \dashv\vdash \sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v)$$

es derivable en *LF*.

Por consiguiente, tendremos en *LF*:

$$\mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v) \dashv\vdash \sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v).$$

De donde se pueden obtener las dos proposiciones:

$$\mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v) \text{ y } \sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v),$$

lo cual es imposible, puesto que *LF* se supone coherente.

Por tanto, nuestro supuesto no puede ser mantenido y la teoría del predicado *Vri* no es formalizable en *LF*.

La proposición $\sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v)$ representa el enunciado: *La proposición* $\sim \mathfrak{Pri}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_v\ N_v)$ *no verifica el predicado Vri.* Por tanto, afirma su propia falsedad.

La demostración que acabamos de desarrollar emplea, pues, la *paradoja del embustero* en su forma original.

[86] Véase § 188.

201. Nueva forma del Teorema de Gödel demostrable por el método semántico.

Como acabamos de ver en el § 199, se puede demostrar el *teorema de la verdad* por medio del segundo lema de Mostowski.

Por otra parte, se ha visto en el § 193 que se puede demostrar este teorema por medio de la forma de Tarski del Teorema de Gödel, lo cual sugiere que existe un cierto vínculo entre el Teorema de Gödel y el segundo lema de Mostowski.

Este vínculo existe, efectivamente. Mostowski ha demostrado, en efecto, utilizando indicios obtenidos de Tarski, que es posible redescubrir el Teorema de Gödel a partir de su segundo lema [87].

Siguiendo este camino, se obtiene el Teorema de Gödel bajo la forma siguiente:

(LXXXVI) *Dado un formalismo LFT que responda a las condiciones* 1(187) 2(187), 3(187) *y* 4(187), *existe en LFT proposiciones indecidibles de la forma* (𝔛) 𝔑en 𝔛, *donde* 𝔑en *es una expresión predicativa que corresponde al predicado "ser un número entero"*.

Esta forma del Teorema de Gödel es algo diferente de la expuesta en el § 190, pero el formalismo al que se aplica verifica las mismas hipótesis que aquel al que se aplica la forma de Tarski del Teorema de Gödel. Estas dos formas del Teorema están, pues, estrechamente emparentadas y es natural que así sea, puesto que el segundo lema de Mostowski se apoya en el lema de Tarski, del que deriva directamente el teorema del § 190. La demostración del enunciado anterior puede considerarse, en suma, como una variante de la del § 190, y representa otra manera de aplicar el método semántico a la demostración del Teorema de Gödel.

202. Demostración de esta nueva forma del Teorema de Gödel.

Dejemos establecida, ante todo, la existencia en *LFT* de una proposición indecidible al menos.

Se puede demostrar que la clase *Cl-Dr* de las proposiciones derivables de *LFT* es definible en *LFT* (es decir, definible en la clase *Cl-Vr*) [88]. Pero, en virtud del lema de

[87] Mostowski 9, págs. 90-96, Cap. VI, Sec. 2, Teor. 1. Mostowski da tres demostraciones diferentes de este teorema. La primera (págs. 91-92) es la que se apoya sobre su segundo lema y que reproducimos en el texto anterior. Como Mostowski indica en una nota, esta demostración le ha sido comunicada oralmente por Tarski, y está contenida implícitamente en Tarski 4, págs. 370-374. Este pasaje de Tarski 4, es el que corresponde al lema de Tarski expuesto en el § 188. La segunda demostración que da Mostowski (págs. 92-93) corresponde a la de Gödel en Gödel 3, págs. 187-189, y la tercera a la de Rosser en Rosser 3, pág. 89, Teor. II.

[88] Mostowski 9, pág. 82, Cap. V, Sec. 3, Teor. 10.

MOSTOWSKI, la clase *Cl-Vr,* al ser cerrada y coherente [89], no es definible en sí misma. Por tanto, no puede coincidir con la clase *Cl-Dr.*

Como, por otra parte, *Cl-Vr* contiene la clase *Cl-Dr* [90], debe contener, al menos, una proposición $\mathfrak{G}_U$ que no pertenezca a la clase *Cl-Dr,* es decir, que no sea derivable en *LFT.* Y como la clase *Cl-Vr* es coherente, no puede contener, al mismo tiempo, la proposición $\mathfrak{G}_U$ y su negación $\sim \mathfrak{G}_U$. Con mayor motivo, la clase *Cl-Dr* contenida en *Cl-Vr* no puede contener $\sim \mathfrak{G}_U$.

La proposición $\mathfrak{G}_U$ es a la vez inderivable e irrefutable en *LFT*; por consiguiente, es indecidible.

Indiquemos ahora cuál es la forma de esta proposición $\mathfrak{G}_U$. Consideremos el enunciado metateórico: *La proposición* A *pertenece a la clase Cl-Dr.*

Si *a* es el número G de A, podemos representar este enunciado en *LFT* mediante una expresión aritmética.

$$(EX)\ R\ X\ a,$$

donde *R* es un predicado recursivo [91].

(Existe una cierta serie de proposiciones de *LFT* que constituye una derivación de la proposición A en *LFT.*)

En virtud de nuestras hipótesis sobre *LFT,* podemos representar este enunciado en *LFT* por una proposición

$$(E\mathfrak{X})\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ N_a,$$

donde $\mathfrak{R}$ es una expresión predicativa correspondiente al predicado *R* y N_a la constante individual de *LFT* que corresponde al entero *a.* La clase *Cl-Dr* es, pues, representable en *LFT,* con lo que estamos dentro de las condiciones del lema de TARSKI.

La clase *Cl-Rp* del lema es aquí la clase *Cl-Dr.*

Por consiguiente, podemos afirmar: existe en *LFT* una proposición $\mathfrak{G}_U$ tal que la equivalencia

$$\sim \mathfrak{G}_U \leftrightarrow \mathfrak{G}_{U\,m}$$

donde $\mathfrak{G}_{U\,m}$ representa el enunciado metateórico: *La proposición* $\mathfrak{G}_U$ *pertenece a la clase Cl-Dr*) es derivable en *LFT.*

Para encontrar la forma de la proposición $\mathfrak{G}_U$, basta con rehacer el razonamiento del lema. La expresión *Mem-Rp* del lema (que expresa la pertenencia de la proposición A a la clase *Cl-Rp*) se reemplaza aquí por la expresión (EX) *R X a.* Procediendo como en la demostración del § 188, podemos formar la proposición

$$\sim (E\mathfrak{X})\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ (\mathfrak{Sbs}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Y})\ [92],$$

---

[89] Cláusulas *a* y *b* de la condición 4(187).

[90] En virtud de la cláusula *a* de la condición 4(187).

[91] El sistema *LFT,* al tener las mismas reglas de derivación que el *LFG,* se le puede aplicar el mismo tipo de razonamiento que en § 89, y demostrar que la propiedad *ser una derivación de una proposición* A *en LFT* puede expresarse por medio de un predicado recursivo.

[92] Esta proposición corresponde a la proposición 1(188).

que es equivalente a

(1) $\quad (\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Y})$.

Sea t el número-G de esta proposición, y N_t la expresión de *LFT* que corresponde al entero t.

Reemplazando $\mathfrak{Y}$ por N_t en 1(202), obtenemos:

(2) $\quad (\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,N_t\,N_t)$.

proposición que es la $\mathfrak{I}_U$.

Sea u el número-G de esta proposición, y N_u la expresión de *LFT* que corresponde al entero u.

En virtud de las propiedades de *Sbs*, tenemos:

$$Sbs\ t\ t = u.$$

Es posible derivar en *LFT* la equivalencia

$$(E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,N_t\,N_t) \leftrightarrow (E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,N_u.$$

La proposición $(E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,N_u$ es nuestra proposición $\mathfrak{I}_{U\,m}$. Como se tiene la equivalencia

$$\sim (\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,N_t\,N_t) \leftrightarrow (E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,N_t\,N_t),$$

tendremos finalmente:

$$\sim (\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{Sbs}\,N_t\,N_t) \leftrightarrow (E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,N_u,$$

es decir:

(3) $\quad \sim \mathfrak{I}_U \leftrightarrow \mathfrak{I}_{U\,m}$.

Ahora hay que demostrar que $\mathfrak{I}_U$ es una proposición indecidible.

Podemos afirmar:

$\mathfrak{I}_U$ pertenece a *Cl-Vr* y $\mathfrak{I}_{U\,m}$ no pertenece a *Cl-Vr*, o bien $\mathfrak{I}_U$ no pertenece a *Cl-Vr* y $\mathfrak{I}_{U\,m}$ no pertenece en absoluto a *Cl-Vr*.

En efecto, esto equivale a decir, si se tiene en cuenta la equivalencia 3(204): $\mathfrak{I}_U$ pertenece a *Cl-Vr* y entonces $\sim \mathfrak{I}_U$ no pertenece a *Cl-Vr*, o bien $\mathfrak{I}_U$ no pertenece a *Cl-Vr* y entonces $\sim \sim \mathfrak{I}_U$ no pertenece tampoco a *Cl-Vr*.

Tal enunciado es verdadero, puesto que la clase *Cl-Vr* es coherente.

Demostraremos que es el primer miembro de esta alternativa el que es verdadero, y que el segundo lleva, en efecto, a una contradicción.

Supongamos que $\mathfrak{I}_{U\,m}$ no pertenece a *Cl-Vr*. En tal caso, como la clase *Cl-Vr* es completa, $\mathfrak{I}_{U\,m}$ debe pertenecer a la clase *Cl-Vr*.

Así, pues, tenemos: la proposición $(E\mathfrak{X})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X}\,N_u$ pertenece a *Cl-Vr*. Esto significa que la proposición cuyo número-G es u, es decir $\mathfrak{I}_U$, pertenece a la clase *Cl-Dr* y, por consiguiente, también a la clase *Cl-Vr*.

Por otra parte, la equivalencia 3(202) da la implicación:

$$\mathfrak{I}_U \rightarrow \sim \mathfrak{I}_{U\,m}\ ^{93}.$$

---

[93] Se obtiene esta implicación por contraposición de la implicación $\mathfrak{I}_{U\,m} \rightarrow \sim \mathfrak{I}_U$.

Esta implicación, por ser derivable, forma parte de *Cl-Dr* y, por tanto, de *Cl-Vr*. Si $\mathfrak{V}_{U\,m}$ no pertenece a la clase *Cl-Vr*, $\mathfrak{V}_U$ no puede tampoco pertenecer a *Cl-Vr*.

Así, pues, se termina en una contradicción. Es, por tanto, el primer miembro de la alternativa el que es verdadero, y tenemos:

$\mathfrak{V}_U$ pertenece a *Cl-Vr*

y $\mathfrak{V}_{U\,m}$ no pertenece a *Cl-Vr*.

Como la clase *Cl-Vr* es coherente, si $\mathfrak{V}_U$ pertenece a *Cl-Vr*, $\sim \mathfrak{V}_U$ no puede pertenecer a *Cl-Vr*, ni menos aún a *Cl-Dr*.

Y, por otra parte, $\mathfrak{V}_U$ tampoco puede pertenecer a *Cl-Dr*. De no ser así, habría un número *d* que sería el número-G de una derivación de $\mathfrak{V}_U$ en *LFT*, lo que se expresaría por el enunciado *R d u*, pudiéndose derivar en *LFT* la proposición $(E\mathfrak{X})\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ N_u$, es decir, la proposición $\mathfrak{V}_{U\,m}$.

Esta proposición pertenecería, pues, a *Cl-Dr* y, por tanto, a *Cl-Vr*, contrariamente a lo que se acaba de afirmar.

Así, ni la proposición $\mathfrak{V}_U$ ni la $\sim \mathfrak{V}_U$ pueden pertenecer a *Cl-Dr*.

La proposición $\mathfrak{V}_U$ es, por tanto, indecidible en *LFT*.

La proposición $\mathfrak{V}_U$ tiene la forma $(\mathfrak{X})\ \mathfrak{Ren}\ \mathfrak{X}$, donde $\mathfrak{Ren}$ es una expresión predicativa que corresponde al predicado *ser un número entero*.

Efectivamente, se ha visto que $\mathfrak{V}_U$, es decir $(\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$, pertenece a *Cl-Vr*.

Pero cualquiera que sea el entero *e*, se puede derivar en *LFT* la implicación:

$$(\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t) \rightarrow \sim \mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)\ [94].$$

Esta implicación, como pertenece a *Cl-Dr*, pertenece también a *Cl-Vr*.

Así, pues, cualquiera que sea el entero *e*, la proposición $\sim \mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$ pertenece a *Cl-Vr* [95].

Como la expresión predicativa $\mathfrak{R}$ corresponde a un predicado recursivo, cualquiera que sea el entero *e*, debe ser posible derivar en *LFT*, en virtud de las hipótesis aceptadas para este formalismo, sea $\mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$, sea $\sim \mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$. Una de estas dos proposiciones debe, pues, pertenecer a *Cl-Dr*. Como la clase *Cl-Vr* es coherente, la proposición $\mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$ no puede pertenecer a *Cl-Vr*, cualquiera que sea el entero *e*. Por tanto, tendremos finalmente: cualquiera que sea el entero *e*, la proposición $\sim \mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$ pertenece a *Cl-Dr*.

Como esta proposición representa en *LFT* un enunciado $\sim R\ e\ (Sbs\ t\ t)$, podemos considerar este enunciado como el resultado de la aplicación a la constante individual *e* del predicado $\hat{X}\ [\sim R\ X\ (Sbs\ t\ t)]$.

---

[94] Utilizando el primer esquema de axiomas para el cuantificador de universalización: esquema 3.1 del § 79.

En virtud de la condición 2(187), el sistema *LFT* incluye este esquema.

[95] En virtud de la regla de consecuencia.

Como los predicados *R* y *Sbs* son recursivos primitivos, este predicado es igualmente recursivo primitivo, pudiéndosele considerar como caracterizante de los números enteros.

Designemos este predicado por *Nen*: la propiedad a la que corresponde es *ser un número entero.*

El enunciado $\sim R\ e\ (Sbs\ t\ t)$ se escribirá: *Nen e.* Y si $\mathfrak{Ren}$ es la expresión predicativa quue representa el predicado *Nen* en *LFT,* la proposición $\sim \mathfrak{R}\ N_e\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$ se escribirá $\mathfrak{Ren}\ N_e$, y la proposición $(\mathfrak{X}) \sim \mathfrak{R}\ \mathfrak{X}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_t\ N_t)$, es decir, $\mathfrak{G}_U$, se escribirá $(\mathfrak{X})\ \mathfrak{Ren}\ \mathfrak{X}$.

Así, pues, el teorema queda enteramente demostrado.

Podemos observar que la proposición $\mathfrak{G}_U$ expresa por sí misma que no es derivable en *LFT.* Efectivamente, el enunciado que representa es el siguiente: *Cualquiera que sea el entero n, este entero no puede ser el número-G de una derivación de la proposición cuyo número-G es* (*Sbs t t*). Pero *Sbs t t* = *u,* y esta proposición es, por tanto, la proposición $\mathfrak{G}_U$.

Dicho de otra forma, la proposición $\mathfrak{G}_U$ representa en *LFT* el enunciado metateórico: *No existe derivación en LFT de la proposición* $\mathfrak{G}_U$.

Así llegamos a la forma de la proposición indecidible construida por GÖDEL.

CAPÍTULO IX

Otros hechos de limitación

203. INTRODUCCIÓN.

Los hechos de limitación expuestos hasta aquí pueden distribuirse en tres categorías:

— Hechos relativos a la saturación (existencia de proposiciones indecidibles).

— Hechos relativos al problema de la decisión (existencia de problemas insolubles).

— Hechos relativos al poder de expresión de un formalismo (*teorema de la verdad*) [1].

Los diferentes teoremas que han sido analizados en los capítulos precedentes describen lo esencial de las limitaciones que la investigación sobre los fundamentos ha hecho aparecer en el interior de los formalismos. Es, por tanto, posible obtener ciertas conclusiones sirviéndose únicamente de estos teoremas.

No obstante, conviene, al objeto de completar la exposición, ocuparse también de otros resultados que pueden igualmente ser interpretados como expresión de ciertas limitaciones de los formalismos.

No nos perderemos en una exposición detallada; nos limitaremos, simplemente, con señalar su existencia, dando el mínimo de explicaciones necesarias para que se pueda captar su alcance.

Consideraremos posteriormente una aportación de TARSKI sobre la noción de *definible,* los hechos de limitación ligados a la teoría de modelos y un hecho de limitación propio de las lógicas combinatorias. Finalmente haremos referencia a algunas consecuencias implicadas en los hechos de limitación como resultado de las investigaciones sobre los fundamentos.

---

[1] Véase § 187.

SECCIÓN 1.—EL RESULTADO DE TARSKI SOBRE LA NOCION DE DEFINIBLE.

204. NOCIÓN DE DEFINIBLE.

El resultado de TARSKI relativo a la noción de *definible*[2] entra en la misma categoría que su teorema de la verdad. Igualmente concierne a una noción semántica de un determinado formalismo que no puede ser representado en el dominio de este formalismo. Lo mismo que el teorema de la verdad, indica que existe un límite en el poder de expresión de un sistema dado: siempre es posible construir, sobre la base de este sistema, una noción metateórica que desborda el cuadro del sistema en cuestión.

Consideremos un formalismo *LF* que contenga la teoría de tipos. (Así, por ejemplo, el formalismo *LFG*[3] o el formalismo *LFT*[4].)

La noción de *definible* se puede caracterizar como sigue:

Sea $A(\Theta^n)$ una proposición de *LF* que contiene como única variable libre una variable Θ^n del *n*-ésimo tipo. Podemos considerar tal proposición como expresión de un predicado aplicable a objetos del *n*-ésimo tipo. Sea Ob^n uno de estos objetos. Se puede definir por tal objeto la propiedad de satisfacer a una proposición dada utilizando un método análogo a la que ha sido descrita en el § 188 (que permitía caracterizar la propiedad de una serie de enteros que no incluye más que un número finito de términos distintos de 1, de satisfacer a una proposición dada de *LFN-V*). Se puede extender esta definición a caso de un múltiplo *n* de objetos. Se dice que la proposición $A(\Theta^n)$ *define* el objeto $Ob^{(n)}$ si este objeto satisface esta proposición y si ningún otro objeto (del mismo tipo) satisface a esta proposición. Y se dice que un objeto $Ob^{(n)}$ es definible en *LF* si existe en *LF* una proposición que defina este objeto.

Sea *En* un conjunto de objetos del *n*-ésimo tipo. Se dice que la proposición $A(\Theta^n)$ *define* este conjunto si *En* es el conjunto de los objetos que satisfacen esta proposición. Y se dice que un conjunto de objetos es *definible* en *LF* si existe en *LF* una proposición que defina este conjunto.

Sea, en fin, *P* un predicado que exprese una relación entre *n* objetos (del mismo o de distintos tipos).

Se dice que este predicado es *definible* en *LF* si existe en *LF* una proposición de *n* variables libres tal que los múltiplos de *n* de objetos entre los que existe la relación expresada por *P* satisfacen esta proposición y sólo ellos la satisfacen.

---

[2] TARSKI 11.
[3] Véase CAPITULO III, Sec. 2.
[4] Véase § 187.

205. El Teorema de Tarski para esta noción.

Podemos preguntarnos si la noción general de objeto (de un tipo dado) definible en *LF* es a su vez definible en *LF*. Dicho con mayor precisión: ¿existe en *LF*, cualquiera que sea n, una proposición que contenga como única variable libre una variable de *n-ésimo* tipo y tal que esta proposición sea satisfecha por todos los objetos del *n-ésimo* tipo definibles en *LF* y solamente por éstos? O también, designando por *En-Df*(k) el conjunto de los objetos del *k-ésimo* tipo definibles en *LF*: el conjunto *En-Df*(n), ¿está contenido en el conjunto *En-Df*($n + 1$) cualquiera que sea n?

Tarski ha demostrado que la respuesta a esta cuestión es negativa.

En efecto:

(LXXXVII) 1) *En-Df* (1) *está contenido en En-Df* (2).

2) *No ha sido posible hasta aquí determinar si En-Df* (2) *está contenido o no en En-Df* (3).

3) *Para* $n \geqq 3$, *En-Df*(n) *no puede estar contenido en En-Df*($n + 1$).

Para demostrar este resultado, Tarski utiliza un argumento análogo a la paradoja de Richard.

Consideremos el caso en que $n = 3$.

(La demostración puede reconstruirse análogamente para $n > 3$.)

Los objetos del primer tipo corresponden a los números enteros, los del segundo tipo corresponden a los números reales, los del tercer tipo a los conjuntos de números reales.

El conjunto *En-Df*(3) es, por tanto, el conjunto de todos los elementos de números reales que son definibles en *LF*.

Como el conjunto de las proposiciones de *LF* es numerable (puesto que están formadas por series finitas de símbolos tomados de un conjunto numerable de símbolos), el conjunto *En-Df*(3) es numerable.

Basándose en la teoría de conjuntos, es posible construir un predicado P, de dos argumentos, que establezca una relación de ordenación entre los conjuntos de números reales pertenecientes a una determinada categoría.

Es posible demostrar:

1) Que este predicado es definible en *LF*.

2) Que el conjunto *En-Ru*, formado por la reunión de los primeros y los segundos elementos de los pares de conjuntos de números reales para los que se cumple P, es un conjunto no-numerable.

Sea entonces En_a el conjunto de números reales definido como sigue: conjunto que pertenece a *En-Ru* pero no a *En-Df*(3) y tal que la relación expresada por P

existe entre este conjunto En_a y todo conjunto En_b de números reales que pertenecen a *En-Ru* pero no a *En-Df*(3).

Supongamos que *En-Df* (3) sea definible en *LF*.

Por consiguiente, existe una cierta proposición $A(\Theta^3)$ satisfecha por los elementos de *En-Df* (3) y solamente por ellos. Es posible construir, utilizando esta proposición, otra $B(\Theta^3)$ también con una sola variable libre, que se satisface por el conjunto En_a (que es un objeto de tercer tipo) y solamente por éste. De aquí se sigue que este conjunto pertenece a *En-Df* (3), lo que contradice su definición.

Por consiguiente, no podemos suponer que *En-Df* (3) sea definible.

Lo esencial de la demostración consiste en hacer corresponder, mediante el predicado *P*, a todo conjunto numerable de conjuntos de números reales [tales como *En-Df* (3)] un conjunto de números reales (tal como En_a) que no le pertenezca.

Estamos, pues, ante la misma construcción que en el caso de la *paradoja de* RICHARD [5].

---

[5] BETH ha establecido, por medio de un procedimiento muy elegante, la existencia de un hecho de limitación que entra en la misma categoría que el teorema de la verdad y el teoremo de TARSKI sobre la noción de *definible* (BETH 14, págs. 193-195).

BETH demuestra que no es posible representar en un sistema formal una cierta función aritmética, que denomina *función de* BERRY *de este sistema.*

La definición de esta función hace intervenir la *antinomia* de BERRY, que se puede representar como sigue: Sea la definición siguiente: *El número de* BERRY *es el menor número entero que se puede definir solamente por medio de una frase que contenga, como máximo, cincuenta palabras españolas.* Esta definición sola contiene veintiséis palabras, y el *número* de BERRY es, por tanto un número que se puede definir en menos de cincuenta palabras españolas, contrariamente a su definición.

Se puede eliminar la antinomia, introduciendo la noción de *número de* BERRY *de un sistema LF,* y definiendo esta noción como sigue: *el número de* BERRY *de un sistema LF es el menor número entero que se puede definir por medio de una expresión del sistema LF que contenga, como máximo, cincuenta componentes primitivas de LF.*

La antinomia ha desaparecido porque la lengua española (en la que se formula la definición anterior) no coincide con el sistema *LF* (en el que no es posible definir el *número de* BERRY *correspondiente a LF,* por medio de una expresión que contenga menos de cincuenta componentes primitivas de *LF*).

Inspirándose en esta noción, se puede definir como sigue la noción de *función de* BERRY *correspondiente a un sistema LF: La función de* BERRY *correspondiente a un sistema LF es la función que hace corresponder a un número entero* m *el menor número entero* n *que no se puede definir en este sistema LF por medio de una expresión de este sistema que contenga al máximo* m *componentes primitivas.* BETH demuestra, utilizando una propiedad de la función logarítmica, que la función de BERRY respecto a un sistema *LF* no es representable en este sistema.

Este hecho de limitación reviste una significación tanto mayor cuanto que ha podido ser establecida de manera muy sencilla, sin recurrir al método de la aritmetización y haciendo solamente algunas hipótesis muy poco restrictivas sobre las posibilidades de expresión que debe presentar el sistema *LF* considerado.

SECCIÓN 2.—EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM.

206. EL TEOREMA DE LÖWENHEIM Y SU GENERALIZACIÓN POR SKOLEM.

Existen ciertos hechos de limitación que están ligados al uso de modelos, y que precisan las relaciones que existen entre ciertos formalismos y los modelos en que se pueden proponer.

El primer resultado importante es el de LÖWENHEIM y SKOLEM.

LÖWENHEIM ha establecido, para la lógica de predicados de primer orden, un teorema sobre los campos de interpretación [6] utilizables para esta lógica [7].

Esta comporta dos categorías de variables: variables individuales y variables predicativas de orden 1.

Un campo de interpretación para esta lógica deberá, pues, incluir al menos dos dominios, uno de los cuales será un dominio de individuos. Procediendo como en el § 26, se puede presentar un campo de este tipo constituido por tres dominios:

1) Un dominio de individuos (correspondientes a las variables individuales).

2) Un dominio formado por los objetos *Vri* y *Fal.*

3) Un dominio funcional, constituido por funciones que toman por argumentos objetos del primer dominio y adoptan sus valores en el segundo (estas funciones corresponden a las variables predicativas) [8].

Para simplificar el lenguaje, diremos que tal campo es *vacío, no-vacío, finito, numerable, no-numerable,* según que el dominio de individuos que comporte sea, respectivamente, vacío, no-vacío, finito, numerable, no-numerable.

El *teorema de* LÖWENHEIM puede formularse así:

(LXXXVIII) *Toda proposición cerrada* [9] *de la lógica de predicados de primer orden que es válida respecto a un campo de interpretación numerable* [10] *es válida respecto a todo campo de interpretación no-vacío.*

---

[6] Véase § 28.

[7] LÖWENHEIM 1.

[8] A toda variable predicativa se podrá hacer corresponder, por tanto, una función de individuos que puede tomar como valor uno de los objetos *Vri* o *Fal.* A una variable predicativa de *n* argumentos se hace corresponder una función de *n* argumentos. Por tanto, dada una proposición, cuando todas las variables individuales de ésta son reemplazadas por objetos determinados del dominio de individuos, se puede asociar a la expresión así obtenida uno de los objetos *Vri* o *Fal,* o también, desde un punto de vista más intuitivo, uno de los predicados *verdadero* o *falso.*

[9] Es decir, que no contenga variables libres.

[10] Por ejemplo, válida respecto a un campo de interpretación cuyo dominio de individuos está constituido por el conjunto de los números enteros.

Del anterior teorema se puede obtener el siguiente corolario:

(LXXXIX) *Si una proposición cerrada de la lógica de predicados de primer orden es realizable en un campo de interpretación no-vacío cualquiera, es realizable en un campo de interpretación que es, a lo sumo, numerable.*

SKOLEM ha extendido este corolario, considerando no ya una sola proposición, sino una clase numerable de proposiciones [11]. Se dice que una clase de proposiciones es *realizable* en un campo de interpretación si cada proposición perteneciente a esta clase es realizable en este campo.

El teorema de SKOLEM puede formularse así:

(XC) *Si una clase numerable de proposiciones de la lógica de predicados de primer orden es realizable en un campo de interpretación no-vacío cualquiera, es realizable en un campo de interpretación que es, a lo sumo, numerable.*

207. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SKOLEM.

Sea *Cl* una clase cualquiera numerable de proposiciones cerradas de la lógica de predicados de primer orden; sea *En-Fd* un cierto campo de interpretación (familia de dominios) en el cual es realizable esta clase, y sea *En-Di* el dominio de individuos de este campo.

Todas las proposiciones A_i de la clase *Cl* pueden ponerse en la forma siguiente:

$(\Theta_{11})\ (\Theta_{12})\ \ldots\ (\Theta_{1m_i})\ (E\Theta_{21})\ (E\Theta_{22})\ \ldots\ (E\Theta_{2n_i})$
$(\Theta_{31})\ (\Theta_{32})\ \ldots\ (\Theta_{3p_i})\ (E\Theta_{41})\ (E\Theta_{42})\ \ldots\ (E\Theta_{4q_i})$
$B_i\ (\Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots, \Theta_{4q_i})$.

Consideremos en primer término el caso de una proposición A de forma sencilla, tal como: $(\Theta_1)\ (E\Theta_2)\ B\ (\Theta_1, \Theta_2)$.

Decir que esta proposición es realizable en el campo de interpretación *En-Fd*, equivale a decir que existe una función de interpretación *Mdl* dotada de la siguiente propiedad:

Cualquiera que sea el individuo *a* tomado en el conjunto *En-Di*, existe una cierta clase Cl_a de individuos pertenecientes al mismo conjunto, tal que si se hace corresponder el individuo *a* a la variable Θ_1 y un individuo de la clase Cl_a a la variable Θ_2 en la proposición $B\ (\Theta_1, \Theta_2)$, la función *Mdl* hace corresponder a esta proposición el objeto *Vri*.

Utilizando el axioma de elección [12] se puede asociar a cada individuo *a* un solo individuo *b* de la clase correspondiente Cl_a. Se puede expresar esto diciendo que

[11] SKOLEM 1 y 5.

[12] Este axioma puede formularse como sigue:

Dado un conjunto no-vacío *En* de conjuntos no vacíos y separados (sin elementos comunes), existe un conjunto que tiene un elemento y sólo uno en común con cada conjunto de *En*.

Aquí el conjunto *En* es el conjunto de las clases Cl_a.

existe una función F tal que, para todo individuo a, $F\,a$ es un individuo b dotado de la propiedad siguiente: si se sustituye Θ_1 por a y Θ_2 por b en la proposición B (Θ_1, Θ_2), la función *Mdl* hace corresponder a esta proposición el objeto *Vri*.

Si extendemos este análisis al caso general, podemos decir: existe una función de interpretación *Mdl* y existe, para todas las proposiciones A_i de la clase *Cl*, un conjunto de funciones F_{i1}, F_{i2}, ..., F_{in_1}, G_{i1}, G_{i2}, ..., G_{iq_1}, definidas en *En-Di* y adoptando sus valores en *En-Di*, tales que, cualquiera que sea el conjunto de individuos a_i, a_2, ..., a_{m_i}, c_1, c_2, ..., c_{p_i} de *En-Di*, si se hace corresponder, respectivamente de los individuos $a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}$, $F_{i1}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}$, $F_{i2}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}$, ..., $F_{in_i}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}, c_1, c_2 \ldots, c_{p_i}$, $G_{i1}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}, c_1, c_2, \ldots c_{p_i}$, $G_{i2}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}, c_1, c_2, \ldots, c_{p_i}, \ldots, G_{iq_i}\ a_1\ a_2 \ldots a_{m_i}, c_1, c_2, \ldots, c_{p_i}$, a las variables $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots, \Theta_{1m_i}\ \Theta_{21}, \Theta_{22}, \ldots, \Theta_{2n_i}\ \Theta_{31}, \Theta_{32}, \ldots, \Theta_{3p_i}, \Theta_{41}, \Theta_{42}, \ldots, \Theta_{4q_i}$ en la proposición B ($\Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots, \Theta_{4q_i}$), la función *Mdl* hace corresponder a esta proposición el objeto *Vri*.

Ahora estamos en situación de extraer del dominio *En-Di*, cualquiera que éste sea, un sub-dominio *En-Dip* (*dominio parcial de individuos*) que es numerable.

Este subdominio *En-Dip* se define de la manera siguiente:

Sea e un determinado individuo de *En-Di*, y sea En_0 un conjunto que tiene este individuo como único elemento.

Sea En_i el conjunto que contiene todas las expresiones pertenecientes a En_{i-1} y que contiene además todas las expresiones $F_{k1}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}, F_{k2}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}, \ldots, F_{kn_k}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}$, $G_{k1}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}\ e_{m_k+1} \ldots e_{m_k+p_k}$, $G_{k2}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}\ e_{m_k+1} \ldots e_{m_k+p_k}$, ..., $G_{kq_k}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}\ e_{m_k+1} \ldots e_{m_k+p_k}$, pudiendo adoptar k uno de los valores 1, 2, ..., i, y siendo $e_1, e_2, \ldots, e_{m_k+p_k}$ miembros cualesquiera de En_{i-1}.

El sub-dominio *En-Dip* se define como la reunión de todos estos sub-conjuntos En_i, es decir, formado por todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos En_i.

Como todo conjunto En_i, el sub-dominio *En-Dip* es un conjunto numerable. Por otra parte, está definido de tal manera que, si contiene los individuos $e_1, e_2, \ldots, e_{m_k}$, contiene también los individuos $F_{kj}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}$ (para todos los valores de k y para $j = 1, 2, \ldots, n_k$), y si contiene todos los individuos $e_1, e_2, \ldots, e_{m_k}\ e_{m_k+1} \ldots e_{m_k+p_k}$, contiene también los individuos $G_{kj}\ e_1\ e_2 \ldots e_{m_k}\ e_{m_k+1} \ldots e_{m_k+p_k}$ (para todos los valores de k y para $j = 1, 2, \ldots, q_k$).

Es posible, pues, modificar de manera conveniente la función *Mdl* (restringiéndola a los individuos que pertenecen al sub-dominio *En-Dip* [13] de tal manera que todas las proposiciones de la clase *Cl* sean realizables en un campo de interpretación que tenga *En-Dip* como dominio de individuos, es decir, en un campo de interpretación numerable.

---

[13] La función *Mdl* asociaba a las variables predicativas funciones de individuos que tomaban sus argumentos en *En-Di* y sus valores en el dominio formado por los dos objetos *Vri* y *Fal*.

Basta con considerar solamente los casos en que estas funciones toman por argumentos individuos de *En-Dip*.

Como todo individuo de *En-Dip* es también un individuo de *En-Di*, se ve que esto se reduce a utilizar solamente una parte de la definición de estas funciones de individuos.

CHURCH ha demostrado cómo se puede modificar esta demostración a fin de evitar el empleo del axioma de elección [14].

208. NUEVA FORMA DEL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM [15].

Llamemos *lógica aplicada de predicados de primer orden* a todo sistema obtenido añadiendo a la lógica de predicados de primer orden ciertas constantes y axiomas apropiados. Utilizando un tal sistema, es posible formalizar ciertas teorías matemáticas. Así, es posible formalizar en el ámbito de una lógica aplicada de predicados de primer orden la aritmética y la teoría de conjuntos. (En el caso de esta última, se debe introducir en particular la relación de pertenencia $\in$ y axiomas adecuados para caracterizarla).

La lógica de predicados de primer orden es saturada semánticamente en sentido absoluto: la condición necesaria y suficiente para que una proposición de esta lógica sea derivable (en esta lógica) es que sea válida [16]. Pero si se considera una lógica aplicada de los predicados de primer orden, los axiomas de esta lógica y las proposiciones que se pueden derivar de ella no son ya necesariamente válidos en todo campo posible de interpretación.

Introduzcamos el teorema siguiente [17]:

(XCI) *La condición necesaria y suficiente para que una lógica aplicada de predicados de primer orden sea coherente sintácticamente es que sea coherente semánticamente.*

---

[14] CHURCH 15, págs. 86-89.

Para la demostración dada arriba, que sigue a la de SKOLEM 5, véase CHURCH 15, páginas 84-86.

Otras demostraciones han sido dadas. Véase RASIOWA y SIKORSKI 2, y BETH 8 y 9.

El Teorema de SKOLEM (en la forma en que ha sido demostrado por SKOLEM) se fundamenta sobre una hipótesis de coherencia semántica (puesto que trata de las clases de proposiciones que son realizables en un campo de interpretación no-vacío). GÖDEL ha demostrado el mismo teorema (en GÖDEL 2, Teorema IX), pero utilizando una hipótesis de coherencia sintáctica: su demostración se aplica a las clases de proposiciones coherentes en el sentido del § 187 (es decir, que no contienen simultáneamente una proposición y su negación).

Así, pues, se puede hablar, por una parte, del *teorema de* LÖWENHEIM-SKOLEM, y, por otra parte, del teorema LÖWENHEIM-SKOLEM-GÖDEL. El segundo implica el primero. Efectivamente, se puede obtener el segundo sin aportar modificaciones esenciales a la demostración de SKOLEM.

Las demostraciones de RASIOWA y SIKORSKI y BETH se refieren al teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM-GÖDEL.

La demostración de BETH (BETH 8 y 9) utiliza un método topológico. Para esta demostración véase también BETH 14, § 57, págs. 84-93. Véase también —a propósito del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM-GÖDEL— BETH 10.

[15] Se designa con el nombre de *teorema de* LÖWENHEIM-SKOLEM la generalización obtenida por SKOLEM del corolario de LÖWENHEIM.

[16] Véase § 37 y 48.

[17] Véase SKOLEM 5, HERBRAND 1 y GÖDEL 2.

Dicho de otra forma: que sea realizable, o también, que posea al menos un modelo, o que la clase de proposiciones derivables (axiomas y proposiciones que se pueden derivar de ella) sea realizable.

Por otra parte, el *teorema de* LÖWENHEIM-SKOLEM continúa siendo cierto si se añaden constantes a la lógica de predicados de primer orden.

Utilizando este teorema, tenemos: si una lógica aplicada de predicados de primer orden es coherente (sintácticamente), la clase de sus proposiciones derivables, al ser realizable en un cierto campo de interpretación (cualquiera), es realizable en un campo de interpretación numerable.

Dado un modelo para una lógica aplicada de predicados de primer orden, diremos que este modelo es *numerable* si constituye un campo de interpretación numerable (es decir, si su dominio de individuos es numerable).

Así, pues, llegamos a la forma siguiente del *teorema de* LÖWENHEIM-SKOLEM:

(XCII) *Toda lógica aplicada de predicados de primer orden que es coherente posee un modelo numerable.*

Como ha demostrado SKOLEM [18], este resultado puede ser aplicado en particular a la teoría de conjuntos tal como ha sido formulada por ZERMELO, pues esta teoría puede ser formalizada en una lógica aplicada de predicados de primer orden.

Así, si el sistema de ZERMELO es coherente, es posible llegar a una serie infinita de objetos (por ejemplo, la serie de los números enteros) tal que todos los axiomas de este sistema y todas las proposiciones que de él puedan derivarse se cumplan para los objetos de esta serie.

209. LA PARADOJA DE SKOLEM Y LA RELATIVIDAD DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS.

Esto hace aparecer una paradoja conocida como *paradoja de* SKOLEM.

En todo sistema clásico de la teoría de conjuntos es posible reconstruir la célebre demostración de CANTOR, que establece la existencia de conjuntos no-numerables.

Es presumible, por tanto, que no sea posible encontrar para tal sistema un modelo numerable. Pero el teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM nos demuestra que no es así.

Esta paradoja nos obliga a reconocer que ciertos conceptos matemáticos sólo tienen un sentido relativo y deben ser interpretados en relación al sistema de axiomas en el cual están expresados [19]. Esto es particularmente cierto para el concepto *numerable.* Conceptos que podían parecer absolutos (es decir, dotados de una significación unívocamente determinada) desde el punto de vista de una teoría ingenua de conjuntos pierden este carácter cuando nos situamos en el campo de las teorías formalizadas.

[18] SKOLEM 3.
[19] Véase SKOLEM 5.

El razonamiento por el cual CANTOR prueba que el conjunto de los números reales es no-numerable consiste en demostrar que no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de los números enteros.

El hecho de que este razonamiento pueda ser formalizado en los sistemas clásicos de la teoría de conjuntos indica simplemente que estos sistemas no son suficientemente capaces para dar un procedimiento de correspondencia apropiado.

El teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM nos demuestra que siempre es posible conseguir esta correspondencia situándose bajo un punto de vista sintáctico.

Lo que es numerable desde el punto de vista de la metalengua (en la que se realiza la demostración del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM) no lo es desde el punto de vista de la lengua-objeto (en la cual se formaliza la teoría cantoriana de conjuntos). O también: existe en la metalengua una función que establece una correspondencia biunívoca entre los individuos del modelo numerable considerado y la serie de los enteros, pero no existe una función de esta naturaleza en una lógica aplicación de los predicados de primer orden.

Como hace notar SHEPHERDSON [20], la formulación y la demostración de los resultados de LÖWENHEIM y SKOLEM utilizan una metalengua cuyos medios de expresión y de demostración rebasan los de una lógica aplicada de predicados de primer orden; especialmente utilizan la noción de *numerable.*

Si se considera esta lengua como una cierta forma de la teoría de conjuntos, se podrá demostrar en tal sistema —mediante los argumentos desarrollados arriba— que existe un modelo numerable para la teoría de conjuntos.

Pero no se podrá demostrar lo mismo en una teoría de conjuntos formalizada en una lógica aplicada de predicados de primer orden. Por tanto, se puede considerar sistemas diferentes para la teoría de conjuntos, dentro de los cuales los conceptos correspondientes no tienen la misma significación. Pero se ve que esta demostración de la existencia de un modelo numerable supone la coherencia de la teoría de conjuntos y la existencia de un determinado modelo que responda a determinadas condiciones.

Por tanto, se llega a la siguiente consecuencia: la no-unicidad de la teoría de conjuntos, tal como resulta del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM, presupone una cierta no-unicidad, pero ésta es de un carácter más débil.

Como ha demostrado WANG [21], es posible también interpretar de otra manera este mismo resultado:

El teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM nos indica que ningún sistema formal puede facilitarnos todos los conjuntos de enteros positivos. En efecto, sea *FL* un cierto sistema formal en el que se ha formalizado la teoría de conjuntos. Podemos enumerar las proposiciones derivables de *LF* y, en particular, las que afirman la existencia de un conjunto de enteros positivos. Sea, pues, *En* el conjunto de enteros positivos tal que, para todo *n*, *n* pertenecerá *a En* si (y solamente si) *n* no pertenece al conjunto

[20] SHEPHERDSON 1, part. III, pág. 159.
[21] WANG 9, pág. 442.

perteneciente a la *n*-ésima proposición de nuestra enumeración. Para el argumento de la diagonal, se puede demostrar que este conjunto *En* no puede corresponder a ninguna de las proposiciones de nuestra enumeración; en otros términos, que su existencia no puede ser demostrada dentro del marco del sistema *LF*. Existe, pues, al menos un conjunto de enteros positivos cuya existencia no puede ser demostrada en el marco del sistema *LF*.

210. Los modelos internos de Shepherdson.

Podríamos pensar, como consecuencia de los resultados de Löwenheim-Skolem, que los conceptos de la teoría de conjuntos adoptan siempre un sentido diferente en el sistema en que se formaliza esta teoría y en los modelos que se puede proponer para este sistema. También podría pensarse que su sentido es diferente, según los modelos que es posible utilizar.

En realidad, la relativización introducida por Skolem no es tampoco total. Como Shepherdson ha demostrado [22], dado un determinado concepto de la teoría de conjuntos, es posible definir una familia de modelos tal que, para todo modelo, perteneciente a esta familia, este concepto conserva el mismo sentido.

En tal supuesto, este concepto puede considerarse *absoluto* respecto a esta familia de modelos. Como puede verse, la relatividad de que habla Skolem no se introduce al nivel de los modelos, sino al de las familias de modelos.

Shepherdson utiliza una lógica aplicada de predicados de primer orden que corresponde a una cierta forma de la teoría de conjuntos. Denominemos a este sistema *LFE*. Este sistema se obtiene añadiendo a la lógica (pura) de predicados de primer orden dos constantes predicativas de un argumento, *ser una clase, ser un conjunto,* una constante predicativa de dos argumentos, *ser miembro de* [23], y dieciséis axiomas (ordenados en tres grupos, I, II y III) en los cuales figuran estas constantes. Para la derivación de ciertos teoremas utiliza axiomas suplementarios [24].

Considera únicamente *modelos internos.* Un *modelo interno* es aquel cuyo dominio de individuos se integra con objetos que juegan el papel de individuos en el sistema *LFE,* es decir, con clases y conjuntos propios de clases y conjuntos de *LFE.* O también: un modelo cuyo dominio de individuos es una parte del universo constituido por clases que satisfacen los dieciséis axiomas de los grupos I, II y III, y que pueden definirse por medio de los tres predicados *ser una clase* (del modelo *Md*), *ser un conjunto* (del modelo *Md*), *ser miembro de* (respecto al modelo *Md*), definiéndose a su vez estos predicados por medio de proposiciones de *LFE* en las que figuran las constantes predicativas correspondientes de *LFE.*

[22] Shepherdson 1, part. I. Shepherdson utiliza métodos introducidos por Gödel, en Gödel 18.

[23] Este predicado permite expresar que un elemento dado pertenece a un conjunto dado.

[24] La forma así obtenida para la teoría de conjuntos es la introducida por Gödel, en Gödel 18.

La definición de un modelo interno no requiere, por tanto, otros medios de expresión que los representables en *LFE*. No obstante, se puede considerar que el hecho de limitarse a tales modelos no restringe la generalidad de los resultados obtenidos. Si se pretende establecer de manera válida ciertas propiedades para un modelo dado, es preciso suponer, en efecto, que la metalengua en la que se define este modelo es coherente. Pero el sistema *LFE* es un sistema muy capaz, y se puede definir en este sistema la mayor parte de los modelos cuya definición sería posible según una metalengua cuya coherencia pudiese ser establecida al nivel actual de nuestros medios de demostración.

211. Conceptos absolutos de ciertos modelos.

Dado un modelo interno *Md*, se puede asociar a toda proposición A de *LFE* otra proposición B que denominaremos su *restricción respecto a Md*: las variables de A se restringirán a las clases y a los conjuntos de *Md* (es decir, se considerará que pueden ser reemplazadas solamente por clases o conjuntos de *Md*); los predicados *ser una clase, ser un conjunto, ser miembro de,* serán reemplazados por los predicados correspondientes de *Md*.

La restricción de una proposición de *LFE* pertenece necesariamente a *LFE*.

Las nociones y operaciones de la teoría de conjuntos, así como las clases y conjuntos particulares que puede ser preciso considerar, se definen mediante proposiciones de *LFE*. Dado un elemento de la teoría de conjuntos definido por medio de una proposición A de *LFE*, se dirá que este elemento es *absoluto respecto a un modelo interno Md* si la proposición A es equivalente (en *LFE*) a su restricción respecto a este modelo *Md* [25].

Shepherdson considera una familia particular de modelos internos: la de los *modelos completos*.

Un modelo interno *Md* se dice que es *completo* si responde a las dos condiciones siguientes:

1) El predicado *ser miembro de* de *Md* es el predicado *ser miembro de* del sistema *LFE*.

2) Si *Cl* es una clase de *Md*, todos los miembros de *Cl* son conjuntos de *Md*.

La pérdida de generalidad es escasa al limitarnos al estudio de los modelos completos.

Shepherdson demuestra, en efecto, que todo modelo interno que responde a ciertas condiciones bastante generales es isomorfo [26] de un modelo completo [27].

---

[25] Véase Shepherdson 1, Parte I, 2.10, pág. 178. Shepherdson utiliza la definición dada por Gödel 18, Definición 10, pág. 42.

[26] Véase § 27.

[27] Shepherdson 1, Parte I, Teorema 1.5, pág. 171.

Sobre la base de estas nociones, demuestra que un cierto número de elementos (nociones, operaciones, clases o conjuntos particulares) de la teoría de conjuntos son absolutos respecto a todo modelo completo [28].

Las nociones de *ordinal* y *cardinal* no disfrutan de esta propiedad. Sin embargo, se puede demostrar teoremas análogos a este respecto introduciendo hipótesis más restrictivas.

La noción de *ordinal* es absoluta respecto a cualquier modelo completo *Md* que responda a la propiedad siguiente:

Toda clase no-vacía de *Md* contiene un elemento que no tiene ningún elemento en común con ella misma [29].

Y la noción de *cardinal* es absoluta respecto a todo modelo completo *Md* que responda a la propiedad siguiente:

Toda sub-clase de una clase *Cl* de *Md* es una clase de *Md* [30]. La noción de *ordinal* es también absoluta respecto a los modelos de esta especie.

SECCIÓN 3.—LOS TEOREMAS DE HENKIN Y LOS MODELOS NO-REGULARES.

212. LA NO-SATURACIÓN DE LA LÓGICA DE PREDICADOS DE SEGUNDO ORDEN NO ES UNA PROPIEDAD ABSOLUTA.

HENKIN ha estudiado el problema de los modelos de la lógica de predicados de orden ω (que supone la teoría de tipos) [31].

Esta lógica incluye una infinidad numerable de categorías de variables.

Un campo de interpretación para esta lógica deberá comportar una infinitud numerable de dominios, de manera que se pueda asociar a cada categoría de variables un dominio del campo de interpretación considerado.

Como hemos visto [32], GÖDEL ha demostrado la saturación semántica absoluta de la lógica de predicados de primer orden: toda proposición derivable en esta lógica es válida, y recíprocamente [33]. Pero el teorema de GÖDEL demuestra que esta propiedad no se cumple desde el momento en que se pasa a la lógica de predicados de segundo orden. El teorema de GÖDEL nos enseña, en efecto, que en un sistema que

---

[28] SHEPHERDSON 1, Parte I, 2.210, 2.211 y 2.212. Los teoremas obtenidos por SHEPHERDSON son análogos a los teoremas 10.12 a 11.7 de GÖDEL 18.

[29] SHEPHERDSON 1, Parte I, 2.3, págs 182-86.

[30] SHEPHERDSON 1, Parte I, 2.4, págs. 186-190.

[31] HENKIN 4.

[32] Véase el § 48.

[33] Este resultado ha sido demostrado también por otros métodos. Véase HENKIN 2, RASIOWA y SIKORSKI 1, y BETH 8 y 9. Véase, igualmente, LOS 1, REICHBACH 1, RIEGER 1 y ROBINSON (ABRAHAM).

contenga la teoría de los números enteros [34], existe al menos una proposición que es válida y que, no obstante, no es derivable (es, incluso, indecidible). La no-saturación sintáctica (en sentido fuerte) de tal sistema supone su no-saturación semántica.

Pero es posible formalizar la teoría de los números enteros en la lógica de predicados de segundo orden mediante la introducción de una constante funcional. Esta lógica es, por tanto, no-saturada semánticamente. Con mayor motivo, esto se da en el caso de lógicas de predicados de orden superior.

Pero HENKIN ha observado que no puede tratarse de una saturación en el sentido absoluto, sino solamente de una no-saturación relativa a una determinada clase de interpretaciones.

La noción de *proposición válida* (para la lógica de predicados de segundo orden) está definida, en efecto, de la manera siguiente: una proposición (de esta lógica) es válida si se hace verdadera cuando los operadores proposicionales se interpretan a la manera habitual [35], cuando las variables individuales son reemplazadas por individuos tomados de un dominio cualquiera de elementos y las variables predicativas de n argumentos ($n \geqq 1$) por conjuntos tomados de *todos* los conjuntos de múltiplos de orden n, ordenados, de individuos (del dominio elegido).

Dicho de otra forma, se considera únicamente los campos de interpretación que incluyen:

1) Un dominio de individuos cualquiera.

2) Un dominio formado por los objetos *Vri* y *Fal.*

3) Un dominio funcional constituido por todas las funciones de n argumentos ($n \geqq 1$) definidos por los múltiplos de orden n ordenados de elementos del primer dominio, y tomando sus valores del segundo dominio. Una proposición se dirá que es válida si lo es respecto a todo campo de interpretación perteneciente a esta categoría.

Pero se puede modificar la condición relativa a las funciones, obteniendo así una clase *Cl-Ci* más general de campos de interpretación. Un campo de interpretación perteneciente a la clase *Cl-Ci* tendrá como dominio funcional una *cierta clase* solamente de funciones del tipo anteriormente indicado (correspondiendo, pues, a una cierta clase de conjuntos múltiplos de orden n ordenados de individuos pertenecientes al dominio de individuos del campo).

Así se obtiene una definición más general de la validez de una proposición: una proposición (de la lógica de predicados de segundo orden) se dirá que es *válida* si lo es respecto a todo campo de interpretación perteneciente a esta clase *Cl-Ci.*

Si utilizamos esta definición, se puede demostrar que la propiedad de saturación semántica (respecto a todo campo de la clase *Cl-Ci*) se extiende a la lógica de predicados de segundo orden e incluso a las lógicas de predicados de cualquier orden (comprendido el orden ω).

Estas consideraciones llevan a HENKIN a distinguir dos categorías de modelos: los modelos *regulares* y los modelos *no-regulares.*

---

[34] Es decir, en el cual se puede formalizar la teoría de los números enteros.

[35] Es decir, cuando son interpretados según su sentido intuitivo.

Las propiedades metateóricas que hacen intervenir la noción de modelo (tales como la coherencia semántica o la saturación semántica) pueden diferenciarse dentro de un mismo sistema, según que se refieran a modelos *regulares* o a modelos *no-regulares* [35 bis].

213. La noción de campo de interpretación regular.

Indiquemos con mayor detalle el planteamiento de este tipo de problemas.

Henkin estudia simultáneamente el caso de la Lógica de los predicados de orden ω. Denominemos a esta Lógica *LFP-ω*. Los resultados son extensibles *a fortiori* para las lógicas de predicados de orden finito.

Denominemos *campo de interpretación regular* a una familia de dominios que incluye:

1) Un dominio de individuos $En\text{-}Dm_1$.

2) Un dominio $En\text{-}Dm_0$ formado por los objetos *Vri* y *Fal*.

3) Una sub-familia de dominios funcionales $En\text{-}Dm_\alpha$, definida de manera inductiva a partir de los dominios $En\text{-}Dm_0$ y $En\text{-}Dm_1$, estando formado el dominio $En\text{-}Dm_{\beta\gamma}$ por el conjunto de *todas* las funciones definidas en $En\text{-}Dm_\gamma$ y que toman sus valores en $En\text{-}Dm_\beta$.

(Los índices α, β y γ designan tipos de expresiones; así, los predicados de individuos tienen por tipo 0 1, y así sucesivamente.)

Llamemos *distribución de variables* respecto a un campo de interpretación dado (del tipo anteriormente descrito) a una correspondencia que aplica las variables de *LFP-ω* sobre los dominios del campo de tal manera que una variable de un tipo determinado esté asociada a un elemento del dominio correspondiente.

A cada distribución de las variables asociamos una función de interpretación Mdl_i que permite hacer corresponder a toda proposición de *LFP-ω* uno de los objetos *Vri* o *Fal*.

Se dice que una proposición de *LFP-ω* es *válida respecto a un campo de interpretación regular* si, cualquiera que sea la distribución de las variables respecto a este campo, la función de interpretación asociada Mdl_1 hace corresponder a esta proposición el objeto *Vri*. Se dice que una proposición de *LFP-ω* es *válida en sentido regular* si es válida respecto a todo campo de interpretación regular que se pueda proponer para *LFP-ω*.

214. La noción de campo de interpretación general.

Denominemos *campo de interpretación general* a una familia de dominios que supone:

1) Un dominio de individuos $En\text{-}Dm_1$.

[35 bis] En lo que respecta al estudio de la saturación de los sistemas formales, véase también Wang 13, § 8, págs. 72-77.

2) Un dominio $En\text{-}Dm_0$ formado por los objetos *Vri* y *Fal.*

3) Una sub-familia de dominios funcionales $En\text{-}Dm_\alpha$, definida inductivamente a partir de los dominios $En\text{-}Dm_0$ y $En\text{-}Dm_1$, estando formado el dominio $En\text{-}Dm_{\beta\gamma}$ por una *cierta clase* de funciones definidas en $En\text{-}Dm_\gamma$ y que toman sus valores dentro de $En\text{-}Dm_\beta$; y tal que sea posible definir efectivamente una función de interpretación para toda distribución de las variables.

Todo campo de interpretación regular es general, pero la inversa no es cierta. Se puede demostrar, efectivamente, que existen campos de interpretación general que no son regulares.

Se dice que una proposición de *LFP*-ω es *válida respecto a un campo de interpretación general* si, cualquiera que sea la distribución de las variables respecto a este campo, la función de interpretación asociada Mdl_i hace corresponder a esta proposición el objeto *Vri.*

Se dice que una proposición es *válida en sentido general* si lo es respecto a todo campo de interpretación general que se pueda proponer para *LFP*-ω.

Se denomina *modelo regular* de *LFP*-ω a un campo de interpretación regular tal que toda proposición derivable de *LFP*-ω sea válida respecto a este campo.

Se denomina modelo general de *LFP*-ω a un campo de interpretación general tal que toda proposición derivable de *LFP*-ω sea válida respecto a este campo.

Se dice que una proposición de *LFP*-ω es *realizable en un campo de interpretación* (regular o general) si existe una distribución de las variables respecto a este campo tal que la función de interpretación asociada haga corresponder a esta proposición el objeto *Vri.*

Una proposición de *LFP*-ω se dice que es *realizable en un modelo* (regular o general) de *LFP*-ω si es realizable en el campo de interpretación que constituye este modelo.

Se dice que una proposición de *LFP*-ω es *realizable* si existe un campo de interpretación (regular o general) en el cual es realizable.

Una clase *Cl* de proposiciones de *LFP*-ω se dice que es *realizable en un campo de interpretación* (regular o general) si existe una distribución de las variables respecto a este campo tal que la función de interpretación asociada haga corresponder a cada proposición de esta clase el objeto *Vri.*

Una clase de proposiciones de $LFP\text{-}_\omega$ se dice que es *realizable en un modelo* de *LFP*-ω si es realizable en el campo de interpretación que constituye este modelo.

Una clase *Cl* de proposiciones de *LFP*-ω se dice que es *realizable* si existe un campo de interpretación en el cual es realizable.

Diremos que un campo de interpretación (regular o general) de *LFP*-ω es numerable si todos sus dominios son (cuando más) numerables. Y diremos que una clase *Cl* de proposiciones de *LFP*-ω es *coherente* si no es posible, al añadir esta clase de proposiciones a los axiomas de *LFP*-ω, derivar de ella cualquier proposición de *LFP*-ω.

215. Los Teoremas de Henkin.

Sirviéndose de estas nociones, HENKIN establece tres teoremas, el segundo de los cuales constituye una generalización para el sistema *LFP*-ω del obtenido por GÖDEL para la lógica de predicados de primer orden. El tercero de estos teoremas permite generalizar al caso de *LFP*-ω el teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM.

1. (XCIII) *Si Cl es una clase coherente de proposiciones cerradas de LFP-ω, existe un campo de interpretación general numerable en el cual esta clase es realizable* [36].

Para demostrar este teorema (que juega un papel central en su teoría), HENKIN completa la clase *Cl* para obtener una clase coherente máxima, mediante la cual se pueda repartir las expresiones de *LFP*-ω en clases separadas: dos expresiones de *LFP*-ω pertenecen a una misma clase si se puede derivar de *Cl* una proposición que establezca entre estas expresiones una cierta relación de equivalencia [37]. Mediante estas clases se puede construir el modelo general cuya existencia afirma el teorema.

2. (XCIV) *La condición necesaria y suficiente para que una proposición de LFP-ω sea derivable en LFP-ω es que sea válida en sentido general* [38].

Este teorema afirma, por tanto, que la lógica de predicados de orden ω es saturada semánticamente respecto a todo campo de interpretación general.

3. (XCV) *La condición necesaria y suficiente para que una clase Cl de proposiciones cerradas de LFP-ω sea realizable en un campo de interpretación general numerable, es que todo subconjunto finito de Cl sea realizable* [39].

Si una clase *Cl* es realizable, sus subconjuntos también lo son, y, por consiguiente, esta clase es realizable en un campo de interpretación numerable.

Se trata, pues, de una generalización del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM:

(XCVI) *Si una clase (finita o numerable) de proposiciones de la lógica de predicados de orden ω es realizable (en un campo de interpretación cualquiera), es realizable en un campo de interpretación numerable.*

Estos teoremas se extienden a los sistemas que se pueden obtener añadiendo al sistema *LFP*-ω constantes y axiomas apropiados (lógicas aplicadas de predicados de orden ω).

Consideremos un sistema *LF* cuyos axiomas comporten los del sistema *LFP*-ω y, además, una serie (finita o infinita numerable) de proposiciones de una lógica apli-

---

[36] HENKIN 4, Teorema 1, pág. 85.

[37] Si se trata de proposiciones, esta relación es la equivalencia en el sentido de la lógica proposicional.

Si se trata de variables de un tipo cualquiera, esta relación expresa que tales variables cumplen los mismos predicados y corresponden, por tanto, a una generalización (a niveles cualesquiera) de la relación ordinal de igualdad.

[38] HENKIN 4, Teorema 2, pág. 88.

[39] HENKIN 4, Teorema 3, pág. 88.

cada (cualquiera) de predicados de orden ω y cuyas reglas de derivación sean las propias de *LFP*-ω.

Las proposiciones derivables de *LF* constituyen una clase de proposiciones de la lógica aplicada que se considera. Como el primer teorema de HENKIN se extiende a esta lógica, podemos decir: si el sistema *LF* es coherente, existe un campo de interpretación general numerable en el cual la clase de proposiciones derivables de *LF* es realizable. Si esto sucede cualquiera que sea la distribución de las variables respecto a este campo, este sistema es realizable en un modelo general numerable.

216. LOS MODELOS NO-REGULARES Y EL PROBLEMA DE LA CATEGORICIDAD.

En particular, se puede formalizar la teoría de los números enteros añadiendo al sistema *LFP*-ω la constante individual N_0, la constante funcional σ (función sucesor) y axiomas correspondientes a los de PEANO [40]. Denominaremos *LFP*-ωN al sistema así obtenido.

HENKIN demuestra que existe para este sistema modelos generales que no son regulares [41], designándolos *modelos no-regulares.*

Se considera generalmente que los axiomas de PEANO caracterizan totalmente la sucesión de números enteros, en el sentido de que constituyen un *sistema categórico,* es decir, a aquel cuyos modelos son isomorfos entre sí. (De manera más precisa: en el sentido de que todo sistema como el *LFN*-ωN es categórico en sentido absoluto).

Pero el axioma de inducción hace intervenir la noción de conjunto (pues la noción de conjunto puede considerarse correspondiente a esta propiedad: se puede hacer corresponder a una propiedad dada el conjunto de objetos que la cumplen). También hace intervenir la expresión *para todo conjunto de individuos.* Pero el universo que constituyen todos estos conjuntos puede variar de un modelo general a otro. Por tanto, se debe esperar a encontrar modelos no-regulares para el sistema de axiomas de PEANO.

Para demostrar que este sistema de axiomas es categórico, se razona de la manera siguiente.

Todo modelo de *LFP*-ωN debe contener al menos una clase de individuos numerable. En efecto, es posible formar en el sistema *LFP*-ωN las expresiones N_0, σ N_0, σ (σ N_0), etc., y demostrar, mediante el primero y segundo axiomas de PEANO [42], que estas expresiones son todas distintas. Estas expresiones podemos identificarlas a los números enteros.

---

[40] Por ejemplo, los axiomas que corresponden a los esquemas 1.1, 1.2 y 1.3 del sistema *LFG.* Véase § 79.

[41] HENKIN 4, págs. 89-90.

[42] Véanse los esquemas de axiomas 1.1 y 1.2 del § 79.

Sea entonces un modelo que contenga un dominio de individuos *En-Di* al que pertenecen los números enteros y, además, otros elementos. Suponemos, por tanto, que este dominio no corresponde de manera biunívoca a la serie de números enteros. Consideremos la parte de este dominio que contiene únicamente los números enteros; como contiene 0 (que corresponde a la expresión N_0 del *LFP-*ωN) y todos los individuos que es posible formar a partir de 0 mediante la función *sucesor* (que corresponde a la expresión σ de *LFP-*ωN), se puede demostrar, utilizando el axioma de inducción [43], que contiene todos los individuos del dominio *En-Di*, contrariamente a nuestra hipótesis.

En realidad, como observa HENKIN, este razonamiento no prueba que el sistema de axiomas de PEANO sea categórico. Prueba solamente que si este sistema es realizable en un modelo general y si, al mismo tiempo, este modelo posee un dominio de individuos *En-Di* que no es isomorfo con el de los números enteros, no puede contener el conjunto de individuos que contiene únicamente los individuos de *En-Di* que corresponden a los números enteros.

SKOLEM ha demostrado que es imposible caracterizar la sucesión de los números enteros por medio de un conjunto numerable de axiomas formulados mediante la lógica de predicados de primer orden (enriquecida con un cierto número de constantes).

El citado autor ha establecido este resultado construyendo, para cada conjunto de axiomas de este tipo, un conjunto de funciones de enteros que verifican estos axiomas y que poseen, sin embargo, un tipo de orden diferente al de los números enteros [44].

Denominemos *sistema de números no-regulares* a un dominio (al menos numerable) formado por individuos que verifican los axiomas de PEANO, y cuyo tipo de orden no es el mismo que el de la serie de los enteros [45].

Como ha observado HENKIN, es posible construir muy simplemente —basándose en el teorema tercero— para todo sistema obtenido añadiendo a *LFP-*ωN un conjunto cualquiera de axiomas (haciendo intervenir eventualmente otras constantes distintas a N_0 y σ) un modelo general que contiene un sistema de números no-regular. Basta con añadir al sistema una constante individual nueva, por ejemplo μ, y una serie de axiomas infinita: $\mu \neq N_0$, $\mu \neq \sigma\, N_0$, $\mu \neq \sigma\, (\sigma\, N_0)$, etc.

Todo subconjunto finito de proposiciones derivables de este sistema ampliado es realizable en un cierto campo de interpretación general. El conjunto de todas las proposiciones derivables de este sistema es, por tanto, realizable en un cierto campo de interpretación general numerable. Como esto se cumple cualquiera que sea la distribución de las variables correspondientes a este campo, esto constituye un modelo general numerable y este modelo responde a las condiciones deseadas.

---

[43] Véase el esquema de axiomas 1.3 del § 79.

[44] SKOLEM 6 y 7, citado por HENKIN, en HENKIN 4, pág. 90.

[45] Sea, por ejemplo, un dominio que incluye los números enteros (o un conjunto de individuos que corresponda a los números enteros) y, además, el individuo μ.

Si el sistema de axiomas se comporta como una constante individual suplementaria, el modelo lleva un gran número de individuos distintos a los enteros, y su tipo de orden es mucho más elevado que el de la serie de los enteros.

Generalizando este razonamiento, HENKIN llega a la conclusión siguiente: ninguna teoría matemática formalizada puede ser considerada como categoría (en sentido absoluto), a menos que el sistema de objetos del que se ocupa no sea finito. Más precisamente:

(XCVII) *Todo sistema formal coherente y que contiene al menos la teoría de los números enteros* [46] *admite modelos no-regulares y no puede, por tanto, ser considerado como categórico* [46 bis].

217. LOS MODELOS NO-REGULARES Y LA ω-COHERENCIA.

La existencia de modelos no-regulares permite explicar ciertas anomalías de la ω-coherencia. Todo sistema ω-coherente es coherente, pero la inversa no es cierta: TARSKI y posteriormente GÖDEL han demostrado que existen sistemas coherentes que no son ω-coherentes. (Se trata de sistemas lo suficientemente capaces para contener la teoría de los números enteros). Son estos sistemas que admiten modelos no-regulares.

Sea *LF* un cierto sistema que contiene la teoría de los números enteros. Supongamos que este sistema sea coherente, pero no ω-coherente. Existirá entonces en tal sistema una expresión predicativa $\mathfrak{P}$ tal que las proposiciones $\mathfrak{P}\ (N_0)$, $\mathfrak{P}\ (\sigma\ N_0)$, $\mathfrak{P}\ (\sigma\ (\sigma\ N_0))$, etc. ..., y $\sim\ (\mathfrak{X})\ \mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ son derivables en *LF*.

Las consideraciones que preceden demuestran que *LF* debe admitir (al menos) un modelo general que contenga un dominio de individuos que integren un sistema de números no-regular. En otros términos, este dominio comportará, además de los enteros, otros individuos.

Todas las proposiciones $\mathfrak{P}\ (N_0)$, $\mathfrak{P}\ (\sigma\ N_0)$, $\mathfrak{P}\ (\sigma\ (\sigma\ N_0))$, etc. ..., y $\sim\ (\mathfrak{X})\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{X})$ se convierten en enunciados verdaderos respecto a este modelo. Si *P* es el predicado correspondiente a $\mathfrak{P}$, tendremos: 0 cumple el predicado *P*, 1 cumple el predicado *P*, etcétera, y, sin embargo, todos los individuos de *En-Di* no cumplen el predicado *P*. Esto significa que uno al menos de los individuos de *En-Di* que no son enteros no cumple el predicado *P*. La aparente anomalía ha desaparecido [47].

218. LOS RESULTADOS DE ROSSER Y DE WANG SOBRE MODELOS NO-REGULARES.

Después de HENKIN, ROSSER y WANG han proseguido el estudio de los modelos no-regulares, obteniendo ciertos resultados metateóricos, algunos de los cuales deben ser interpretados como limitaciones.

---

[46] Es decir, en el que se puede formalizar esta teoría.

[46 bis] Sobre los modelos en general, y los modelos no-regulares en particular, véase también BETH 11 y BETH 14, Libro III, Cap. IV, págs. 78-117.

[47] Véase, a estos efectos, QUINE 8, en particular pág. 121. QUINE estudia el sistema escrito en QUINE 2, pero el alcance de sus consideraciones es absolutamente general.

ROSSER y WANG consideran sistemas lo suficientemente capaces para contener la teoría de los números enteros. Denominan *modelo no-regular* de un tal sistema a un modelo que posea una de las siguientes propiedades:

1) El predicado que representa la igualdad en el sistema no es el predicado de igualdad para los objetos del modelo.

2) La parte del modelo que representa los enteros positivos del sistema no está ordenada por el predicado $\leqq$.

3) La parte del modelo que representa los ordinales (eventualmente transfinitos) del sistema no está ordenada por el predicado $\leqq$ [48].

Los autores citados consideran el problema siguiente:

¿En qué medida es posible establecer, en un sistema dado, teoremas relativos a los modelos de este sistema o de otros sistemas menos capaces?

Adoptemos como punto de partida un sistema *LF* que puede ser uno de los que se utilizan comúnmente para formalizar las matemáticas ordinarias. (Este sistema debe ser en todo caso bastante capaz para contener la teoría de los números enteros y podrá incluir una fórmula más o menos fuerte de la teoría de conjuntos) [49].

Se puede demostrar en *LF* la fórmula siguiente del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM (extendido a *LF*):

Si el sistema LF es coherente, admitirá un modelo numerable. También se puede demostrar en *LF* el resultado de HENKIN: *Si el sistema LF es coherente, admite un modelo no-regular.*

Pero si *LF* es ω-coherente, es imposible demostrar en tal sistema que, si es coherente, admite un modelo regular [50]. De manera más general, sea LF_M un sistema tal que todo modelo regular de *LF* sea un modelo de LF_M. No es posible demostrar en LF_M que, si *LF* es coherente, *LF* debe admitir un modelo regular [51].

Este resultado continúa siendo válido si, en lugar de considerar sistemas tales como LF_M, se consideran extensiones de *LF* obtenidas formando ciertos conjuntos de pares ordenados de elementos [52].

Debe incluso ser posible que existan casos en que ni siquiera sea cierto que, si *LF* es coherente, posea un modelo regular.

Este caso existe, en efecto.

ROSSER y WANG demuestran que si el sistema de *New Foundations* de QUINE [53] es coherente, no admite modelo regular [54].

---

[48] Definido para los ordinales transfinitos, si el sistema incluye tales ordinales.

[49] El sistema *LFP-*ω es evidentemente un sistema de este género. Lo mismo ocurre con los sistemas *LFG* y *LFT* y demás sistemas de este tipo.

[50] ROSSER y WANG 1, § 5, pág. 123.

[51] ROSSER y WANG 1, § 5, pág. 123.

[52] ROSSER y WANG 1, § 6, págs. 123-128.

[53] QUINE 2.

[54] ROSSER y WANG 1, § 2, págs. 115-117

Por otra parte, si *LF* es un sistema que contiene la teoría de los tipos o una forma débil de la teoría de conjuntos [55], es posible construir sistemas más capaces en los cuales se pueda demostrar que *LF* posee, al menos, un modelo regular.

Partiendo de *LF*, ROSSER y WANG han construido una escala de sistemas LF_1, LF_2, ..., LF_n, tal que, en LF_{n+1}, se puede demostrar la existencia de un modelo regular (al menos) para LF_n [56]. Además, demuestran que si *LF* admite un modelo regular *Md* y si se añade a *LF* un nuevo axioma que afirme la coherencia de *LF*, se obtiene un sistema que admite también a *Md* como modelo y este sistema es coherente [57].

219. LOS MODELOS NO-REGULARES Y LA COHERENCIA.

Refiriendo los resultados de ROSSER y de WANG a sus propias investigaciones sobre modelos internos de la teoría de conjuntos, SHEPHERDSON hace notar que la existencia de un modelo regular para un sistema es una propiedad más fuerte que la coherencia [58]. Si un sistema admite un modelo regular, es coherente. Pero la inversa no se da necesariamente, como demuestra el ejemplo del sistema de los *New Foundations*.

Existen ciertamente sistemas que poseen modelos regulares. Consideremos, por ejemplo, un sistema que esté dotado de la teoría de tipos y tal que:

1) El conjunto de elementos del primer tipo (tipo base) es el conjunto de los enteros (o se corresponde biunívocamente con este conjunto).

2) El conjunto de los elementos del tipo $(n + 1)$ es la clase de todos los subconjuntos del conjunto de los elementos del tipo n.

Este sistema posee ciertamente un modelo regular, como lo demuestra su descripción. En general, un sistema no-coherente no posee modelos de ningún género.

Pero existe un caso intermedio: el de los sistemas que son coherentes y que no poseen más que modelos no-regulares. Se trata de sistemas en los cuales se ha renunciado a un cierto número de precauciones normalmente adoptadas en los sistemas clásicos (que admiten modelos regulares) para evitar todo peligro de contradicción.

A medida que se abandonan estas precauciones (por ejemplo, las limitaciones que se impone a la formación de las clases), el número de modelos posibles del sistema obtenido decrece.

No obstante, si se adoptan las precauciones necesarias, el sistema continúa siendo coherente y continúa admitiendo ciertos modelos. Pero estos modelos no son regulares. Los sistemas de este género presentarán particularidades que pueden parecer extra-

---

[55] Como el sistema *LFP*-ω. Un sistema de este tipo puede ser considerado como relativamente débil.

[56] ROSSER y WANG 1, § 3, págs. 117-122

[57] ROSSER y WANG 1, § 4, págs. 122-123.

[58] SHEPHERDSON 1, Parte III, pág. 167.

ñas desde el punto de vista de los sistemas clásicos. Pero esto no impide que puedan perfectamente ser utilizados para formalizar las teorías matemáticas, como los hechos se encargan de demostrar.

Así nos vemos obligados a reconocer que un sistema formal no debe poseer necesariamente modelos regulares para que se pueda utilizar como marco del razonamiento matemático. Y esto nos ayuda a comprender mejor el alcance de las observaciones de SKOLEM sobre el carácter relativo de las nociones matemáticas fundamentales, como "número entero", "conjunto", "número ordinal", "igualdad", "mayor que", etc. Cuando se manejan estas nociones en su sentido intuitivo (y éste es el sentido que se utiliza al nivel de las matemáticas no formalizadas), se les atribuye un cierto contenido que se considera absoluto.

Si todos los sistemas formales utilizables sólo poseyesen modelos regulares, este punto de vista absoluto podría considerarse fundado rigurosamente. Pero, como no sucede así, nos vemos llevados a abandonar este punto de vista y debemos admitir que existen varias estructuras posibles de "número", de "conjunto", de "ordinal", etc.

Todas estas nociones sólo reciben su contenido preciso en el marco del sistema formal en que se las define.

Es posible también que, desde el momento que se recurre a sistemas muy capaces (lo que es necesario si se pretende formalizar determinadas partes de la teoría de conjuntos), estas nociones reciben un sentido que se hace incompatible con su sentido clásico (el que reciben en sistemas de modelos regulares). Esto significa que todo sistema muy capaz está en el caso del sistema de los *New Foundations* de QUINE y no puede admitir otro tipo de modelos que los regulares [58 bis].

220. LOS RESULTADOS DE CARNAP SOBRE LA LÓGICA PROPOSICIONAL.

Merece señalarse también, a propósito de modelos, los resultados obtenidos por CARNAP sobre la *lógica proposicional* [59].

Para esta lógica puede proponerse un modelo en el que los operadores proposicionales se interpreten en términos de valores de verdad [60], de tal manera que cada operador se interprete según su significado intuitivo.

CARNAP define el *modelo no-normal* como un modelo en el cual determinados operadores reciben una interpretación no conforme con su significación intuitiva. Este mismo autor demuestra que es posible construir este tipo de modelos en la lógica proposicional clásica [61].

Existen dos categorías de estos modelos.

[58 bis] Sobre la significación del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM y del papel de los modelos no-regulares, véase WANG 13, § 7, págs. 69-72.

[59] Véase CARNAP 8.

[60] Según el método utilizado en el § 26.

[61] Véase, por ejemplo, la fórmula del § 4.

Para ciertos modelos no-normales, el operador de negación se interpreta de tal manera que una proposición ~ A no es siempre falsa cuando la proposición A es verdadera. En otros modelos no-normales, el operador de negación se interpreta de tal manera que una proposición ~ A no es siempre verdadera cuando la proposición A es falsa, y por otra parte el operador de disyunción se interpreta de manera tal que una proposición (A V B) no es siempre falsa cuando las proposiciones A y B son simultáneamente falsas.

CARNAP ha demostrado que añadiendo a la lógica de proposiciones clásica dos nuevas reglas de derivación, se puede obtener un sistema que no admite modelos no-normales.

SECCIÓN 4.—LIMITACIONES DE LAS LOGICAS COMBINATORIAS.

221. SATURACIÓN COMBINATORIA Y SATURACIÓN DEDUCTIVA.

Si bien su construcción se ha erigido sobre bases completamente distintas a las de los sistemas de que nos hemos ocupado hasta aquí, las *lógicas combinatorias* [62] presentan también una cierta propiedad metateórica de limitación. No nos es posible exponer aquí el detalle de la estructura de estas lógicas, pero daremos algunas indicaciones indispensables.

Podemos distinguir, siguiendo a CURRY [63], dos categorías de *variables formales* (variables que pueden pertenecer a un sistema formal): las *indeterminadas* y las *variables sustitutivas*. Las primeras son símbolos cuya significación no se ha fijado. Las *variables sustitutivas* son elementos (de un sistema formal) dotados de ciertas propiedades especiales de sustitución [64]. El mecanismo de sustitución es de una gran complejidad.

A fin de simplificar los fundamentos de la lógica matemática e intentar aclarar en su raíz las antinomias, algunos lógicos se han esforzado en construir sistemas en los cuales no figuran variables sustitutivas y para los cuales se descartan, por esta razón, los problemas de sustitución.

Estos sistemas constituyen las *lógicas combinatorias*. Es posible, en tales sistemas, definir funciones sin recurrir a la utilización de las variables sustitutivas, utilizando ciertas componentes llamadas *combinadores* [65].

---

[62] Véase § 44.

[63] CURRY 14, pág. 347.

[64] Así, las variables del sistema descrito en el § 6 son variables sustitutivas. También ocurre lo mismo con las variables de otros sistemas, que ya hemos considerado.

[65] Los *combinadores* pueden considerarse, desde un punto de vista intuitivo, como correspondientes a ciertas funciones. Así, hay un combinador que corresponde a la función de identidad: aplicado a una componente deja a ésta inmodificada. Hay un combinador que co-

Estos sistemas están sometidos a un tipo particular de limitaciones: no pueden poseer simultáneamente, so pena de ser no-coherentes, ciertas posibilidades de derivación y ciertas posibilidades de definición.

Para formular las cosas de manera precisa, hay que introducir dos nuevas nociones: las de *saturación combinatoria* y la de *saturación deductiva.*

Se dice que un sistema *LF* posee la *saturación combinatoria* si cumple las tres siguientes condiciones:

1. Posee una sola operación: la aplicación [66].

2. Posee un predicado de igualdad, =, que responde a las propiedades habituales de la igualdad. (Este predicado no es necesariamente una componente primitiva del sistema).

3. Permite practicar sin ninguna restricción la *abstracción funcional.* Es decir, que es posible representar por medio de una componente del sistema a toda función que se pueda construir en este sistema.

Sea *LF*-$\mathfrak{B}$ el sistema obtenido añadiendo a *LF* el símbolo $\mathfrak{B}$ como componente suplementaria, y sea Δ_F una componente de *LF*-$\mathfrak{B}$ (correspondiente a una función *F* de un argumento).

Entonces existe una componente Δ_F^* de *LF* tal que la expresión

(1) $\qquad \Delta_F^* \, \mathfrak{B} = \Delta_F$

es derivable en *LF*-$\mathfrak{B}$.

Podemos designar a Δ_F^* mediante la notación $[\mathfrak{B}]\, \Delta_F$.

La expresión 1(221) anterior se convierte entonces en:

(2) $\qquad ([\mathfrak{B}]\, \Delta_F)\, \mathfrak{B} = \Delta_F.$

La componente Δ_F^* es, por tanto, una componente que representa la función *F* tomada en sí misma [67].

(Utilizando nuevas extensiones de *LF,* se puede fácilmente describir esta condición en el caso de componentes que correspondan a funciones de varios argumentos.)

---

rresponde a una función de selección: aplicado a un par ordenado de componentes, sólo conserva la primera de éstas.

Otro combinador corresponde a la función de agrupamiento: aplicado a una tríada ordenada de componentes agrupa a las dos últimas de éstas. (En lugar de aplicar primeramente la primera a la segunda, y, después, el resultado obtenido, a la tercera, habrá que aplicar primero la segunda a la tercera, y después la primera al resultado obtenido: así, una expresión *abc* se convertirá en *a*(*bc*).)

Los combinadores pueden definirse cómodamente por medio del formalismo de la conversión-λ, de CHURCH. Pero también pueden definirse de manera autónoma: algunos combinadores, denominados *combinadores primitivos,* se definen mediante axiomas apropiados, y los demás combinadores se pueden definir mediante combinadores primitivos. Este es el procedimiento que se utiliza en las *lógicas combinatorias puras.*

[66] Esta operación corresponde, intuitivamente, a la aplicación de una función a su argumento, y permite obtener —partiendo de una componente dada de *LF*— otra componente de *LF.*

[67] Véase a este respecto el § 146.

Todo sistema formal puede ser transformado de tal manera que se verifique la condición 1. La condición 2 es escasamente restrictiva. Sólo la condición 3 es, por tanto, esencial.

Se dice que un sistema *LF* posee la *saturación deductiva* si cumple las tres condiciones siguientes:

1. Está dotado de un predicado, denominado *predicado de aserción,* cuya significación intuitiva es "es una aserción". (Por tanto, corresponde a una propiedad metateórica).

Este predicado es el único predicado del sistema que puede calificarse de componente primitiva. (Se pueden definir los restantes predicados por medio del predicado de aserción y por componentes apropiadas que no desempeñen el papel de predicados).

Se le designa mediante el signo $\vdash$, que se sitúa delante de la expresión a la que afecta.

Si Δ_i es una componente de *LF,* la expresión $\vdash \Delta_i$

es una proposición de *LF.*

2. Está dotado de una componente $\mathfrak{R}$ que corresponde a la operación de implicación (que, por tanto, desempeña la función de un operador de implicación en el sistema) y que satisface la regla de consecuencia:

$$\frac{\vdash \Delta_1 \qquad \vdash \mathfrak{R}\, \Delta_1\, \Delta_2}{\vdash \Delta_2} \quad .$$

3. El *teorema de la deducción* es válido para este sistema. Es decir: si se puede derivar la proposición $\vdash \Delta_2$ a partir de la proposición $\vdash \Delta_1$ unida eventualmente a otras premisas, entonces se puede derivar de estas otras premisas solamente la proposición $\vdash \mathfrak{R}\, \Delta_1\, \Delta_2$.

222. El Teorema de Kleene-Rosser-Curry.

Así se llega al teorema siguiente (*Teorema de* Kleene-Rosser-Curry):

(XCVIII) *Todo sistema que posee a la vez la saturación combinatoria y la saturación deductiva es no-coherente.*

Sea, en efecto, *LF* un sistema que responde a estas condiciones. Es posible demostrar que, si posee la saturación deductiva, se pueden derivar en este sistema todas las proposiciones

(1) $\quad \vdash \mathfrak{R}\, \Delta_1\, \Delta_2$

y (2) $\quad \vdash \mathfrak{R}\, [\mathfrak{R}\, \Delta_1\, (\mathfrak{R}\, \Delta_1\, \Delta_2)]\, (\mathfrak{R}\, \Delta_1\, \Delta_2)$.

Sea $\mathfrak{R}$ una componente de *LF* que representa la operación de negación en este sistema y sean $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{M}$ dos componentes de *LF* definidas como sigue:

$$\mathfrak{L} \equiv [\mathfrak{B}]\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{B}\ \mathfrak{B})$$
$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{L}\ \mathfrak{L}\ ^{68}.$$

En virtud de las condiciones definitorias de la saturación combinatoria estas componentes deben existir en *LF*.

Aplicando 2(221), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &\equiv ([\mathfrak{B}]\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{B}\ \mathfrak{B}))\ ([\mathfrak{B}]\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{B}\ \mathfrak{B}))\\ &= \mathfrak{R}\ ([\mathfrak{B}]\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{B}\ \mathfrak{B}))\ ([\mathfrak{B}]\ \mathfrak{R}\ (\mathfrak{P}\ \mathfrak{P}))\\ &= \mathfrak{R}\ \mathfrak{M}.\end{aligned}$$

Así, $\mathfrak{M}$ es una componente que es idéntica a su propia negación.

Se puede definir la negación de una expresión diciendo que esta expresión lleva a una solución cualquiera.

Por tanto, se puede definir $\mathfrak{R}$ de la manera siguiente:

$$\mathfrak{R} \equiv [\mathfrak{B}]\ \mathfrak{K}\ \mathfrak{B}\ \Delta_n$$

donde Δ_n es una componente cualquiera de *LF*.

Así, pues, tendremos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}\ \mathfrak{M} &\equiv ([\mathfrak{B}]\ \mathfrak{K}\ \mathfrak{B}\ \Delta_n)\ \mathfrak{M}\\ &= \mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \Delta_n.\end{aligned}$$

y por tanto:

(3) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{R}\ \mathfrak{M} = \mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \Delta_n.$$

En virtud de 1(222), tenemos:

$$\vdash \mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{M}.$$

Utilizando 3(222) se obtiene:

$$\vdash \mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ (\mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \Delta_n).$$

Y utilizando 2(222) y la regla de la consecuencia, se obtiene:

$$\vdash \mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \Delta_n.$$

Como $\mathfrak{K}\ \mathfrak{M}\ \Delta_n = \mathfrak{M}$, tenemos:

$$\vdash \mathfrak{M}.$$

Una segunda aplicación de la regla de la consecuencia nos da, por tanto, finalmente:

$$\vdash \Delta_n.$$

Así, pues, se puede derivar en *LF* cualquier proposición y *LF* no es coherente.

[68] $\mathfrak{M}$ es, por tanto, la componente obtenida aplicando la componente $\mathfrak{L}$ a sí misma.

Este resultado nos indica que la saturación combinatoria y la saturación deductiva son propiedades metateóricas incompatibles [69].

A causa de esta incompatibilidad ciertas lógicas combinatorias se han revelado no-coherentes.

KLEENE y ROSSER [70] lo han demostrado mediante el sistema de CHURCH [71]. Su demostración utiliza la paradoja de RICHARD. CURRY ha simplificado posteriormente esta demostración introduciendo algunas modificaciones en el sistema de CHURCH [72], y también ha demostrado que se puede obtener los mismos resultados haciendo uso de la paradoja de RUSSELL [73] y utilizando hipótesis menos restrictivas en lo que con-

---

[69] Todo este desarrollo está tomado de CURRY 15, págs. 361-364.

[70] KLEENE y ROSSER 1.

[71] CHURCH 1.

[72] CURRY 6.

[73] La *paradoja* de RUSSELL se refiere al predicado *impredicable*. Este predicado es un predicado de un predicado. Se dice que un predicado es impredicable cuando no puede ser aplicado a sí mismo. Una paradoja se obtiene formando el enunciado: *lo impredicable es impredicable.*

Esta paradoja puede expresarse, bajo forma simbólica, de la siguiente manera:

Sea P el predicado *impredicable.*

Un predicado cualquiera Φ tendrá la propiedad P, si Φ no puede ser aplicado a Φ.

Por tanto, se podrá definir P mediante la equivalencia

$$P\,\Phi \leftrightarrow \sim \Phi\,\Phi$$

Reemplazando la variable Φ por P, tenemos:

$$P\,P \leftrightarrow \sim P\,P$$

Se ve que es posible evitar la contradicción operando una clasificación de los predicados a niveles diferentes, como hace la Teoría de Tipos. Entonces, P y Φ pertenecen a niveles diferentes y no se puede sustituir Φ por P.

La componente $\mathfrak{L}$ anterior corresponde a P.

Si se utilizan las reglas de la teoría de tipos no es posible formar una expresión tal que $(P\,P \leftrightarrow \sim P\,P)$.

Pero aquí, en virtud de la hipótesis de la saturación combinatoria, la expresión $\mathfrak{M}$ existe ciertamente y está perfectamente definida.

Esta expresión sólo es paradójica en apariencia.

No lo sería, salvo en el caso de que constituyese una proposición, pero no es necesario que así sea. El que una expresión sea equivalente a su propia negación no tiene nada de paradójico, si esta expresión no es una proposición.

Si se pretende evitar la contradicción, se pueden seguir dos vías diferentes:

Se pueden modificar las propiedades del operador de implicación, de tal manera que la derivación descrita anteriormente no pueda efectuarse (bastaría, por ejemplo, con utilizar un operador de implicación para el cual la regla de la consecuencia y las proposiciones 1(222) serían válidas, pero para el cual las proposiciones 2(222) no serían válidas).

O bien se puede definir de manera rigurosa la categoría de las proposiciones, y especificar que la regla de la consecuencia y las proposiciones 1(222) y 2(222) sólo son válidas si Δ_1 y Δ_2 son proposiciones. Si se procede de esta manera, y si la categoría de las proposiciones está definida de tal suerte que la expresión $\mathfrak{M}$ no sea una proposición, el razonamiento anterior es imposible.

En efecto, sería muy difícil definir la categoría de las proposiciones. CURRY ha propuesto, para eliminar la contradicción, introducir una categoría más vasta de expresiones, a la que

cierne a la saturación deductiva [74]. (Esta forma de demostración ha sido adoptada anteriormente).

SECCIÓN 5.—SISTEMAS NO-GÖDELIANOS. SISTEMAS DE ESTRATIFICACION INTERNA.

223. EL SISTEMA LFM DE MYHILL.

Nos quedan por evocar algunos hechos que pueden ser considerados como consecuencias indirectas de los teoremas de limitación. Estos nos enseñan que en todo sistema lo suficientemente capaz deben aparecer aspectos de no-saturación. Podemos proponernos construir sistemas a los cuales estos teoremas, o al menos algunos de ellos, no sean aplicables. Pero cabe esperar que en tales teoremas se encuentren propiedades que manifiesten su carácter incompleto. Denominaremos *sistema no-gödeliano* a aquel al que no sea aplicable el Teorema de GÖDEL.

Los teoremas de limitación sólo se aplican a sistemas de una cierta capacidad. Es interesante preguntarse hasta dónde es posible llegar sin encontrarse en las condiciones previstas por estos teoremas.

MYHILL ha examinado este problema y construido un sistema *LFM* al cual el Teorema de GÖDEL y el *Teorema de la Verdad* no son aplicables, y que posee al mismo tiempo la máxima capacidad compatible con esta propiedad [75]. Este sistema lleva prácticamente, en su totalidad, la parte de la teoría de números que no está sujeta a las limitaciones descubiertas por GÖDEL y TARSKI.

La característica principal del sistema *LFM* es que no comprende operador de negación ni cuantificador de universalización [76], y por esta razón no es posible aplicarle los razonamientos de GÖDEL y de TARSKI.

MYHILL ha demostrado que este sistema *LFM* es coherente y saturado (semánticamente en sentido absoluto) y que contiene una representación del concepto de verdad que le es relativo [77].

---

denomina categoría de las *componentes canónicas*, haciendo jugar a estas componentes un papel análogo al de las proposiciones.

Véase, a este respecto, el § 227.

[74] CURRY 8.

[75] MYHILL 3.

[76] MYHILL demuestra que no es posible representar la operación de negación en su sistema.

[77] MYHILL señala que esta última propiedad pertenece también a la *Basic Logic*, de FITCH (véase FITCH 2 y 3), que no contiene ningún otro operador de negación, y a la extensión que FITCH ha dado de esta lógica (véase FITCH 6). Esta extensión lleva un operador de negación, pero no lleva el principio de "exclusión de tercero". Hay que señalar que la propiedad aquí considerada es menos fuerte que la tratada en el Teorema de la Verdad. Este teorema demuestra que, en un sistema *LF* que responde a ciertas propiedades, la Teoría del Predicado *Vri* relativa a un sistema *LF*, es formalizable en este sistema si éste contiene una expresión predicativa

También demuestra, por otra parte, que la condición necesaria y suficiente para que un predicado de números enteros sea representable en *LFM* es que corresponda a una clase recursivamente enumerable.

Es posible representar en *LFM*, no solamente los números enteros y racionales, sino también una cierta clase de números reales. Por otra parte, *LFM* puede ser utilizado como metalenguaje (gracias al procedimiento de aritmetización). Considerando *LFM* desde este punto de vista, se observa que el predicado *ser una proposición derivable* (en un sistema cualquiera de tipo clásico [78]) es representable en *LFM*, y que también es posible demostrar en *LFM*, para toda proposición que sea efectivamente derivable (en un sistema clásico cualquiera), que posee esta propiedad. Por otra parte, el sistema *LFM* no es resoluble (en sentido sintáctico).

224. Los sistemas de estratificación interna.

Cuando se pretende formalizar un dominio más vasto de las matemáticas hay que tener en cuenta forzosamente, de una u otra manera, los hechos de limitación.

Como hemos visto, la mayor parte de éstos tienen por efecto introducir una jerarquía de sistemas. Ya se trate de demostrar la coherencia de un sistema, de formalizar la teoría de la verdad correspondiente, o de demostrar ciertas propiedades de sus modelos, nos vemos obligados a utilizar un sistema más capaz.

Esta jerarquía de sistemas toma el carácter de una *estratificación externa*: los sistemas que se superponen son distintos entre sí. Pero podemos encontrarnos con sistemas dotados de una *estratificación interna*: se trata de sistemas que comportan una serie indefinida (ordenada) de niveles de demostración [79].

Tales sistemas están constituidos en realidad por una infinidad de sub-sistemas encerrados los unos en los otros. Dado un sub-sistema de nivel *n*, es posible encontrar

---

$\mathfrak{Vri}$ tal que, para toda proposición A de *LF*, siendo *a* el número-G de A, la equivalencia ($\mathfrak{Vri}$ N_a $\dashv\vdash$ A) es derivable en *LF*. Myhill no demuestra que la teoría del predicado *Vri* relativo a *LFM* sea formalizable en *LFM*, sino solamente que este predicado es representable en *LFM*, en el sentido siguiente:

Existe en *LFM* una expresión predicativa $\mathfrak{Vri}$ tal que, si A es una proposición de *LFM* y *a* el número-G, la condición necesaria y suficiente para que la proposición $\mathfrak{Vri}$ *N* sea derivable en *LFM* es que la proposición A sea derivable en *LFM*. Esta propiedad del sistema *LFM* tiene por contrapartida una limitación relativa a la negación: Myhill demuestra que es imposible introducir por definición una operación de negación en *LFM*.

Y también demuestra que si se añade a *LFM* un operador de negación como nueva componente primitiva, entonces el Teorema de Gödel es aplicable a *LFM*.

Myhill ha construido otro sistema que lleva el cuantificador de particularización, pero no el de universalización ni los operadores de negación, de conjunción, de disyunción, de implicación y de equivalencia, y que disfruta de las mismas propiedades que el sistema *LFM* en lo que concierne al predicado *Vri* (que le es relativo). (Véase Myhill 3 bis).

[78] Como el de los *Principia Mathematica*.

[79] Por consiguiente, no se trata solamente de niveles de expresión. Un sistema que comprendiese la teoría de tipos no sería un sistema de estratificación interna, en el sentido en que aquí lo utilizamos. Lo que es esencial en la estratificación interna es que se pase de un nivel al siguiente, añadiendo ciertas posibilidades de derivación.

un sub-sistema de nivel superior en el cual se pueda demostrar ciertas propiedades metateóricas del sub-sistema de nivel *n* que no sería posible demostrar en este mismo sub-sistema. Estos sistemas no poseen la misma estructura que los sistemas examinados hasta aquí: son indefinidamente extensibles. Y es precisamente por este trazo por lo que manifiestan un carácter de no-saturación.

225. La jerarquía de implicaciones de Church.

Church ha construido un sistema que utiliza la conversión-λ [80] y que presenta una estructura de este género. Este sistema es coherente [81], pero no responde a las condiciones del Teorema de Gödel, siendo, por tanto, no-gödeliano.

Su propiedad más característica es que está dotado, no de un operador, sino de una jerarquía transfinita de operadores de implicación [82]. A cada uno de estos operadores se asocia un número ordinal y se pueden introducir operadores asociados a ordinales cada vez más elevados (llegando tan lejos como se desee en la segunda clase de números ordinales).

A cada operador de implicación corresponde una clase de cuantificadores de universalización. (Para cada nivel se puede definir un cuantificador de universalización de orden 1, que se aplique sobre los números enteros; un cuantificador de orden 2, que se aplique a las funciones de enteros, etc.).

Aunque este sistema no lleve proposiciones indecidibles manifiesta indirectamente el efecto de los mecanismos de limitación. Su aparente saturación se obtiene al precio de la unicidad de la noción de implicación y de la noción parecida de cuantificador universal. Cada una de estas nociones es reemplazada por un conjunto infinito de nociones diferentes que no es posible reunir bajo un concepto único. En general, se puede considerar que a cada operador de implicación corresponda un sub-sistema del sistema considerado. Existen teoremas indemostrables a un nivel dado que se hacen demostrables a condición de que se pase a un nivel más elevado [83].

226. Papel de la paradoja de Richard.

Las razones que han llevado a Church a introducir su jerarquía de implicaciones están ligadas a un examen de la *paradoja de* Richard, que arroja una cierta luz sobre la estructura de los sistemas formales [84].

---

[80] Church 4, Capítulo VI, págs. 45-50

[81] Church 4, pág. 49.

[82] La idea de una jerarquía transfinita de operadores de implicación se encuentra igualmente planteada en Church 3.

También se encuentra la idea de una jerarquía transfinita de operadores en Church 2. Pero allí se trata de cuantificadores de universalización.

[83] Según la naturaleza del teorema de que se trate, se deberá ir más o menos lejos en la jerarquía de los subsistemas.

[84] Véase Church 3.

Un sistema formal sólo puede estar dotado de una infinidad numerable de expresiones [85].

Consideremos un sistema *LF* y supongamos que contiene una formalización de la Teoría de Números. Ciertas expresiones de *LF* corresponden, pues, a funciones de enteros de un solo argumento.

Sea F_n la función a la que corresponde la *n*-ésima expresión de este tipo.

Entonces podremos definir una función *G* de la manera siguiente:

$$G\,\alpha = 1 + F_\alpha\,\alpha\,.$$

Esta función es diferente de cada una de las funciones F_α y no le corresponde ninguna expresión de *LF.*

Parece, pues, que no existe ningún sistema formal en el que todas las funciones de enteros sean representables.

Pero nuestra función *G* puede considerarse como definida para todos los valores de su argumento. En efecto, se puede dar que, al recorrer la sucesión ordenada de las expresiones de *LF,* encontremos una expresión de la que podremos determinar si representa o no una función de enteros (por ejemplo, una expresión que corresponda a un problema aritmético no resuelto). Si esta expresión tiene en número *m,* la función *G* no estará definida por el valor *m* de su argumento.

La definición de la función *G* no es, por tanto, constructiva. (Sólo lo sería si se hubiesen resuelto efectivamente todos los problemas de la Teoría de Números). De tal manera, nuestra afirmación no puede ser mantenida. Podemos, pues, considerar legítimamente que existen sistemas formales en los cuales todas las funciones de enteros que son efectivamente definibles (desde un punto de vista intuitivo) son representables.

Entre tanto podemos volver a considerar nuestro argumento desde otro punto de vista.

El conjunto de las proposiciones derivables de un sistema es numerable [86].

Si un sistema *LF* contiene una formalización de la Teoría de Números, debe estar provisto, para cada expresión $\mathfrak{F}$ correspondiente a una función de enteros *F,* una proposición derivable del tipo:

$$\mathfrak{Ren}\,\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Ren}\,(\mathfrak{F}\,\mathfrak{X})\,[87].$$

---

[85] En efecto, se puede establecer el rango de las componentes primitivas del sistema en un cierto orden y definir el nivel de una expresión como el mínimo número *n* tal, que esta expresión contenga solamente *n* componentes primitivas y no contenga más allá de la *n*-ésima. El conjunto de las expresiones de un nivel dado es finito; por tanto, se puede ordenar fácilmente, obteniéndose así una enumeración del conjunto de las expresiones del sistema.

[86] Es posible enumerar las proposiciones que se pueden derivar en una etapa, después las que se pueden derivar en dos etapas, y así sucesivamente. Se obtiene, finalmente, una enumeración del conjunto de las proposiciones derivables del sistema.

[87] La significación intuitiva es la siguiente: si $\mathfrak{X}$ corresponde a un número entero, $\mathfrak{FX}$ corresponden, igualmente, a un número entero. Tal proposición afirma que la expresión $\mathfrak{F}$ corresponde, efectivamente, a una función de enteros.

Denominemos a tal proposición *proposición asociada a la función F.*

Podremos extraer del conjunto de las proposiciones derivables de *LF* las proposiciones de este tipo.

Llamemos F_p a la función que corresponde a la *p*-ésima proposición de este tipo [88]. Como podemos enumerar efectivamente las proposiciones derivables de *LF* y reconocer siempre si una proposición dada tiene la forma de una proposición asociada a una función, podremos esta vez proseguir efectivamente la enumeración de las funciones F_i hasta el punto que deseemos. Y, como consecuencia de esto, podremos dar una definición constructiva de la función *G*.

Por consiguiente, podremos concluir: o existen funciones definibles intuitivamente y para las cuales se pueden derivar en *LF* las proposiciones que les van asociadas, o bien existe al menos una cierta expresión $\mathfrak{H}$ de *LF* para la que se puede derivar la proposición

$$\mathfrak{Ren}\ \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Ren}\ (\mathfrak{H}\ \mathfrak{X}),$$

y que, sin embargo, no representa una función de enteros [89]. Esto equivale a decir: nuestro sistema, o no puede bastar para la formulación de la Teoría de Números, o contiene teoremas que corresponden a enunciados falsos.

Podemos salir de esta dificultad subrayando que esta conclusión sólo es válida en la medida en que el sistema *LF* responda a las condiciones siguientes: o bien *LF* sólo lleva un único operador de implicación, o lleva un conjunto de operadores de implicación, y entonces existe un método efectivo que permite determinar si una expresión dada es uno de estos operadores. (Si el sistema *LF* no cumple esta condición, entonces no será posible extraer efectivamente del conjunto de proposiciones derivables de *LF* las proposiciones asociadas a una función).

Basta, pues, para obviar la dificultad descrita, con utilizar un sistema que lleve una pluralidad de operadores de implicación, definidos de manera que:

a) Sea posible, para cada operador, demostrar por un argumento intuitivo que corresponde a una operación de implicación.

b) No haya procedimiento efectivo uniforme que permita determinar si una expresión dada es uno de estos operadores.

El sistema que hemos descrito en el parágrafo anterior está construido de acuerdo con este programa.

Ahora bien, este sistema no es gödeliano, lo que hace aparecer la relación que existe entre la *paradoja de* RICHARD y el *Teorema de* GÖDEL.

---

[88] O también, sea F_p la función a la cual está asociada la *p*-ésima proposición de este tipo.

[89] En este último caso, como esta proposición no corresponde a una función de enteros, si *h* es el número de esta proposición, la función *G* no estará definida por el valor *h* de su argumento, y no podemos decir, por tanto, que existen funciones intuitivamente definibles, para las cuales no se pueden derivar las proposiciones que van asociadas a ellas.

227. La jerarquía de niveles de canonicidad de Curry.

Curry ha propuesto una idea análoga partiendo del análisis de un determinado sistema de Lógica Combinatoria [90].

Para evitar las dificultades ligadas al teorema de Kleene-Rosser-Curry, se ha visto llevado a introducir la noción de *componente canónica.* Las *componentes canónicas* se definen por medio de axiomas y reglas apropiadas. Intuitivamente, representan proposiciones. Estipulando que las variables sintácticas (utilizadas en la formulación de saturación deductiva del sistema considerado) no pueden ser reemplazadas sino por componentes canónicas (y no por componentes cualesquiera del sistema), se escapa a la contradicción sobre la que reposa este teorema [91].

La noción de canonicidad está definida por medio de un cierto predicado *Can.* Si Δ_n es una componente cualquiera, la expresión *Can* Δ_n podrá ser interpretada como significativa de que Δ_n es una componente canónica. Sea d el número-G de Δ_n y $\mathfrak{Can}\ N_d$ la proposición que representa en el sistema el enunciado *Can* Δ_n.

Pero el sistema así construido es suficientemente capaz para permitir una formalización de la Teoría de Números. Por tanto, se deberá esperar que presente, de una manera u otra, uno de los caracteres de no-saturación.

Efectivamente, se observa que si se considera la proposición $\mathfrak{Can}\ N_d$ como componente canónica por sí misma, cualquiera que sea la componente Δ_n, se puede derivar una contradicción en el sistema. Por tanto, deberemos introducir una jerarquía (eventualmente transfinita) de *niveles de canonicidad.*

La proposición $\mathfrak{Can}\ N_d$ será canónica de segundo nivel. En general, si Can_n es el predicado que expresa la propiedad *ser una componente canónica del n-ésimo nivel,* y si $\mathfrak{Can}_n$ es la expresión que representa a Can_n en el sistema, toda expresión tal que $\mathfrak{Can}_n\ N_i$ será una componente canónica de $(n + 1)$-ésimo nivel.

228. La jerarquía de implicaciones de Myhill.

Myhill [92] ha redescubierto ideas análogas partiendo del sistema de Fitch [93]. Los sistemas clásicos [94] evitan las paradojas imponiendo ciertas restricciones a la formación de clases. Ackermann [95] y Fitch han utilizado otro procedimiento: estos auto-

[90] Curry 7, págs. 62 y 63.

[91] Como ha demostrado Curry, se puede establecer la existencia de esta contradicción, sirviéndose de la *paradoja de* Russell. La demostración se hace, en tal caso, según el mecanismo indicado en el § 222.

La categoría de *componentes canónicas* se define de tal forma que la expresión $\mathfrak{M}$ no es una componente canónica. Por tanto, no se la puede hacer intervenir en la regla de la consecuencia ni es una proposición de las fórmulas 1(222) y 2(222). La demostración del § 222 se hace, pues, imposible.

[92] Myhill 10.

[93] Fitch 2. Repetido y desarrollado en Fitch 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

[94] Sistema de los *Principia Mathematica* y sistemas emparentados.

[95] Ackermann 8. Este sistema ha sido ampliado en Ackermann 9 y 10.

res admiten la formación de clases sin restricción, pero modifican la lógica de proposiciones incluida en el sistema (en particular abandonando el principio de exclusión de tercero).

Introduciendo estas modificaciones en su sistema (que lleva además una teoría de combinadores), FITCH a redescubierto la contradicción ligada al Teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY y, para evitarla, ha debido sacrificar el cierre de su sistema respecto a la aplicación de la regla de consecuencia.

Inspirándose en ideas de ACKERMANN sobre la implicación [96], MYHILL ha encontrado que la presencia de esta contradicción en el sistema se debía a un fenómeno de circularidad ligado al concepto de implicación. Y este autor ha propuesto prescindir de él recurriendo a una jerarquía de implicaciones, a la manera de CHURCH.

Obtiene, así, un sistema suficientemente capaz para comprender las matemáticas clásicas, a excepción de la Teoría de Conjuntos de CANTOR. Este sistema es cerrado respecto a la aplicación de la regla de consecuencia, pero el *Teorema de la Deducción* adopta una forma menos capaz: si una proposición B puede derivarse de una proposición A sin hacer uso de un operador de implicación de orden superior a n, tendremos el teorema: A *implica* B *a nivel* $(n + 1)$.

229. EL SISTEMA DE WANG.

Finalmente, y en fecha más reciente, WANG ha descrito las grandes líneas de un sistema extremadamente capaz al cual no se aplica el Teorema de GÖDEL (al menos de forma directa) [97]. (La cuestión de saber si es posible construir en este sistema proposiciones indecidibles por métodos directos aún no ha sido resuelta).

Este sistema no es, hablando propiamente, un sistema formal en el sentido de los sistemas clásicos, sino más bien un esquema de sistemas. Puede ser definido como la reunión de una jerarquía transfinita de sub-sistemas, cada uno de los cuales se caracteriza por un número ordinal que se puede considerar *constructivo* [98].

Para todo ordinal μ, al menos hasta un cierto elemento de la segunda clase, se puede demostrar la coherencia del sub-sistema de orden μ y formalizar la teoría de la verdad relativa a este sub-sistema en el sub-sistema de orden $(\mu + 2)$.

El sistema de WANG es indefinidamente extensible. Se presenta en la forma de una Teoría de Conjuntos. Cualquiera que sea el nivel alcanzado, no es posible señalar

---

[96] Véase ACKERMANN 8.

[97] WANG 10 y 11. Véase en particular WANG 11, págs. 247-249; también, WANG 13, § 9, págs. 77-82.

[98] WANG emplea este término en un sentido más lato que CHURCH y KLEENE (véase a este respecto el § 182). Los ordinales que utiliza en cada una de las etapas de la construcción de su sistema son ordinales que pueden ser definidos por medio de procedimientos de definición y de demostración ya disponibles en este momento.

un límite a las posibilidades de construir nuevos conjuntos partiendo de los ya obtenidos. Por tanto, todo límite asignable puede ser rebasado; no es posible fijar un límite que agotase todas las posibilidades del sistema. En este sentido puede decirse que posee una no-saturación de un tipo especial: se trata de un sistema de auto-engendramiento indefinido.

Del mismo modo que en el sistema de CHURCH la noción de implicación es reemplazada por un conjunto infinito de nociones de implicación diferentes, e igual que en el sistema de CURRY la noción de canonicidad se despliega en una jerarquía de nociones de canonicidad diferentes, así, en el sistema de WANG, la noción de conjunto se encuentra relativizada en relación al nivel en que se sitúa.

En cada nivel se introducen nuevas posibilidades de construcción, y así se obtiene una clase de conjuntos más vasta. Además, para todo ordinal μ (al menos hasta un cierto elemento de la segunda clase), se puede hallar en el sub-sistema de orden (μ + + 2) una función que enumere los conjuntos de orden μ (definibles en el sub-sistema de orden μ). De esta manera una clase de conjuntos puede no ser numerable a un nivel determinado (por medio de procedimientos disponibles en un sub-sistema dado); pero se hace siempre numerable si se la eleva en dos unidades por encima de este nivel.

230. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE EL ALCANCE DE LOS RESULTADOS PRECEDENTES.

Estos diferentes resultados vienen a mostrarnos que los hechos de limitación están probablemente vinculados a mecanismos más profundos que los que aparecen en el curso de las demostraciones de los teoremas de limitación. Existen, en efecto, sistemas a los que no se aplican estos teoremas y que, sin embargo, comportan aspectos de no-saturación.

Es lícito pensar que estos diferentes hechos tienen una raíz común. Lo que, en determinados casos, se traduce en la existencia de proposiciones indecidibles o en forma de una inadecuación entre un sistema y su metateoría (o algunas de sus partes), se traduce en otros casos por la descomposición de ciertas nociones y por la posibilidad de una progresión indefinida.

Finalmente, ya sea preciso recurrir a una estratificación externa o a una extratificación interna, siempre hay que sacrificar la unidad del sistema.

No es posible incluir en un sistema todas las formas de razonamiento intuitivo que el proceso de la razón discursiva pueda proponernos. Dado un sistema cualquiera, siempre es posible enriquecerlo, pero nunca se puede asegurar haber agotado el campo del discurso, ni siquiera haber alcanzado el límite de lo que es efectivamente formalizable.

El dominio de lo formal no implica la posibilidad de lo completo.

Capítulo X

Sugestiones filosóficas

231. Ojeada general sobre los hechos de limitación.

Podemos clasificar como sigue los resultados tratados en los capítulos precedentes:

1. Teorema de Gödel en sus diferentes formas [1], generalización de este Teorema [2] y teoremas conexos [3].

2. Teoremas sobre los límites de reflexividad de los sistemas formales: corolario de Gödel y su generalización por Rosser [4], Teorema de la Verdad [5], Teorema de Tarski sobre la noción de *definibilidad* [6], teoremas de Rosser y Wang [7].

3. Teoremas relativos al problema de la decisión: teoremas básicos [8] y consecuencias desde el punto de vista de la resolubilidad de ciertos sistemas formales [9].

4. Teoremas que establecen vínculos entre diferentes categorías de resultados: Teorema de la Estratificación de Kleene y su generalización [10] y consecuencias de este Teorema [11], Teorema de Post y sus consecuencias [12], Lema y Teorema de Tarski [13], generalizaciones semánticas del Teorema de Gödel [14] y relación de estos resultados con el Teorema de la Verdad [15].

---

[1] Enunciados VI (91), LXXVI (194), LXXVII (194), LXXVIII (194), LXXIX (194).

[2] Enunciados VII (109), IX (115), X (116), XI (117), XIII (123), XIV (123), XV (123), XVI (123), LXXXIII (198).

[3] Enunciados XVIII (126) y XIX (126).

[4] Enunciados XX (127) y XXI (128).

[5] Enunciado LXXXV (200).

[6] Enunciado LXXXVII (205).

[7] Véase § 218.

Es preciso relacionar a esta categoría de teoremas el resultado obtenido por Beth, sobre la función de Berry relativa a un sistema *LF*. (Véase nota 5 del capítulo precedente).

[8] Enunciados XXXVII (151), XLIII (155) y XLVI (156).

[9] Enunciados XL (153) y L (159).

[10] Enunciados LXIV (174) y LXVIII (184).

[11] Enunciados LXV (177), LXVI (178) y LXVII (179). Véase también § 182.

[12] Enunciados LVII (163), LIII (161), LVIII (164) y LIX (164).

[13] Enunciados LXIX (188) y LXX (189).

[14] Enunciados LXXI (190), LXXII (190), LXXIII (191), LXXX (195), LXXXIV (198) y LXXXVI (201).

[15] Enunciado LXXV (193) y § 199.

5. Teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY [16].

6. Resultados sobre los campos de interpretación y los modelos: Teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM en sus diferentes formas [17] y consideraciones sobre la relatividad de los conceptos matemáticos [18], Segundo Teorema de HENKIN [19], resultados sobre la categoricidad de los sistemas de axiomas [20].

7. Existencia de sistemas no-gödelianos y sus propiedades [21].

Los teoremas del grupo 1 muestran que todo sistema formal de una cierta capacidad contiene proposiciones que corresponden a enunciados verdaderos y que, sin embargo, son indecidibles [22].

Los teoremas del grupo 2 nos enseñan que un sistema formal no puede reflejarse totalmente en sí mismo: no es posible representar en un sistema todas las propiedades metateóricas que a éste se refieren.

Así, no se puede representar en un sistema la noción de *objeto definible en este sistema.* No se puede demostrar, en un sistema que responda a ciertas condiciones de coherencia, que este sistema admita un modelo regular. Ni siquiera se puede demostrar, en un sistema coherente, que este sistema sea coherente [23].

Los teoremas del grupo 3 ponen de manifiesto que existen problemas de decisión insolubles, y en particular que el problema de la decisión para un sistema formal sólo puede ser resuelto por el hecho de que este sistema posea una determinada capacidad.

Los teoremas del grupo 4 nos hacen percibir que los hechos de limitación cuya existencia queda atestiguada por los teoremas de los grupos 1 a 3 están emparentados entre sí.

El Teorema de Estratificación de KLEENE indica que se puede encontrar una raíz común al Teorema de GÖDEL y al de CHURCH: es un hecho que las propiedades

---

[16] Enunciado XCVIII (222).

[17] Enunciados LXXXVIII (206), XC (206) XCII (208) y XCVI (215).

[18] Véase §§ 209, 210 y 211.

[19] Enunciado XCIV (215).

[20] Enunciado XCVII (216), §§ 216 y 220.

[21] §§ 223, 225, 227, 228 y 229.

[22] Ciertas formas del teorema de GÖDEL afirman simplemente la existencia de proposiciones indecidibles. Otras formas del teorema afirman la existencia de clases incompletas. Pero el hecho fundamental es el mismo en ambos casos; las proposiciones que son indecidibles en las clases incompletas consideradas corresponden a enunciados verdaderos.

[23] Recordemos que la existencia de un modelo regular es una propiedad más fuerte que la coherencia.

Al grupo 2 se liga el resultado que concierne a la función de BERRY sobre un sistema *LF*: esta función no es representable en este sistema. Se trata de un claro hecho de limitación que se refiere al poder reflexivo de los sistemas formales. La noción de *función de* BERRY *relativa a un sistema LF* hace intervenir las propiedades que posee este sistema *LF* en cuanto a presentación de números enteros. Decir que la función de BERRY relativa a un sistema *LF* no es representable en este sistema equivale a decir que no se puede disponer de ningún medio que permita determinar, en este sistema, para todo entero *m*, cuál es el menor entero *n* que no puede ser definido en el sistema *LF* por medio de una expresión que contenga, como máximo, *m* componentes primitivos de *LF*.

metateóricas que hacen intervenir predicados recursivos no son todas del mismo nivel, sino que se distribuyen en una jerarquía irreductible de niveles.

Se pueden construir propiedades metateóricas de un cierto nivel tales que todo sistema donde estas propiedades pueden expresarse es no-resoluble. Y, por otra parte, dado un sistema de una cierta capacidad, se pueden construir propiedades metateóricas de un cierto nivel a las que corresponderán, en tal sistema, proposiciones indecidibles.

POST ha demostrado de otra forma que existe un vínculo entre el Teorema de GÖDEL y los problemas de decisión, redescubriendo la existencia de proposiciones indecidibles (en ciertos sistemas) a partir de un Teorema relativo a un problema de decisión insoluble.

Finalmente, las investigaciones de TARSKI permiten demostrar el Teorema de GÖDEL por medio de procedimientos semánticos y establecen un vínculo entre este teorema y el Teorema de la Verdad. El Lema de TARSKI (que demuestra la existencia de una proposición análoga a la proposición indecidible de GÖDEL) da simultáneamente la clave de estos dos teoremas.

El Teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY establece para las lógicas combinatorias una propiedad análoga a la que es objeto del Teorema de GÖDEL. Este último teorema nos permite, en efecto, decir que todo sistema suficientemente capaz que sea sintácticamente saturado es no-coherente.

Los resultados del grupo 6 nos enseñan las relaciones existentes entre un sistema y sus modelos. El Teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM muestra que los conceptos matemáticos no poseen un sentido absoluto, sino relativo al nivel del lenguaje en el que se los sitúa.

El Segundo Teorema de HENKIN pone de manifiesto que las propiedades metateóricas de un sistema pueden variar según la naturaleza de los modelos que se considere. Y las investigaciones relativas a los modelos patentizan que un sistema formal de una determinada capacidad ofrece posibilidades varias de interpretación.

Finalmente, la existencia de modelos no-regulares nos obliga a admitir que las nociones matemáticas básicas, una vez expresadas en el marco de un sistema formal, pueden adoptar un sentido que se desvía de su sentido clásico, y que puede, incluso, hacerse incompatible con éste.

232. LA INTERPRETACIÓN DE LOS HECHOS DE LIMITACIÓN. OBSERVACIÓN PREVIA.

Hasta aquí nos hemos situado en el terreno de los hechos: hemos clasificado un cierto número de resultados, operado ciertas aproximaciones, situado unas respecto a otras los teoremas de que nos hemos ocupado.

En un cierto sentido está todo dicho: los hechos evocados son claros por sí mismos, su significación es suficientemente evidente y hacen manifiesta, a la vez, la capacidad de los métodos formales y las condiciones en las que operan con eficacia.

Sin embargo, podemos proponernos abandonar el dominio de las consideraciones formales para abordar otro plano del análisis que podría denominarse, si se quiere, filosófico. Los hechos que nos hacen descubrir las investigaciones sobre los fundamentos pueden ser considerados como datos a la luz de una problemática que no se interese ya en las propiedades de los sistemas formales en cuanto tales, sino en la naturaleza de los sistemas formales en sí mismos, en su papel en la economía del conjunto del pensamiento, en lo que ellos aportan al conocimiento de la estructura de la existencia humana en general.

Hay lugar para una reflexión que, situándose resueltamente fuera del marco del procedimiento formal, intente captarlas de manera global y comprender su sentido. Una reflexión de este tipo deberá esforzarse en situar los distintos procedimientos formales en la totalidad de la vida del conocimiento, en comprender cómo se articulan a otros procedimientos que pertenecen a esta misma vía, cómo están constituidas y cuál es su finalidad. Los resultados metateóricos son como indicaciones que deben hacer posible remontarse a ciertas estructuras fundamentales de la experiencia.

En particular, los hechos de limitación surgen en el camino del esfuerzo de elucidación radical que el pensamiento matemático ha emprendido a partir de su propia experiencia. Deben manifestar, por tanto, las condiciones a que está sometido este pensamiento; deben enseñarnos algo sobre la manera en que este pensamiento se liga a su objeto.

No podemos intentar aquí una interpretación de conjunto del pensamiento y ser de las matemáticas. Nos proponemos solamente, al situarnos en la perspectiva de tal problemática, sugerir algunos elementos de interpretación en lo que concierne a los hechos de limitación [24].

Entre los diferentes hechos de limitación evocados en los precedentes capítulos, el que ha tenido mayor repercusión y el más significativo ha sido el que pone en evidencia el Teorema de GÖDEL.

Como este teorema puede prestarse a ciertos malentendidos, conviene, antes de interrogarse sobre la significación positiva de los hechos de limitación, llevar a cabo una puesta a punto destinada a prevenir sobre falsas interpretaciones posibles.

---

[24] A fin de evitar todo malentendido, es importante distinguir el plano de las investigaciones formales del plano en que se sitúan estas consideraciones.

Como subrayan fuertemente los formalistas, el estudio de los fundamentos de las matemáticas debe emprenderse independientemente de cualquier apriorismo filosófico. En este punto, los formalistas divergen intensamente de los intuicionistas e incluso de HILBERT. (Véase, por ejemplo, a este respecto, CURRY 17, págs. 229 y 232.)

La concepción de las matemáticas como ciencia de sistemas formales responde a esta preocupación.

El uso del método formal nos permite elucidar los *problemas de fundamento* sin poner en juego ninguna concepción previa del ser matemático. Así se hace posible un desarrollo totalmente autónomo y homogéneo de la ciencia matemática. Por tanto, no puede intentarse reintroducir subrepticiamente consideraciones filosóficas allí donde, justamente, se ha conseguido descartarlas. Pero es lícito introducir después algunas consideraciones de naturaleza filosófica, considerando los resultados formales como hechos propuestos a la reflexión.

Es indiscutible que los resultados de GÖDEL han marcado un fracaso relativo de la tentativa hilbertiana. HILBERT creía, en efecto, poder fundamentar el conjunto de las matemáticas clásicas por medio de una teoría de la demostración que se desarrollase totalmente en un marco estrictamente finitista; para este autor se trataba de justificar el uso del concepto de infinito en matemáticas (no solamente bajo la forma de infinito potencial, como en análisis infinitesimal, sino también en la forma del infinito actual, como en la Teoría de Conjuntos de CANTOR) mediante consideraciones finitas. Su distinción de la matemática y de la metamatemática no tenía otro fin que dotar al pensamiento matemático de un punto de apoyo sólido en un dominio totalmente accesible a la intuición, susceptible de prestarse a verificaciones efectivas en todas sus partes.

Identificando la existencia matemática sobre la no-contradicción, HILBERT esperaba reducir el tratamiento de los problemas de existencia a manipulaciones siempre efectuables. Pues si la matemática autoriza las especulaciones sobre el infinito actual, e incluso llega a abrirnos el acceso a jerarquías cantorianas de infinitos, la metamatemática es el dominio de las operaciones efectivas.

Las demostraciones de no-contradicción y, de manera general, todas las demostraciones matemáticas, deben realizarse enteramente bajo el control de la intuición, en el sentido de que deben desarrollarse en el marco de una pura combinatoria.

HILBERT considera que la matemática pertenece enteramente al orden de lo decidible. Así, en su memoria *Sur l'infini*[25], en la que propone una solución positiva al *problema del continuo* (que pregunta si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de números reales (que se puede asimilar al conjunto de las funciones enteras) y la segunda clase de ordinales de CANTOR), enuncia dos lemas, el primero de los cuales viene a decir que este resultado es válido con toda generalidad si lo es en la hipótesis en que los problemas matemáticos son resolubles, es decir, en que todas las funciones de enteros pueden ser definidas mediante recursiones ordinarias o transfinitas (donde intervienen la operación lógica *Para todo X* ...), y el segundo afirma que toda función definida mediante recursiones transfinitas puede quedar definida mediante recursiones ordinarias. El papel de estos lemas es, por tanto, establecer que se puede conseguir una solución al problema del continuo, limitándose a considerar que los objetos matemáticos definibles mediante recursiones ordinarias, y excluyendo consiguientemente toda apelación al infinito (bajo la forma de las operaciones lógicas de generalización *Para todo objeto* y *Existe un objeto tal que*).

El Teorema de GÖDEL nos ha enseñado que desde el momento en que una teoría posee una cierta capacidad (y este es el caso de la aritmética ordinaria), su no-contradicción sólo puede ser establecida en una metateoría donde intervengan procedimientos de demostración más capaces que los de la teoría misma, lo que supone que la metamatemática no puede contentarse con un marco estrictamente finitista.

[25] HILBERT 7.

También nos ha patentizado que un sistema formal nunca puede ser considerado como una representación adecuada de la teoría matemática que trata de expresar, al menos en el sentido de que no permite decidir efectivamente sobre la validez de ciertos enunciados. La matemática hilbertiana sólo puede aplicarse a teorías estrictamente formalizadas; sus resultados sólo valen, por tanto, para lo que encierran los formalismos que ella estudia. Esto significa que no puede pretender alcanzar una especie de verdad matemática absoluta y que, de todas maneras, dentro de lo que puede alcanzar, subsisten aspectos de indeterminación.

Por otra parte, los resultados relativos al problema de la decisión (ligados a los de GÖDEL, como lo han demostrado los trabajos de KLEENE) nos han enseñado que hay problemas de decisión irresolubles, y en particular que ciertos problemas metamatemáticos no pueden recibir solución efectiva. Estos autores han demostrado que las matemáticas no pueden fundamentarse totalmente sobre procedimientos efectivos y que la existencia matemática, por consiguiente, no se circunscribe por las fronteras de lo efectuable.

Pero si los resultados de GÖDEL y de CHURCH han impuesto una revisión de las concepciones hilbertianas sobre los fundamentos de las matemáticas, no puede decirse que signifiquen el fracaso total de la tentativa hilbertiana. Simplemente, han precisado en qué sentido y con qué medios tal intento podía ser conseguido. La distinción entre teoría y metateoría ha quedado establecida; los problemas metateóricos (y, en particular, el de no-contradicción) quedan planteados, pero los cuadros metateóricos han debido ser flexibilizados y ampliados y, por ende, la noción de existencia matemática ha recibido una interpretación menos rígida que el pensamiento hilbertiano.

Acechan aquí dos errores de interpretación que debemos esforzarnos en evitar. El primero consistiría en dar al Teorema de GÖDEL un alcance que no tiene, viendo en él una especie de fracaso del método formal.

Si se encuentran proposiciones indecidibles, ¿no es obligado sospechar que las empresas de formalización sólo nos proporcionen una visión empobrecida de la realidad y que sacrifiquen a un falso rigor el contenido de verdad, que pertenece propiamente al dominio de las matemáticas? Y, por otra parte, si la justificación de las evidencias aparentemente más fundadas dependen de una demostración de no-contradicción que retrocede en cierto modo hasta el infinito, ¿no habrá que renunciar a esta pseudojustificación que parece no poder acabarse nunca, regresando a las evidencias que siempre han sido la base efectiva de las grandes creaciones matemáticas? En definitiva, si es cierto que lo formal comporta limitaciones consabidas, ¿no nos hará perder todo contenido la preocupación de lo formal?

Pero preciso es percibir que las limitaciones aquí consideradas no tienen un carácter absoluto, ni significan que el método formal esté condenado a la esterilidad, limitándose únicamente a circunscribir su campo de eficacia.

Lo que en realidad nos enseñan, no es que la investigación del rigor comporte estrechos límites, más allá de los cuales se pierda el contacto con la verdad; al contrario: esta investigación muestra las insuficiencias del razonamiento natural y de

las evidencias demasiado inmediatas, y que, en este sentido, constituye el instrumento indispensable de acceso a la verdad.

Las limitaciones no constituyen barreras que nos encerrarían en la vanidad de un discurso sobre sí mismas, sino que trazan las perspectivas según las cuales, el ser matemático se hace accesible, dando una forma más precisa al dominio de lo racional.

Otro malentendido consistiría en rehusar al Teorema de GÖDEL todo alcance, viendo simplemente en él la realización de una contradicción velada.

Como se ha visto, la demostración de GÖDEL está basada sobre una forma de enunciado paradojal. Pero el mecanismo de esta demostración nos revela que la transcripción formal de un enunciado circular es perfectamente legítima si se cuida de establecer la distinción rigurosa entre el formalismo utilizado y su metateoría, y, al mismo tiempo, disponemos de medios formales suficientes para representar en este formalismo ciertas categorías de enunciados de su metateoría. Allí donde el razonamiento natural se ve conducido a un callejón sin salida, el razonamiento formalizado puede ofrecer procedimientos perfectamente correctos; el método formal nos permite precisamente criticar las pseudoevidencias del discurso no formalizado y situar mejor las fronteras de lo contradictorio, enseñándonos que éstas no se encuentran allí donde el discurso no formalizado nos invita a encontrarlas.

No existe, pues, ni fracaso de la empresa hilbertiana de formalización ni mantenimiento puro y simple de las posiciones hilbertianas. El recurso a la formalización continúa siendo indispensable si se pretende fundamentar de manera rigurosa la exposición matemática; pero, al hacer aparecer propiedades que se sustraen al razonamiento natural, el éxito de las investigaciones formales lleva a un reajuste de las intuiciones a que habían conducido las primeras fases del razonamiento.

No es posible reducir todo a lo decidible —y este hecho puede ser considerado cierto—, pero lo decidible no agota las posibilidades de lo constructivo.

233. INTUICIÓN Y FORMALIZACIÓN.

Si tratamos de aislar cuanto puede haber de común en todos los resultados recordados en el § 231, constatamos que afectan a todas las relaciones entre sistema formal y lenguaje no formalizado.

Las expresiones que figuran en un sistema formal pueden interpretarse, es decir, puestas en correspondencia con expresiones extrañas al sistema (y que pueden pertenecer, bien a otro sistema, bien a una lengua no formalizada). Puede decirse que, en tal caso, reciben un significado externo.

Pero tales expresiones poseen, en el marco del sistema a que pertenecen, un sentido independiente de toda interpretación: este sentido es fijado por las reglas de formación y de derivación del sistema. Toda expresión construida de manera conforme a las reglas de formación se considera que posee un sentido y que puede figurar en las derivaciones del sistema. Y, por otra parte, las diferentes posibilidades de derivación establecen entre las expresiones de un sistema toda una red de relaciones que

contribuyen a fijar su sentido. Cada una de las expresiones de un sistema formal (correctamente formadas) posee, pues, una significación interna que está determinada, por una parte, por el conjunto de las relaciones que sostiene con las restantes expresiones del sistema desde el punto de vista de las posibilidades de derivación presentadas en el sistema.

La estructura de los sistemas formales es tal que esta significación puede ser analizada de manera rigurosa mediante un examen metateórico adecuado.

Contrariamente, las expresiones de un lenguaje no formalizado poseen una significación que se origina en su relación con procedimientos efectivos u objetos que pueden ser conseguidos mediante tales procedimientos (por ejemplo, en la percepción visual o en un gesto de prehensión). Un lenguaje no formalizado se apoya en una experiencia vivida y las significaciones que se constituyen en tal lenguaje se refieren, en definitiva, al contenido de esta experiencia.

Las significaciones a que sirve de vehículo el lenguaje matemático en particular, se arraigan en la experiencia *sui generis* mediante la cual hemos tenido acceso al dominio de la realidad matemática. Los objetos matemáticos no están dados como tales en el campo de la percepción y no pertenecen a un mundo puramente inteligible con el que podríamos establecer relación inmediata. Se nos manifiestan a través de ciertas evidencias, pero estas evidencias están mediatizadas por construcciones apropiadas que utilizan, a uno u otro título, los datos perceptivos (ya se trate de construcciones geométricas o de manipulaciones efectuadas sobre símbolos). Además, estas evidencias se encadenan según itinerarios que no se pueden recorrer arbitrariamente. Determinada evidencia nos lleva a otra determinada evidencia. Y esto es cierto no sólo para los nexos demostrativos, que nos permiten pasar de una propiedad a otra, sino también, y más profundamente, para la forma en que las teorías se construyen. El dominio de los objetos matemáticos no se nos muestra como un espectáculo en el que todos los puntos fuesen igualmente accesibles. Este dominio se desvela progresivamente ante nuestros ojos, y cada nuevo paso abre nuevas perspectivas. La existencia de otros objetos u otras estructuras se llega a descubrir solamente por el estudio de las propiedades de un cierto objeto o de una cierta estructura [26]. Cuando hemos conocido de estos nuevos objetos o estructuras un conocimiento suficiente podemos definirlos de manera autónoma, sin apelar a las teorías anteriores en las que la nueva estructura tuvo su origen. (Muy a menudo, estas teorías anteriores se integran en la nueva teoría como casos particulares). Esto demuestra que los conceptos no se fijan de una vez para siempre; que nuevas evidencias pueden constituirse a partir de evidencias anteriores; en una palabra, que la experiencia matemática está animada de una vida interna.

En el movimiento incesante que encadena a las teorías entre sí, surgen campos jalonados de nuevos problemas y nuevos conceptos, y se elaboran las significaciones de las que el lenguaje matemático no formalizado extrae su sustancia. De esta manera, el campo intuitivo se identifica al de la experiencia matemática: actos

[26] Así, a través del estudio de ciertos problemas planteados por el Análisis Infinitesimal, se llegó a descubrir las estructuras topológicas.

mediante los cuales descubrimos un objeto nuevo y, analizándolo, lo convierten en algo significativo.

Todos los elementos del campo intuitivo están indisolublemente ligados entre sí. Cada concepto remite a los demás y lleva en sí la vida entera de las matemáticas. El análisis de un determinado contenido intuitivo va haciendo referencia progresiva a todos los pasos que han hecho posible su aparición y, finalmente, a todas las etapas del pensamiento matemático desde sus orígenes.

Pero si el pensamiento matemático pretende conseguir el objeto tal como es, debe conseguir aislarlo de la experiencia vivida en la que se manifiesta y representarlo bajo una forma que sólo conserve de la intuición datos completamente elementales, fácilmente controlables y verificables. Su esfuerzo se centra en purificar la intuición en que se apoya, en arrancarla a su confusión inicial y endurecer las significaciones para revestirlas de un contenido plenamente determinado y seguro. Esto se hace especialmente urgente cuando se choca con dificultades (como las que aparecen en la Teoría de Conjuntos) que manifiestan precisamente los defectos de la intuición.

En el momento en que aparece la exigencia del rigor, el recurso a la formalización se hace totalmente necesario. El sistema formal se convierte entonces en instrumento y objeto del pensamiento matemático; bajo su forma más abstracta, la matemática es la ciencia de los sistemas formales.

Tenemos, por consiguiente, un proyecto de formalización que es inherente a la empresa matemática; inscrito ya en sus primeras etapas, se hace cada vez más aparente a medida que esta empresa se desarrolla y descubre estructuras más generales y, por consiguiente, más fundamentales.

Naturalmente este proyecto nunca queda explicitado; no viene dado anticipadamente en forma de un ideal, ni siquiera en forma de una ley arquitectónica; no se encuentra sino en las realizaciones efectivas que delimitan, en cada momento de su progresión, el campo abarcado por la ciencia matemática. Su contenido sólo se puede conocer mediante una operación reflexiva, analizando los modos de su actualización.

Entonces se hace posible percibir, en la prolongación de sus instauraciones actuales, lo que constituye su objetivo implícito. La ambición del proyecto de formalización integral es elaborar un sistema que contenga en sí mismo la génesis de su propio sentido y que pueda desde ese momento ser considerado como algo autónomo.

Un sistema de esta naturaleza integraría todo el campo accesible a la intuición, pero al mismo tiempo quedaría aislado de toda referencia a la intuición. Recapitulando todos los resultados del pensamiento matemático, contendría en sí mismo la clave de todos los desarrollos ulteriores. Una vez construido, proliferaría por sí mismo, descubriendo de forma progresiva todas las virtualidades inscritas en el campo de lo deductivo. Aplicando uniformemente procedimientos establecidos de una vez para siempre, haría superflua toda iniciativa verdadera del pensamiento: ofrecería un cuadro operatorio en cuyo recinto todo problema podría encontrar solución de tipo mecánico. Sería capaz, en fin, de reflejarse totalmente en sí mismo: suministraría todos los procedimientos necesarios para formular y resolver los problemas que pudiesen formularse a su respecto y sería, en sí mismo, su propia metateoría.

Lo que persigue el proyecto de formalización integral es, pues, la constitución del objeto matemático total. Pues desde el momento en que el campo intuitivo queda absorbido en el sistema, éste no puede considerarse como un mero instrumento. Al hacerse coextensivo a la realidad que trataría de conocer, no se distingue ya, finalmente, de la realidad misma.

La distancia que en la investigación separa el pensamiento de su objeto, desaparece; el ente matemático está entonces simple e inmediatamente presente, mostrándose tal cual es. Al dejar de desbordar su representación, se identifica con ella; ya no hay que alcanzarlo: su accesibilidad se consigue parte a parte, en la totalidad de sus articulaciones.

El objeto total es también un objeto que se sostiene solo, sin el socorro del pensamiento. Elaborado en una experiencia no está en continuidad con esta experiencia, superándola y sustituyéndola. Puede decirse que, al absorber el campo intuitivo, absorbe la actividad misma en que se ha revelado progresivamente este campo. No es ya término de una experiencia: la experiencia es abolida en la presencia. Esto significa que toda dualidad queda suprimida: dualidad del ser y su representación, dualidad del pensamiento y de su objeto.

Mientras que el ente matemático no se muestra al pensamiento sino a través de ciertas representaciones (forzosamente parciales), permanece distinto de este pensamiento, como horizonte de su esfuerzo. En el momento en que se hace totalmente manifiesto y en que, por consiguiente, deja de distinguirse de sus representaciones, ya no queda lugar para esta inadecuación que caracteriza un pensamiento en devenir. La presencia es acto. En ella el pensamiento viene a coincidir con su objeto de tal manera que se puede hablar de una absorción del pensamiento en el objeto con más propiedad que el objeto en el pensamiento.

El sistema total no es objetividad pura, sino síntesis de objetividad y de subjetividad. Es realidad inteligible, pero inteligible en sí misma: su sentido no se adquiere a través de una referencia o una conciencia, sino en sí misma. Es decir, que el sistema total es una realidad totalmente separada del pensamiento y totalmente reflejada en sí misma. Si el ente matemático se hace presente en el sistema, es que, por el sistema, se hace presente a sí mismo.

Nos encontramos, pues, ante la idea-límite de un sistema perfectamente cerrado que no remite nada ni ningún concepto al exterior del sistema. Cortado de toda raíz y de todo horizonte, viviendo de su propia inteligibilidad, uniendo paradójicamente los caracteres de la cosa a los de la consciencia. El advenimiento de un sistema así realizaría la desintegración de la experiencia, el fin del diálogo incesante con el mundo que constituye la vida de la ciencia, y el establecimiento de una totalidad cerrada, plena y silenciosa en la que no habría ya ni mundo ni ciencia, sino solamente el retorno eterno de lo homogéneo, el cambio perpetuo de lo idéntico a sí mismo [26 bis].

[26 bis] Las relaciones entre intuición y formalización han sido discutidas por muchos autores. En particular, BETH ha mostrado el papel que juega la intuición en matemáticas, en un estudio que pone precisamente en evidencia la significación filosófica de los hechos de limitación. (Véase BETH 1 ter.)

234. Significación de los hechos de limitación. La dualidad irreductible de lo intuitivo y lo formal.

Debe quedar perfectamente claro que no tratamos aquí sino de una idea-límite, que no tiene significación sino en la medida en que expresa, bajo forma teológica, el sentido inmanente de una empresa actual. Como tal, esta idea no puede ser actualizada, puesto que, en su contenido, corresponde a una metamorfosis radical de la experiencia tal como ésta es vivida. Los hechos de limitación nos indican con precisión por qué el sistema total sólo puede entenderse como idea-límite, mostrándonos, en efecto, que no es posible formalizar completamente el campo intuitivo; que la dualidad de lo intuitivo y lo formal continúa siendo irreducible.

El sistema formal presenta ventajas que no poseen las lenguas no formalizadas, pero no es posible representar de manera efectiva en el sistema formal todas las virtualidades que pueden ser evocadas en el cuadro de un lenguaje no formalizado. Hay cosas que nada significan desde el punto de vista formal. E, inversamente, hay cosas que parecen imposibles desde el punto de vista intuitivo y que, sin embargo, se revelan posibles desde el punto de vista formal. El recurso a un lenguaje riguroso permite, por tanto, corregir la intuición y criticar las pseudoevidencias que surgen al nivel de los análisis no-formalizados.

Así, el uso de las paradojas en los estudios metateóricos muestra que es posible utilizar tales formas de razonamientos sin incurrir en contradicciones.

Es, precisamente, esta posibilidad la que hace aparecer las restricciones a las que están sometidos los lenguajes no formalizados. La conquista del rigor tiene por contrapartida la fragmentación del lenguaje y la renuncia a la idea del lenguaje total.

El sistema total no es realizable ni como representación adecuada del campo intuitivo, ni como estructura formal capaz de reflejarse totalmente en sí misma, ni como conjunto de procedimientos canónicos susceptibles de proporcionar una solución efectiva a todo problema matemático.

La existencia de proposiciones indecidibles pone de manifiesto que no es posible encontrar en el campo deductivo la representación exacta de lo que pertenece al campo de la verdad intuitiva: en este campo siempre hay más de lo que se puede representar en el dominio de las derivaciones posibles. Para extender la representación, es obligado pasar a sistemas cada vez más vastos, y, como el mecanismo que permite construir proposiciones indecidibles puede aplicarse siempre a los nuevos sistemas que se consideran, se puede continuar indefinidamente ampliando el sistema del que se ha partido sin conseguir integrar totalmente el dominio de la verdad intuitiva en el dominio de lo derivable. Así, pues, nunca se alcanza el sistema universal que sería la perfecta reduplicación de lo que es accesible a las operaciones del pensamiento intuitivo.

Se pueden construir, indudablemente, sistemas a los cuales no se aplican los razonamientos de GÖDEL y otros similares, y en los cuales, por consiguiente, no se

encuentran proposiciones indecidibles. Pero se trata de sistemas escasamente capaces que sólo representan un sector muy limitado de las matemáticas intuitivas, o de sistemas en los que ciertas nociones adoptan un sentido muy diferente del que poseen en el plano intuitivo. Estos últimos sistemas son, por otra parte, indefinidamente extensibles, poseyendo el medio de integrar en el formalismo una parte cada vez mayor del dominio de la verdad intuitiva, pero sin dar de ésta una representación adecuada. Ya se superpongan los sistemas unos a otros, o se superpongan, en el ámbito de un sistema, niveles de demostración distintos, al progresar hacia el infinito esto se reduce, en definitiva, a lo mismo.

Esto quiere decir que no podemos agotar, en lo actual, todas las posibilidades de razonamiento que nos son, en principio, accesibles. No existe sistema cerrado que sea el paradigma de todo discurso, el canon supremo de la razón. Cualquiera que sea el sistema que podamos considerar, siempre quedan formas de razonamiento que le son extrañas.

Los teoremas relativos al poder reflexivo de los formalismos describen un aspecto particularmente importante de la inadecuación entre lo formal y lo intuitivo. Si queremos dar un equivalente formal de las consideraciones intuitivas a que pueda dar lugar un sistema determinado, nos veremos obligados, en un cierto número de casos, a recurrir a un sistema más vasto. Nuevamente nos encontramos, por tanto, esta misma necesidad de una transgresión indefinida de los cuadros formales que se puede establecer. Y aquí esta necesidad significa que ningún sistema formal puede incluir la representación de su propio sentido: las operaciones gracias a las cuales su sentido se precisa a la mirada del pensamiento le permanecen necesariamente extrañas.

Así, la dualidad de lo subjetivo y lo objetivo no puede ser abolida; el formalismo no puede constituir una suerte de modelo objetivado del pensamiento ni puede encerrar la totalidad de lo inteligible.

Finalmente, los resultados que conciernen al problema de la decisión indican que el método formal no puede ser identificado, pura y simplemente, a la constitución de un mecanismo universal. El dominio de los problemas que son susceptibles de ser resueltos de manera efectiva, sólo parcialmente cubre el de los problemas metateóricos. Las posibilidades del pensamiento matemático no se agotan en el campo de lo decidible. Por consiguiente, hay lugar para formas de razonamiento que no se dejan reducir a procedimientos uniformes y siempre eficaces, del tipo susceptible de ser representado por medio de máquinas. El campo del pensamiento es mucho más amplio que el de los límites exactos del cálculo.

La utilización del método formal no dispensa al pensamiento matemático de poner en práctica métodos que no se reducen a la aplicación de un programa de operación determinado anticipadamente. Más aún, los sistemas formales mismos hacen aparecer problemas que no pueden ser abordados por medio de tales métodos. El pensamiento matemático no puede hacer, pues, abstracción total del sentido intuitivo de los problemas que se plantea y de las operaciones que efectúa. Decir que no existe cálculo universal, es decir que no se puede todo reconducir a reglas pura-

mente formales de manipulación, que el dominio del sentido no se identifica con el de lo efectivamente practicable y que, hasta en las instauraciones formales, el contacto con las fuentes de significación intuitivas es indispensable.

Esto hace aparecer de distinta manera que la dualidad del pensamiento y del objeto no puede ser abolida; que el sistema de lo inteligible no puede ser cercenado de su referencia a una experiencia ni puede absorberse en una objetividad cerrada.

Las investigaciones metateóricas que utilizan el método de los modelos ponen de relieve, en manera mucho más positiva, esta conexión necesaria entre lo formal y lo intuitivo. El simple examen de los vínculos internos de un sistema no permite formarse una idea completa de sus propiedades: algunas de ellas se refieren a las interpretaciones que pueden proponerse del sistema estudiado, y toda interpretación remite a un campo de objetos y de relaciones exteriores al sistema cuyo sentido debe poder determinarse independientemente de éste. Es posible, por supuesto, interpretar un sistema a través de otro, pero llega un momento en que se hace necesario apoyarse sobre las significaciones intuitivas. La demostración de coherencia, por ejemplo, demuestra que no se puede prescindir de todo recurso a una teoría intuitiva: es, en definitiva, la coherencia supuesta de esta última la que asegura la coherencia del sistema.

Así, las propiedades metateóricas no resisten por su propia virtud fuera de toda referencia a un dato previo. El dato es el de la experiencia matemática elemental. Todo el esfuerzo de la teoría de la demostración estriba no tanto en eliminar este dato, sino en circunscribirlo de manera que sea posible considerarlo como si estuviese sustraído a toda discusión ulterior. Es este el sentido de las discusiones que rodean la noción de constructividad.

Pero al mismo tiempo que el método de los modelos liga las construcciones formales a sus soportes intuitivos, hace manifestarse, en este mismo vínculo, una fuente de relatividad.

En efecto, un sistema formal es susceptible de interpretaciones variadas, y los conceptos que son formalizados en un sistema pueden recibir sentidos diferentes según el modelo que se elija para la interpretación.

Las propiedades metateóricas que hacen intervenir una interpretación pueden variar, de la misma manera, según la naturaleza de esta interpretación. El paso por el método formal nos permite así percibir que ciertos conceptos matemáticos no representan, al nivel de las teorías no-formalizadas en las que se manifiestan por primera vez, sino aproximaciones provisorias. Si bien se necesita en todo momento apoyarse parcialmente en la intuición, esto no quiere decir que basten los datos matemáticos intuitivos en su estado primario, anterior a toda formalización rigurosa. Sólo al nivel del sistema formal adquieren pleno rigor los conceptos matemáticos, pero este sentido no puede considerarse como absoluto. Por lo demás, no es posible construir un sistema de una cierta capacidad que admita solamente un tipo de modelo.

Así, de una parte, no es posible prescindir de todo recurso a la intuición, pero, de otra, siempre existe una inadecuación entre los planos intuitivo y formal.

Siempre quedan posibilidades intuitivas imposibles de reintegrar en lo formal [27], y lo formal hace aparecer propiedades que no eran visibles en el plano intuitivo. Así, la existencia de modelos no-regulables nos enseña que la noción elemental de número entero no es susceptible de una caracterización formal unívoca, y la existencia de sistemas que no admiten sino modelos no-regulares nos muestra que una teoría matemática formalizada puede darnos una imagen muy diferente que la que nos proporciona la intuición de ciertas nociones matemáticas fundamentales.

Los hechos de limitación ligados a la teoría de los modelos tienen, pues, una significación que se asimila a la de los demás hechos de limitación y nos hacen apercibir de manera más precisa que en matemática no existe lo absoluto, al menos en el sentido de que no existe un sistema definitivo que pueda ser considerado como integrante de la totalidad de la realidad matemática.

235. Razón de ser de los hechos de limitación.

Lo que importa reconocer es que todos los hechos de limitación que acaban de ser evocados reposan, en definitiva, sobre la naturaleza de los sistemas formales como lo testimonian las demostraciones de estos teoremas.

Es, precisamente, el recurso al método formal lo que comporta las restricciones descritas en los teoremas de limitación; estas restricciones no tienen un carácter meramente accidental, sino que están ligadas a la estructura del lenguaje formal, y en este sentido tienen un carácter de necesidad.

Para ilustrar esta idea conviene resaltar lo que hay de esencial en los mecanismos de demostración cuyo detalle ha sido descrito en los capítulos precedentes. Este examen nos permitirá, al mismo tiempo, desentrañar lo que hay de común en los diferentes hechos de limitación y captar mejor lo que significa la oposición de lo formal y lo intuitivo.

Ante todo, se imponen dos observaciones.

Los teoremas de limitación son teoremas metateóricos. Como tales, implican que es posible establecer una distinción entre teoría y metateoría, y dar, en cada caso concreto, un sentido preciso a esta distinción. Como se ha visto, la metateoría de un sistema LF_1 puede ser formalizada en un sistema LF_2 y convertirse, a su vez, en objeto de un estudio metateórico que podrá ser, eventualmente, formalizado en un sistema LF_3. Por consiguiente, una metateoría podrá considerarse como una teoría respecto a otra metateoría. Pero lo que es esencial es que, en cada caso, es posible emprender un examen metateórico del sistema considerado, y que las consideraciones metateóricas propias de un sistema se sitúan fuera de este sistema (aunque puedan, en ciertos casos, ser formalizadas —al menos parcialmente— en el mismo sistema).

[27] Así, según Wang, el teorema de Löwenheim-Skolem significa que ningún sistema formal puede dar todos los conjuntos de enteros positivos (véase § 209).

Por otra parte, todas las demostraciones metateóricas que hemos tenido que examinar hacen intervenir una representación aritmética de los sistemas que conciernen. Esto sólo es posible mediante el método de la aritmetización, que permite coordinar números enteros a los diferentes elementos que componen el sistema formal (ya se trate de componentes elementales o de diferentes tipos de expresiones que se pueden construir mediante estas componentes, o también mediante series de estas expresiones que se pueden formar en el sistema).

Esto es así porque los sistemas formales constituyen un lenguaje enteramente objetivado, en tanto que el lenguaje no formalizado, en el cual se efectúan las operaciones intuitivas, es siempre (al menos en parte), en la medida misma en que sirve de vehículo a la intuición, un lenguaje vivido que no puede ser objetivado sin destruirse como tal.

Esto no quiere decir que un sistema formal se reduzca a un simple ensamblaje de signos materiales.

En tanto se presente bajo la forma de un sistema de notaciones simbólicas, no puede identificarse a su modo exterior de aparición. Los signos utilizados no son otra cosa que los portadores del sistema; su función exclusiva es hacerle fácilmente perceptible y accesible a las manipulaciones. Los elementos constituyentes de un sistema deben distinguirse, por tanto, de los signos mediante los cuales queda representado. La noción de sistema formal no comporta, por lo demás, indicación alguna sobre la naturaleza de estos elementos constituyentes. Un sistema formal indica solamente cuáles son los objetos que lo constituyen, cómo pueden formarse, a través de qué objetos, las *proposiciones*, y cuáles, entre éstas, constituyen *teoremas*.

La naturaleza de los objetos que constituyen el sistema no afecta para nada a la estructura del sistema y a su función específica, y la forma de representación de esta estructura permanece arbitraria. (Estos objetos pueden considerarse como símbolos, pero también pueden considerarse como variables, o como conceptos abstractos, o como objetos físicos o matemáticos.) Un sistema formal debe considerarse como una abstracción de sus presentaciones y de sus representaciones [28].

Decir que un sistema formal es un lenguaje objetivado equivale a decir que su valor significativo se origina no en su inserción en un comportamiento global y en un proyecto de comunicación (como en el caso del lenguaje vivido), sino de un cuerpo de prescripciones que determinan de manera explícita y exhaustiva cuáles son los elementos del sistema y cómo pueden ser manipulados.

Las reglas (de formación y de derivación) que describen un formalismo están formuladas de manera tal que permiten identificar sin ambigüedad los elementos constitutivos del sistema.

Es posible reconocer, efectivamente, si un cierto objeto es o no una componente del sistema, y en caso afirmativo determinar, efectivamente, de qué componente se trata [29]. Además, es posible clasificar en categorías perfectamente definidas los com-

[28] Véase §§ 20 y 21.

[29] Un sistema formal, al ser inseparable de una cierta presentación, hace que las componentes primitivas y las operaciones de formación del sistema se presenten en forma de signos

plejos de componentes que se considerarán dotados de sentido. Como las reglas que definen estas categorías de expresiones están formuladas en forma recurrente, es posible determinar, efectivamente, si un complejo dado de componentes del sistema pertenece o no a una de estas categorías. Es posible, en fin, definir exactamente lo que se denomina una derivación y, por tanto, reconocer, efectivamente, si una serie dada de expresiones dotadas de sentido constituye o no una derivación.

Por otra parte, siempre es posible caracterizar todos los elementos de un sistema de manera biunívoca mediante los números enteros. Las componentes primitivas del sistema deben, en efecto, aparecer de manera explícita, y cada componente primitiva debe poder ser identificada sin ambigüedad. Estas componentes forman también una o varias series discretas, finitas o infinitas [30], de tal suerte que siempre es posible encuadrarlas en una serie numerable.

En general, las reglas de formación y de derivación se formulan de manera recurrente, de tal suerte que, si disponemos de una representación numérica de las componentes primitivas, se puede obtener una representación numérica de cualquier expresión o serie de expresiones del sistema.

Gracias al procedimiento de aritmetización, las propiedades metateóricas pueden ser expresadas mediante funciones y predicados aritméticos. Y los razonamientos metateóricos se presentan como razonamientos de naturaleza aritmética. Los teoremas de limitación hacen intervenir las relaciones que se dan entre ciertas proposiciones (del sistema estudiado) y ciertas propiedades aritméticas (y en esto ponen en juego una interpretación de ciertas proposiciones), pero, al mismo tiempo, reflejan singularidades que pertenecen propiamente a la estructura de la serie de enteros y que están ligadas a la noción de infinito.

Para captar mejor el papel que juega la estructura de los enteros en los teoremas de limitación, consideremos sucesivamente los principales mecanismos de demostración que hemos considerado en el curso de esta obra.

El teorema de GÖDEL [31] concierne a una proposición que afirma de sí misma su propia inderivabilidad. Esta proposición puede construirse en el sistema *LFG* porque la relación de derivabilidad puede ser expresada en forma aritmética y porque el sistema *LFG* contiene una formalización de la Aritmética. Gracias a estas dos condiciones puede hacerse, a propósito del sistema *LFG,* un razonamiento análogo a

---

distintos entre sí y fácilmente reconocibles. Por tanto, bastará, en la práctica, para reconocer si un cierto objeto es una componente del sistema, con reconocer si un cierto signo forma parte de la lista de signos correspondientes a las componentes primitivas del sistema, o si un cierto ensamblaje de signos corresponde a una componente del sistema (formado a partir de las componentes primitivas mediante operaciones de formación del sistema).

Como las reglas de formación están formuladas en forma recurrente, esta verificación es siempre efectivamente posible.

[30] Y en este caso se trata de series infinitas numerables, pues el único medio de que se dispone para identificar de manera efectiva los elementos de una serie infinita es asociarlos con la serie de enteros (por ejemplo, a través de índices). Así, en el sistema descrito en el § 6 tenemos las tres series infinitas de variables: $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, ..., $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, ..., $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, ...

[31] Véase CAPITULO III, en particular §§ 72, 93 y 94.

aquel mediante el cual CANTOR demostró que el conjunto de los números enteros no es numerable.

Recordemos brevemente cómo procede la demostración de CANTOR.

Supongamos que el conjunto *En-E* de los conjuntos de enteros sea numerable, es decir, que exista una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de los enteros. A cada entero k corresponde entonces un conjunto de enteros En_k. El entero k puede pertenecer a su imagen En_k o, por el contrario, no pertenecer a ella. Consideremos entonces el conjunto En_d de los enteros j tales que j no pertenezca a su conjunto-imagen En_j. Como En_d es un conjunto de enteros, en virtud de nuestra hipótesis, existe un entero d tal que En_d es la imagen de d. Este entero d pertenece a En_d o no pertenece.

Si d pertenece a En_d, entonces, por definición de En_d, d no puede pertenecer a En_d. Y si d no pertenece a En_d, entonces, de nuevo, por definición de En_d, d pertenece a En_d. Así se concluye en una contradicción, debiéndose rechazar la hipótesis de que se ha partido.

Para percibir más fácilmente la analogía que existe entre este razonamiento y el de GÖDEL, utilicemos la presentación abreviada que da este autor de su demostración [32].

Consideremos el conjunto de las proposiciones de *LFG* de una variable libre $A(\Theta)$. Este conjunto puede ser numerado, y podemos escribirlo en la forma: $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{A}_2(\mathfrak{X})$. En todas las proposiciones de esta serie, la variable $\mathfrak{X}$ puede ser reemplazada por una cifra. A cada proposición abierta $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{X})$ corresponderá, pues, una serie infinita de proposiciones cerradas: $\mathfrak{A}_k(N_1)$, $\mathfrak{A}_k(N_2)$, ...

Cualquiera de estas proposiciones es o no es derivable.

A cada proposición $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{X})$ corresponderá, así, un conjunto de enteros: el conjunto de enteros k para los cuales $\mathfrak{A}_k(N_k)$ es derivable.

Consideremos la clase *Cl* de enteros k tales que la proposición $\mathfrak{A}_k(N_k)$ no sea derivable.

En virtud de las hipótesis establecidas sobre *LFG*, la definición de la clase *Cl* puede representarse en *LFG* por medio de una proposición de una variable libre que debe formar parte de nuestra enumeración. Sea $\mathfrak{A}_i(\mathfrak{X})$ esta proposición. Formemos la proposición $\mathfrak{A}_i(N_i)$.

Esta proposición es indecidible en *LFG*.

En efecto, supongamos que sea derivable. Esto significa que el entero i tiene la propiedad representada por la proposición $\mathfrak{A}_i(\mathfrak{X})$ y, por consiguiente, que pertenece a la clase *Cl*. Pero entonces la proposición $\mathfrak{A}_i(N_i)$ no puede ser derivable.

Supongamos, por el contrario, que esta proposición sea refutable. Esto significa que el entero i no pertenece a la clase *Cl*, es decir, que es falso que $\mathfrak{A}_i(N_i)$ no sea derivable; dicho de otra forma, que $\mathfrak{A}_i(N_i)$ es derivable. Pero si *LFG* es coherente, una proposición de *LFG* no puede ser al mismo tiempo derivable y refutable. Así, $\mathfrak{A}_i(N_i)$ no puede ser refutable.

[32] Véase § 72.

La argumentación de CANTOR se reduce a demostrar que ninguna enumeración puede agotar el conjunto *En-E* de los conjuntos de enteros. Dicho de otra forma, que dada una enumeración de conjuntos de enteros siempre se podrá establecer la existencia de un conjunto que no pertenece a esta enumeración.

La argumentación de GÖDEL muestra que, dada una enumeración de conjuntos de enteros, no es posible caracterizar todos estos conjuntos de manera efectiva; se puede establecer la existencia de un entero *i* y de un conjunto *En* para los cuales no es posible decidir si este entero pertenece o no a este conjunto.

Este resultado puede expresarse como sigue: si disponemos de una enumeración de los conjuntos de enteros que se pueden caracterizar de manera efectiva, es posible establecer la existencia de un conjunto que no pertenece ciertamente a esta enumeración.

En otras demostraciones se vuelve a encontrar el mismo tipo de argumentación.

KLEENE estableció la existencia de proposiciones indecidibles mediante un lema que le permite igualmente obtener un teorema relativo a un problema de decisión.

Su lema [33], basado en el procedimiento de la diagonal, se reduce a demostrar que, si disponemos de una enumeración efectiva [34], de funciones efectivamente calculables [35], es posible establecer la existencia de una función efectivamente calculable que pertenece a esta enumeración.

KLEENE asocia a esta función una determinada proposición dentro de un cierto sistema *LFK*, y muestra que esta proposición es inderivable al establecer que no puede pertenecer a la enumeración de las proposiciones derivables de *LFK* [36].

Por otra parte, este lema permite demostrar que no existe procedimiento efectivo que permita determinar si un sistema de ecuaciones dado define o no una función efectivamente calculable [37].

En efecto, si existiese tal procedimiento, sería posible, partiendo de una enumeración efectiva de las funciones efectivamente calculables, establecer (mediante el lema) la existencia de una función efectivamente calculable que no estaría comprendida en esta enumeración.

CHURCH y TURING utilizan argumentaciones paralelas.

CHURCH expone que si existiese un procedimiento efectivo que permitiese determinar si una fórmula bien construida del cálculo *LF-λ* tiene una forma normal o no, entonces, partiendo de una enumeración efectiva de las fórmulas bien construidas que tienen una forma normal, se podría (mediante el procedimiento de la diagonal) demostrar la existencia de una fórmula de este tipo que no pertenecería a esta

[33] Véase § 113.

[34] La palabra *efectivo* se utiliza aquí en el sentido preciso que le da la noción de recursividad. Una enumeración efectiva es la que puede realizarse por medio de una función recursiva.

[35] En realidad, se trata de funciones recursivas. Aquí se utiliza el término más intuitivo de *función efectivamente calculable* para captar mejor el alcance del lema de KLEENE, evitando toda expresión excesivamente técnica.

[36] Véase § 115.

[37] Véase § 155.

enumeración [38]. Partiendo de este resultado, CHURCH estableció su teorema sobre el problema de la decisión [39].

TURING ha puesto de manifiesto que si existiese un procedimiento efectivo que permitiese determinar si una máquina es una máquina-T no-circular o no lo es (o también: que permitiese determinar si un procedimiento destinado a calcular los términos sucesivos de una serie numérica es efectivo o no), en tal caso se podría derivar una contradicción al establecer la existencia de una máquina que fuese a la vez no-circular y circular [40]. La demostración de TURING utiliza el procedimiento de la diagonal la máquina dotada de propiedades contradictorias tiene por *n*-ésima instrucción calcular la *n*-ésima cifra calculada por la *n*-ésima máquina.

La demostración del teorema de POST [41] utiliza el mismo método de prueba que la demostración de GÖDEL.

En efecto, se puede sistematizar como sigue el argumento sobre el cual descansa nuestra demostración. Partiendo de una enumeración efectiva de conjuntos de enteros efectivamente numerables, se define un conjunto En_i por la condición siguiente: la condición necesaria y suficiente para que un entero k pertenezca a En_i es que no pertenezca al k-ésimo conjunto de la enumeración.

Se observa entonces que este conjunto En_i es uno de los conjuntos de la enumeción, de donde se deriva una contradicción. Sea, en efecto, i el número de orden de En_i en la enumeración. Si el entero i pertenece a En_i, entonces, en virtud de la definición de En_i, i no pertenece a En_i, y si i no pertenece a En_i, en virtud de la misma definición también i pertenece a En_i.

POST demuestra mediante esta argumentación que no existe procedimiento efectivo que permita determinar si un entero dado pertenece o no a un conjunto recursivamente enumerable. Y, por otra parte, este autor construye, mediante las propiedades del conjunto En_i, una proposición indecidible.

Este mismo tipo de argumentación se vuelve a encontrar en la base del teorema de estratificación de KLEENE [42]. Partiendo de una enumeración de los predicados de enteros de una determinada forma, KLEENE construye un predicado que no pertenece a esta enumeración.

Consideremos el caso más simple, el del predicado $\hat{X}\,[(Y)\,P\,X\,Y]$ [43].

La enumeración de los predicados considerada corresponde a una enumeración de las funciones de un argumento definibles mediante un determinado sistema de ecuaciones. Sea F_1, F_2, ... esta enumeración. Para cada función se pueden formar las expresiones $F_k\,1$, $F_k\,2$, ...

Estas expresiones pueden ser efectivamente calculables o no.

---

[38] Véase § 152.
[39] Véase § 153.
[40] Véase § 157.
[41] Véase § 163.
[42] Véase § 175.
[43] La demostración procede exactamente de la misma manera en los casos más complicados.

Por tanto, se puede hacer corresponder a cada función F_k el conjunto de enteros m para los cuales $F_k\, m$ es efectivamente calculable.

A la serie de las funciones F_k corresponde, pues, una serie de conjuntos de enteros.

En tal caso, se puede definir un conjunto de enteros que no pertenezca a esta serie: el conjunto de los enteros k tales que las expresiones $F_k\, k$ no sea efectivamente calculable. A este corresponde una cierta función F_i que no pertenece a la enumeración de las funciones F_k.

Los predicados de la enumeración de KLEENE son de la forma: *la expresión* F_k X *es efectivamente calculable.* Y el predicado que no pertenece a la enumeración es el que define la función F_i: *La expresión* $F_k\, k$ *no es efectivamente calculable.*

Mediando las equivalencias establecidas por su lema [44] entre los predicados que hacen intervenir una propiedad efectivamente definida y los predicados de su demostración, KLEENE pudo establecer su teorema de estratificación y utilizarlo para reformular los teoremas de CHURCH y de GÖDEL. Las propiedades que intervienen en estos teoremas (existencia de un procedimiento de decisión de una parte, derivabilidad, de otra) pueden, en efecto, expresarse por medio de predicados que tengan una de las formas previstas en el teorema de estratificación.

Consideremos también la demostración de KALMÁR [45]. Se parte de una cierta enumeración de funciones de enteros de un argumento. Esta enumeración asocia a cada una de estas funciones un número entero. Una función comprendida en esta enumeración puede tomar por valor (para uno o varios valores de su argumento) el entero al que va asociada o bien no encontrarse nunca en esta situación. Consideremos el conjunto de las funciones de esta serie que no toman jamás por valor el entero que les ha sido asociado. La función $\mathfrak{Rlm}$ de KALMÁR define este conjunto. Como una función de enteros corresponde a un conjunto de enteros, se pueden presentar los siguientes casos:

Se dispone de una cierta enumeración de conjuntos de enteros. Para todo entero n, n puede pertenecer o no al conjunto que le ha sido asociado por dicha enumeración.

Consideremos entonces el conjunto de enteros j tales que j no pertenezca al conjunto asociado a j. Este conjunto está, a su vez, asociado a un cierto entero en nuestra enumeración. Sea k este entero.

Si este entero k pertenece a este conjunto, entonces no pertenece, y si no pertenece, entonces pertenece. La proposición indecidible de KALMÁR corresponde al enunciado: *el entero k no pertenece al conjunto que le es asociado.*

Las demostraciones que utilizan el método semántico [46] presentan también la misma estructura.

Sea, por ejemplo, la demostración del lema de TARSKI [47]. Podemos considerar el

[44] Véase § 173.
[45] Véase § 126.
[46] Véase CAPITULO VIII.
[47] Véase § 188.

conjunto de las proposiciones de una variable individual libre (de un cierto formalismo). Este conjunto puede estar enumerado. En cada proposición es posible reemplazar la variable por una cifra y obtener así una proposición cerrada. Dada una cierta clase de proposiciones *Cl*, cada proposición cerrada puede pertenecer o no a esta clase. La propiedad de no pertenecer a esta clase puede expresarse mediante una proposición de una variable individual libre, que forma parte de nuestra enumeración. Sea *t* su número.

Si se reemplaza la variable libre de esta proposición por la cifra correspondiente a *t*, se va a parar en las conclusiones que permiten establecer el lema.

Como hemos visto, el lema de TARSKI inspira las diferentes demostraciones de tipo semántico descritas en el capítulo VIII, a excepción de la demostración autónoma del teorema de la verdad. Pero esta demostración utiliza también el mismo mecanismo que las otras.

Lo que distingue el método semántico del método sintáctico es la naturaleza de las propiedades metateóricas utilizadas y las condiciones que permiten obtener la representación de estas propiedades en el sistema estudiado.

En general, todas las demostraciones que acabamos de evocar utilizan en una u otra forma un razonamiento diagonal [48]. Unas utilizan el procedimiento de la diagonal propiamente dicha, en su forma directa [49]; las demás utilizan la Paradoja de EPIMÉNIDES [50].

Pero el uso de esta paradoja está ligado a un razonamiento diagonal. En efecto, el mecanismo de demostración que se encuentra en todos los teoremas que utilizan la Paradoja de EPIMÉNIDES se puede presentar como sigue:

Consideremos una clase de objetos *Cl* que puede ser enumerada, y cada uno de sus miembros puede ser aplicado a un entero cualesquiera. (Estos objetos pueden ser, por ejemplo, funciones, predicados o proposiciones de una variable libre.)

Consideremos, por otra parte, una cierta propiedad metateórica *P** que puede pertenecer a las expresiones formadas aplicando estos objetos a enteros.

Esta propiedad *P** hace corresponder a la clase de objetos *Cl* una serie ordenada de conjuntos de enteros: a cada objeto de la clase *Cl* corresponde el conjunto de los enteros *n* para los cuales la expresión correspondiente (obtenida aplicando el objeto

---

[48] Hemos recordado anteriormente sólo las principales demostraciones expuestas en los CAPITULOS III al VIII. Pero las mismas observaciones pueden aplicarse evidentemente a los demás, que representan solamente variantes de éstas. Así, los diferentes teoremas de ROSSER (Secciones 3-IV y 4-IV) utilizan el mismo procedimiento de demostración que el teorema de GÖDEL.

[49] Para el procedimiento de la diagonal, véase el CAPITULO II, nota 70.

Este procedimiento se utiliza en forma directa en el lema de KLEENE (VIII(113)) (y sus consecuencias, en particular IX (115) y XLIII (155)) y en el teorema de CHURCH (XXXVII (151)), y bajo una forma ligeramente diferente en el teorema de TURING (XLVI (156)).

[50] Teorema de GÖDEL (VI (91)) y teoremas conexos, salvo la forma de KLEENE del teorema de GÖDEL (IX (115)), teorema de KALMÁR (XVIII (126)) y (XIX (126)), teorema de la Estratificación de KLEENE (LXIV (174)), teorema de POST (LVII (163)), lema de TARSKI (LXIX (188)) (y sus consecuencias, en particular LXXI (190), LXXV (193) y LXXX (195), demostración autónoma del Teorema de la Verdad (§ 200).

en cuestión al entero *n*) verifica la propiedad metateórica *P**. (Así, por ejemplo, la clase *Cl* puede ser la clase de los predicados de enteros de un argumento [51], y la propiedad *P** puede ser la propiedad verdadera, que se refiere a los enunciados obtenidos aplicando un predicado de la clase *Cl* a un entero determinado [52]).

Se define entonces un cierto conjunto de enteros *En* por la condición siguiente: la condición necesaria y suficiente para que el entero *n* forme parte del conjunto *En* es que no pertenezca al *n*-ésimo conjunto de nuestra serie.

Se ve que este conjunto corresponde a un objeto de la clase *Cl,* siendo, por tanto, del mismo tipo que los conjuntos de la serie considerada. Este conjunto *En* tiene, pues, un cierto número en la serie; sea *k* este número.

Entonces se llega al enunciado: *el entero k forma parte del conjunto En.* Este enunciado tiene la significación siguiente: *La expresión obtenida aplicando al entero k el objeto de la clase Cl asociado al conjunto En no tiene la propiedad P*.*

Así, pues, existe la posibilidad de aplicar a ciertas clases de objetos un razonamiento diagonal que subyace en los teoremas de limitación evocados anteriormente [53]. También existe la posibilidad de la diagonal utilizada en el teorema de TARSKI sobre la noción de *definible* [54] y en la demostración de KLEENE y ROSSER en el teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY [55].

Este tipo de razonamiento no puede aplicarse a cualquier sistema formal. Es preciso, para que sea susceptible de aplicación a un sistema dado, que este sistema sea suficientemente capaz, en particular que contenga expresiones correspondientes a los enteros y que se pueda representar en ellos, al menos, ciertos predicados y ciertas funciones metateóricas. Dada esta condición, la razón por la cual se puede aplicar al sistema el razonamiento diagonal es que se pueda dar una enumeración de las expresiones de un tipo dado (por ejemplo, proposiciones de una variable libre).

---

[51] Si se considera un sistema formal se tendrá que utilizar, por ejemplo, el predicado *Vri,* definido de manera conforme al método semántico. Véanse §§ 185 y 186.

[52] Si se considera un sistema formal, se hablará de la clase de expresiones predicativas de un argumento.

[53] En efecto, se trata de todos los teoremas que figuran en los CAPITULOS III a VIII.

[54] Teorema LXXXVII (205).

[55] Véase § 222.

El resultado que concierne a la función de BERRY relativa al sistema *LF* hace intervenir también el procedimiento de la diagonal. El conjunto de los valores tomados por la función de BERRY sobre el sistema *LF* constituye, en efecto, un conjunto de enteros diferente de cada uno de los conjuntos de una cierta serie numerable de conjuntos de enteros.

Sea *LF* un cierto sistema formal. Llamemos En_1 al conjunto de los enteros que se puede definir en *LF* por medio de una expresión de *LF* conteniendo como máximo una componente primitiva En_2 el conjunto de los enteros que se puede definir en *LF* por medio de una expresión de *LF* que contenga, como máximo, 2 componentes primitivas, y así sucesivamente. Si hacemos corresponder a En_1 el menor entero que se pueda definir en *LF* mediante una expresión de *LF* que contenga, como máximo, 1 componente primitiva, a En_2 el menor entero que se puede definir en *LF* por medio de una expresión de *LF* que contenga como máximo 2 componentes primitivas, y así sucesivamente, obtendremos un conjunto de enteros que es ciertamente diferente de En_1, En_2, etc., y que, precisamente, es el conjunto de los valores tomados por la función de BERRY relativa a *LF.*

Y esto responde a la naturaleza misma del sistema formal: el que las expresiones de un sistema estén construidas de manera recurrente a partir de una serie numerable de signos explica que se pueda enumerar una clase de expresiones de un determinado tipo.

Lo que el razonamiento diagonal hace entonces aparecer —debido a las propiedades paradójicas del conjunto que permite construir— es que ciertas propiedades metateóricas de un sistema en un momento dado cesan de ser susceptibles de verificación efectiva. La argumentación de GÖDEL (que aparece en todas las demostraciones basadas en la Paradoja de EPIMÉNIDES) pone de manifiesto que existe, al menos, un conjunto para el cual el problema de la decisión [56] no puede ser resuelto. Y el tipo de argumentación utilizado por CHURCH, KLEENE y TURING revela que existen problemas metateóricos que no pueden ser resueltos de manera efectiva.

Las consideraciones a las que se puede prestar un sistema formal nos hacen, pues, salir del dominio de lo que es efectivamente verificable, es decir, del dominio de lo *decidible*. Se puede considerar que la noción de *decidible* está adecuadamente representada por la de *recursividad*. Los teoremas de limitación nos enseñan, por tanto, que los procedimientos recursivos no pueden agotar el campo de lo metateórico. Y la razón reside en que un sistema formal de una cierta capacidad puede siempre prestarse al razonamiento diagonal que, partiendo de una enumeración de los conjuntos de enteros de un cierto tipo, revela que existe, al menos, un conjunto de este tipo que no está comprendido en esta enumeración. Así, el fenómeno que descubrimos en la base de todos estos teoremas es la imposibilidad de dar una determinación efectiva de todos los conjuntos de enteros.

Un fenómeno parecido encontramos en los teoremas de limitación ligados a la teoría de los modelos. El teorema de LÖWENHEIM-SKOLEN, generalizado por HENKIN, revela que siempre es posible hallar, para un sistema de una determinada capacidad, un modelo numerable.

Un sistema suficientemente capaz ofrece, sin duda, el procedimiento de representar el razonamiento de CANTOR, que establece la existencia de conjuntos no-numerables. Pero siempre es posible, sea situándose en el plano metateórico (como hace SKOLEM [57]), o insertando el sistema considerado en otro más capaz (como WANG en su jerarquía de sistemas [58]), obtener una enumeración de estos conjuntos. Así, un sistema formal nunca nos permite alcanzar lo no-numerable, al menos de manera absoluta.

La interpretación que da WANG del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM subraya el papel que aquí desempeña también el razonamiento diagonal: como siempre se pueden enumerar las proposiciones de un sistema que pertenezcan a una cierta clase de proposiciones (por ejemplo, las que afirman la existencia de un conjunto de enteros), hay medio de definir un conjunto cuya existencia no puede, ciertamente,

[56] Este problema consiste en dar un procedimiento efectivo que permita determinar, para todo entero, si este entero pertenece o no a este conjunto.

[57] Véase § 209.

[58] Véase § 229.

ser demostrada en el sistema. Así, ningún sistema formal puede dar una representación de todos los conjuntos de enteros [59].

El razonamiento diagonal nos hace rebasar lo decidible, pero al mismo tiempo nos impide alcanzar lo no-numerable.

La existencia de modelos no-regulares (para los sistemas que contienen la teoría de los números enteros en una u otra forma) nos conduce por otro camino a esta misma limitación fundamental, como hace observar KLEENE [60].

Un sistema que contenga la teoría de los números enteros debe comportar un axioma (o un esquema de derivaciones) que corresponda al axioma de inducción. Considerado en su forma intuitiva, el axioma de inducción vale para todos los predicados de enteros, es decir, para todos los conjuntos de enteros. Por el contrario, cuando se expresa el axioma de inducción en un sistema formal, este axioma sólo tiene validez para los predicados que sean representables en este sistema. Ahora bien, siempre es posible enumerar las expresiones de un sistema que representen predicados de enteros y, por consiguiente, enumerar los conjuntos de enteros que correspondan a los predicados para los que el axioma de inducción del sistema considerado es válido. Se puede, entonces, definir un sistema que no está comprendido en esta enumeración. Así, hay, al menos, un predicado para el cual el axioma de inducción no es válido. Los axiomas de la teoría de los números enteros, tal como pueden ser expresados en un sistema formal, no podrían, pues, facilitar una caracterización adecuada de la sucesión de enteros. Por este motivo, los sistemas que contienen estos axiomas admiten modelos no-regulares.

La existencia de estos modelos está ligada, en general, a la de proposiciones indecidibles en los sistemas que contienen la teoría de números enteros. Dicha teoría contribuye así a precisar el alcance del teorema de GÖDEL.

Este teorema revela, en efecto, que ningún sistema de este tipo puede proporcionar una formalización adecuada de la Aritmética intuitiva. Por tanto, se impone esperar al hallazgo de modelos que no correspondan a lo que nos proponemos formalizar; dado que estos sistemas sólo dan una imagen formal e incompleta de la teoría de números enteros, deben admitir interpretaciones en las cuales no se encuentra la estructura de la sucesión de enteros. Esto es, precisamente, la razón de la existencia de los modelos no-regulares.

La semejanza del teorema de GÖDEL y el teorema de HENKIN sobre la saturación semántica de la lógica de predicados de orden ω [61] indica de manera precisa en qué sentido la presencia de estos modelos está ligada a la de proposiciones indecidibles. Según el teorema de HENKIN, toda proposición de *LFP*-ω válida en sentido general, debe ser derivable, y este resultado se extiende a las lógicas aplicadas de los predicados que contienen una formalización de la teoría de números enteros. Ahora bien, según el teorema de GÖDEL, existe en tales sistemas proposiciones indecidibles.

[59] Véase § 209.
[60] Véase KLEENE 16, págs. 429-430.
[61] Teorema XCIV (215).

Una proposición de este tipo no puede, por tanto, ser válida respecto a todos los campos de interpretación del sistema al que pertenece. Por consiguiente, se debe esperar a que los campos de interpretación de este sistema no sean todos isomorfos entre sí, y (puesto que el sistema está construido con la finalidad de encontrar una formalización de la teoría de los números enteros) debemos esperar a encontrar para este sistema campos de interpretación cuyo dominio de individuos no sea isomorfo a la sucesión de los enteros.

Se puede comprobar, en general, que si todas las proposiciones de un sistema fuesen decidibles, la noción de validez en sentido general, y la de validez, en sentido regular, coincidirían [62]. Entonces ya no sería necesario distinguir (por lo que se refiere a la validez de las proposiciones del sistema) los campos de interpretación regulares de los campos de interpretación generales, ni, por consiguiente, los modelos regulares de los modelos no-regulares: unos y otros tendrían la misma significación.

La existencia de proposiciones indecidibles explica, pues, el papel que desempeñan los modelos no-regulares. Y, recíprocamente, la existencia de modelos no-regulares explica que una proposición indecidible pueda corresponder a un enunciado verdadero y que existan, por tanto, proposiciones válidas que no constituyan teoremas. En efecto, esta propiedad sólo se da si se define el término *válido* teniendo solamente en cuenta los campos de interpretación regulares. Pero una proposición puede ser perfectamente válida respecto a todos los campos de interpretación regulares del sistema al que pertenece sin ser válida simultáneamente respecto a todos los campos de interpretación no-regulares que el sistema pueda admitir. Es el caso, precisamente, de las proposiciones indecidibles. Si se define la validez considerando todos los campos de interpretación posibles (regulares y no-regulares), estas proposiciones dejan de ser válidas.

Como las proposiciones indecidibles corresponden a enunciados aritméticos, podremos percibir más fácilmente este hecho considerando un campo de interpretación general que contenga un sistema de números no-regular; por ejemplo, el sistema 1, 2, ..., μ [63]. La proposición indecidible de GÖDEL no es válida en relación a este campo. Sólo sería válida si nos limitásemos a considerar, como dominio de individuos del campo, la sucesión de los enteros. Entonces el cuantificador de universalización de la proposición $\mathfrak{G}^*$ debería ser interpretado como representativo de un entero cualquiera. Y tendríamos: *Cualquiera que sea el número entero s, este entero no es el número-G de una derivación de la proposición* $\mathfrak{G}^*$ [64]. Pero si el dominio de individuos del campo es el sistema de números no-regulares considerado anteriormente, entonces el cuantificador de universalización de la proposición $\mathfrak{G}^*$ debe interpretarse como representativo de un individuo cualquiera de este dominio. Y si este individuo es el objeto μ, el enunciado correspondiente no es ya cierto. (Pues este objeto no puede considerarse ya como el número-G de una derivación).

[62] Véase § 257.
[63] Véase § 216.
[64] Véanse §§ 94 y 96.

MOSTOWSKI ha puesto de manifiesto que la proposición indecidible de GÖDEL puede considerarse como una proposición que caracteriza la clase de los enteros [65]. Si se interpreta el sistema utilizado en un campo de interpretación cuyo dominio de individuos es la sucesión de enteros, esta proposición será valida respecto a este campo. Pero si se utiliza un campo de interpretación cuyo dominio de individuos es un sistema de números no-regular, esta proposición ya no será válida respecto a este campo.

La existencia de modelos no-regulares nos demuestra que un sistema formal puede admitir perfectamente modelos cuyo dominio de individuos no posee el tipo de orden del conjunto de los enteros (y esto es igualmente aplicable a los sistemas que contienen los axiomas de PEANO). Ciertos sistemas admiten solamente modelos de este tipo.

Así, aunque el sistema formal nos circunscriba a lo enumerable, no determina unívocamente el tipo de orden que admite (para los dominios de individuos de sus modelos). Por consiguiente, debemos considerar, además del tipo de orden de los enteros, los tipos de orden correspondientes a los ordinales de segunda clase (es decir, los tipos de orden de conjuntos enumerables).

Nada tenemos que decir, en particular, de los hechos de limitación señalados por ROSSER y WANG [66] a propósito de los modelos no-regulares, pues estos se vinculan al corolario de GÖDEL y, a su través, al teorema de GÖDEL.

En cuanto a los hechos de limitación propios de las lógicas combinatorias, hay que subrayar que no presentan sino cierta analogía con los restantes hechos de limitación (pues las lógicas combinatorias son de naturaleza muy particular).

Las demostraciones de KLEENE y ROSSER utilizan evidentemente el procedimiento de la diagonal. Pero la demostración de CURRY utiliza un mecanismo completamente diferente [67]. Se puede hacer observar, en todo caso, que este mecanismo consiste en construir una expresión que se niega a sí misma y que no deja de tener analogía, por esta circunstancia, con los enunciados construidos sobre el modelo de EPIMÉNIDES.

La existencia de sistemas no-gödelianos no hace sino precisar las condiciones en que es aplicable el razonamiento de GÖDEL.

El sistema de MYHILL [68] es no-gödeliano, pues no comporta operador de negación ni cuantificador de universalización. El sistema con jerarquía de implicaciones de CHURCH [69] es no-gödeliano por carecer de procedimiento efectivo uniforme que permita determinar si una expresión del sistema es un operador de implicación; la noción de derivabilidad (y, correlativamente, la de no-derivabilidad) para este sistema no corresponde, pues, a una propiedad efectiva única y una de las condiciones que hacen posible la utilización del EPIMÉNIDES no está presente.

[65] Véase § 201.
[66] Véase § 218.
[67] Véase § 222.
[68] Véase § 223.
[69] Véanse §§ 225 y 226.

En cuanto al sistema de WANG [70], si es no-gödeliano, se debe a que es indefinidamente extensible y, por consiguiente, permite siempre, añadiendo nuevos procedimientos de razonamiento a un sub-sistema determinado, convertir en decidibles todas las proposiciones de este sub-sistema.

Estas consideraciones nos llevan a precisar en qué sentido se puede afirmar de un sistema formal que es un lenguaje objetivado.

Si los sistemas formales presentan limitaciones, es que se prestan al razonamiento diagonal; es, por tanto, que su estructura corresponde (siguiendo formas de correspondencia que difieren según el sentido que se atribuya a los elementos del sistema) a la del conjunto de las series de enteros. Este conjunto tiene la propiedad destacable de no agotarse por una enumeración, de ser en cierto modo indefinidamente extensible, y de no poder, sin embargo, conducirnos a una totalización efectiva de todos sus elementos. Lo que demuestra el argumento cantoriano de la diagonal, es en efecto que ninguna enumeración puede proporcionar todos los conjuntos de enteros positivos. Para poder concluir, como hace CANTOR, que el conjunto de los conjuntos de enteros positivos es no-enumerable, hay que suponer que existe un conjunto que contiene todos los conjuntos de enteros positivos, es decir, adoptando el punto de vista del infinito actual, rebasándose el punto de vista constructivo. Siempre que permanezcamos dentro del ámbito de lo numerable, permaneceremos dentro de lo constructivo.

Como hemos podido ver, el sistema formal nos lleva siempre a lo numerable. Pero al mismo tiempo nos obliga a ir más allá de lo decidible. Se puede decir, pues, que el dominio propio de las manipulaciones formales es el dominio de lo *constructivo,* mientras que lo *constructivo* se distingue, por una parte, de lo *decidible* y por otra de lo que podría llamarse, utilizando la denominación de WANG, lo *trascendental* [71].

La noción de constructivo no tiene un sentido absolutamente riguroso. Esta noción quedó definida, al menos, de manera negativa, en cuanto que excluye las totalizaciones infinitas y no permite introducir el concepto de infinito sino en forma potencial.

Sin embargo, y siguiendo a WANG, se puede proponer un sentido positivo de la noción de infinito identificando la noción de propiedad constructiva con la de propiedad representable en su sistema de estratificación interna (que corresponde en realidad a una teoría de conjuntos) [72]. En este sistema, cada sub-sistema está caracterizado por un determinado ordinal, de la primera o segunda clase, que puede ser considerado como constructivo en el sentido siguiente:

Partimos de una cierta clase Cl_1 de ordinales que pueden considerarse como definidos constructivamente, por ejemplo, de la clase de ordinales constructivos en el sentido de CHURCH y KLEENE [73], es decir, ordinales que pueden caracterizarse por procedimientos recursivos. Se consideran entonces todos los ordinales que se pueden

[70] Véase § 229.
[71] Véase WANG 11, pág. 263.
[72] Véase § 229.
[73] Véase § 182.

definir en uno de los sub-sistemas caracterizados por un ordinal de la clase Cl_1. En general, se obtiene así una clase Cl_2 más vasta que la clase Cl_1. Se considera después todos los ordinales que se pueden definir dentro de uno de los sub-sistemas caracterizados por un ordinal de la clase Cl_2. Y así sucesivamente.

Lo que caracteriza lo constructivo es la posibilidad de ir cada vez más lejos: la noción de *después.*

El campo original de aplicación de esta noción es el de los enteros. La sucesión de enteros puede caracterizarse, en efecto, mediante la noción de *sucesor,* y es sabido que se puede reconstruir toda la serie de enteros a partir de 0 mediante la aplicación exclusiva del operador de sucesión.

Pero la serie de enteros no agota el campo de aplicación de esta noción. En efecto, se puede, permaneciendo dentro del punto de vista constructivo, hablar del objeto que viene *después* de la serie de los enteros (el tipo de orden de esta serie), e incluso, de manera general, se puede hablar del objeto que viene *después* de una serie creciente infinita de ordinales (el tipo de orden de esta serie es el ordinal-límite).

Pero lo que queda excluido de la posibilidad de una totalización que nos haría pasar, por ejemplo, de una enumeración cualquiera de conjuntos de enteros a la clase de todos los conjuntos de enteros, o de una enumeración cualquiera de ordinales de la segunda clase al conjunto de todos los ordinales de la segunda clase.

236. Significación y límites del formalismo. Esquema de una problemática de interpretación.

Los teoremas de limitación corresponden a propiedades metateóricas. Si nos permiten, en definitiva, caracterizar a los formalismos como estructuras constructivas, es en la medida en que se consideren, desde el exterior, como entidades susceptibles de prestarse a un análisis objetivo. (Así, el Teorema de Löwenheim-Skolem es un teorema metateórico: no significa que no sea posible representar en un sistema formal un conjunto no-numerable; significa que siempre será posible enumerar tal conjunto, a condición de que se considere desde el exterior del sistema).

Tratemos de comprender mejor lo que da al sistema formal, tratado objetivamente (en el sentido que acabamos de exponer), el carácter de constructivo.

Se puede considerar que los elementos que intervienen en un sistema formal corresponden a actos tematizados, perfectamente distintos unos de otros. En el lenguaje vivido, las intenciones significativas que subyacen en el discurso bañan en cierta manera las palabras que lo componen en una atmósfera de sentidos que hacen de éste instrumentos eficaces de expresión. Los elementos del discurso, en la medida en que se ven arrastrados en el movimiento de la palabra, no pueden ser considerados como realmente distintos entre sí; hay que hablar más bien que de una sucesión discreta de momentos, de una totalidad provista de significación que es modulada, mediante variaciones sintácticas y semánticas, según las articulaciones de sentido que

se proyecta entre ellas. Las partes del discurso se envuelven, pues, unas en otras, fusión de todos los elementos en una unidad que no tiene otro contorno que el del acto de expresión del que son sus portadores.

En el lenguaje objetivado que constituye el sistema formal, por el contrario, el movimiento de la palabra se ha retirado, dejando los elementos del discurso valerse por sí mismos, en una dispersión que permite precisamente considerar a cada uno por su propia cuenta y someterlos a operaciones de numeración. Una vez que un objeto lingüístico es retirado de esta corriente viviente que liga las componentes del lenguaje a las fuentes del sentido, no puede ya considerarse sino como la traza de un acto que ha sido tematizado, como la referencia de una operación que no pertenece ya a la actualidad de la conciencia, sino que ha sido proyectada fuera de ella en el mundo de las cosas.

Al mismo tiempo este acto puede considerarse como una pseudocosa, esta operación, que había sido anteriormente iniciativa de una conciencia, se transforma en un proceso exterior que se desarrollará entre objetos referenciables, entre los cuales se instauran relaciones perfectamente definidas e inmutables.

Entonces es posible llevar su atención sobre una sucesión cualquiera de actos así tematizados; se puede incluso aplicar a una serie estrictamente finita de pseudocosas la operación de sucesión y construir así una sucesión infinita cuyos términos ya no representan sino tematizaciones posibles. (Así, cuando consideramos la serie de enunciados obtenidos aplicando un predicado dado a los enteros sucesivos). Se puede ir más lejos aún y considerar un acto que vendría tras de los demás actos de tal serie. (Así, cuando, conforme a la Regla de CARNAP [74], se pasa de la serie de las proposiciones $A(\kappa)$ a la proposición (Θ) $A(\Theta)$, determinado de esta manera una nueva serie que tiene el tipo de orden $\omega + 1$). Y así sucesivamente.

Así, pues, todo objeto formal puede ser considerado como el índice de una tematización, como la proyección al exterior de una etapa vivida de la conciencia. Unas veces esta etapa es la posición efectiva de un término determinado (como en el caso de un enunciado sobre un individuo determinado, por ejemplo, sobre un determinado entero), y otras evocación exclusiva de operaciones posibles (como cuando se considera una sucesión infinita de términos, o cuando se evoca el término que viene después de esta sucesión). Pero en sí misma, como etapa, pertenece a la actualidad, tiene un carácter efectivo. Hay que distinguir, por tanto, en cada etapa de la conciencia matemática, el contenido a que apunta y la realidad que posee cuando es observada.

En su realidad propia de cosa observada, la conciencia matemática siempre será efectiva; pero también puede apuntar a operaciones virtuales como a términos efectivamente dados. Ahora bien, no es el contenido de aquello que se persigue lo que se tematiza, sino la forma en que se hace; así, toda tematización posee una realidad efectiva que se inscribe en lo actual. Por este motivo todas las tematizaciones cuya imagen pueden ser representadas por los elementos de un sistema formal son homogéneas entre sí; aunque, en las visiones que representan, unas se refieran a actos

[74] Véase § 122.

que han sido planteados efectivamente y las otras sólo a posibilidades de efectuación, unas y otras corresponden a etapas efectivas. En tanto que una tematización dada corresponde a un acto, puede ser, a su vez, tematizada, pero sólo en una tematización nueva. Así se puede ir de tematización en tematización, pero nunca es posible reemplazar lo actual por lo virtual: toda evocación de lo virtual reposa necesariamente sobre lo actual. El sistema formal representa este suelo de actualidad a partir del cual el pensamiento matemático puede progresar en la exploración de lo virtual.

Pero si es posible perseguir lo virtual en lo actual, nunca es posible hacer pasar todo lo virtual en la esfera de la actualidad. Esto supondría que se puede alcanzar efectivamente el término último de una serie infinita después de haber planteado efectivamente todos los términos, y esto supondría al mismo tiempo que se pueda hacer coincidir el acto en tanto que acto con lo que él pretende (mientras esta coincidencia no sea asegurada, subsiste, en efecto, un horizonte de virtualidad que no se reintegra a la actualidad). Pero se trata de condiciones irrealizables.

Por este motivo no podrían concebirse tematizaciones que correspondan a la totalización de todas las tematizaciones posibles. Toda tematización perteneciente a lo actual debería fundarse en un acto de posición que agotaría de una vez todo el campo de lo posible; por así decir, debería saltar en un solo movimiento una serie de términos dentro de la cual se pudiese progresar a voluntad. Al mismo tiempo, debería sobrevolarse a sí misma puesto que, en tanto que acto, se situaría a sí misma en alguna parte de esta serie. Indudablemente, se puede concebir la posibilidad de una tal operación de totalización, pero no se puede cumplirla efectivamente y, por consiguiente, no se la puede tematizar.

Por lo demás, el único sentido que podría tener sería el de correspondencia con una reflexión total. Pero la reflexión total es un concepto puro que sólo podría convertirse en realidad mediante una metamorfosis radical de nuestra experiencia.

Son los caracteres de las estructuras de la conciencia, y singularmente los caracteres de la temporalidad que pertenecen propiamente a la conciencia, los que arrojan luz sobre el fenómeno ante el que nos encontramos.

Si los elementos de un lenguaje objetivado pueden ser considerados como el resultado de una tematización, es que la conciencia no es actualidad pura: a medida que se desarrollan sus operaciones, escapa, por así decir, a sí misma en una dimensión del pasado, que sin duda permanece ligada al presente, pero que, por el hecho mismo de haberse retirado de esta coincidencia inmediata de sí consigo misma que define al presente, se presta a una serie reflexiva en la que las operaciones que, en un momento dado, tienen ocupado el foco de la presencia, se dan como objetos a los que se puede situar a distancia y cuyas relaciones mutuas simbolizan en forma objetiva las relaciones vividas que las vinculan en el movimiento de la temporalización. Así, la operación de sucesión simboliza esta incesante caída en el pasado que pertenece a la estructura de temporalidad.

Cada nueva operación abandona, a su vez, el campo de la presencia para reunirse, en la objetivación reflexiva, con todas las que ya pertenecen a lo que no es. Aquí tenemos, en el desdoblamiento ininterrumpido del sí consigo que caracteriza el

movimiento de la temporalización (y que caracteriza al mismo tiempo el movimiento de la reflexión), la fuente de esta posibilidad siempre abierta de un *después* que caracteriza las operaciones constructivas.

Pero la estructura misma de la temporalidad excluye la posibilidad de una reflexión total; no existe un momento que sería en sí mismo la recapitulación de todos los demás, un presente que absorbiese en sí mismo el pasado y el porvenir y que se dilatase a todas las dimensiones de la experiencia. El único presente que nos es accesible es un presente marcado de precariedad; basculando sin cesar en la no-actualidad de lo que ya no existe, está al mismo tiempo abierto a la no-actualidad de lo que no es aún; en su misma desaparición, no deja de anunciar lo que, realizándose, va a alcanzar su perpetua evanescencia.

La noción de constructivo, que se manifiesta esencialmente ligada al dominio del formalismo, es como una proyección objetiva de esta estructura de la conciencia. Y esto no tiene nada de sorprendente, pues dicha estructura nos viene dada por un campo operatorio en el que volvemos a encontrar los vestigios de los actos que han debido ser efectivamente puestos. Lo único que permite añadir la transcripción formal a la sucesión efectiva de los actos es la representación de sus prolongaciones posibles. Esta representación lleva, primero, a la serie de los enteros, y posteriormente a los ordinales de segunda clase, deteniéndose en las fronteras de lo numerable.

Ahora podemos continuar las consideraciones desarrolladas en el § 234 sobre la oposición de lo intuitivo y lo formal, tratando de ligarlas a lo que nos sugiere la noción de constructividad.

Como se ha podido ver, el formalismo no puede comprender en su totalidad el contenido de la intuición y, en tal sentido, la idea de una formalización total debe considerarse irrealizable. Pero el lenguaje vivido, en el que se expresa la intuición, deja de ser, en ciertos momentos, eficaz; no permite controlar las significaciones que él mismo ha contribuido a crear, y su fecundidad llega a ser fuente de confusión. El pensamiento matemático se ve obligado entonces a suspender el uso del lenguaje vivido, proyectando las significaciones que sostiene en un cuerpo de expresiones dotado de una existencia autónoma, cortado de este movimiento viviente que penetra en el lenguaje natural y que constituye la esencia de la comunicación. Para mejor conseguir su objeto, se forja un instrumento que posee los caracteres de la cosa y que, sin embargo, proporciona algo parecido a un modelo tangible de sus propias operaciones.

El lenguaje simbólico posee precisamente esta doble propiedad: de una parte se presenta como una exterioridad enteramente accesible a la percepción, y por otra, es capaz de representar las fases que se concatenan en el plano del pensamiento intuitivo. De este modo hace posible un análisis riguroso de estas fases, pero este análisis es solamente indirecto: no se refiere ya a los contenidos significativos que se elaboran en la intuición, sino sobre su representación formal. La elucidación del sentido se convierte en investigación metateórica. Para aclarar la confusión, el pensamiento matemático recurre no ya a un método de reflexión, sino a un método de objetivación; para criticarse, no trata de reconceptualizarse en su acto mismo, sino

que se esfuerza en trasponer sus operaciones dentro de una estructura objetiva y resolver las dificultades ante las que tropieza, imponiendo a esta estructura propiedades adecuadas. Así vuelve a encontrar, con la instauración del sistema formal, la eficacia perdida: como el sistema formal se compone de entes que se presentan de manera explícita o que es posible obtener por medio de procedimientos efectivos, se puede hacer una descripción exacta y sistemática, se pueden someter a un control riguroso las expresiones que permite construir.

Pero es precisamente por este motivo por lo que los sistemas formales se encuentran sometidos a limitaciones internas; estas limitaciones se suscitan, como se ha podido ver, de la estructura misma de los sistemas formales.

El éxito de la empresa es, por tanto, solamente parcial: la proyección en la objetividad procura un mínimo de rigor, pero éste es siempre relativo respecto de un sector limitado del campo intuitivo.

No podemos proponernos abolir el trabajo de la intuición. El formalismo, una vez constituido, tiene su conciencia propia y autoriza manipulaciones autónomas, pero sólo provisionalmente; su sentido continúa siendo relativo al campo de la intuición del que se ha desgajado. Hay un momento de la interpretación del que no se puede hacer totalmente abstracción.

Pero, en definitiva, ¿cómo está relacionado el formalismo con la intuición?

La intuición comienza, ciertamente, por lo constructivo, se caracteriza por ser algo abierto: después de un entero siempre vienen otros, después de todo ordinal de la segunda clase siempre existen otros; después de todo conjunto de enteros siempre habrá otros conjuntos de enteros. Ninguna enumeración agota lo que es accesible al pensamiento constructivo, y, sin embargo, este pensamiento queda siempre dentro de lo enumerable: tras de haber determinado un objeto que no encaja ciertamente en una enumeración dada, es posible determinar una nueva enumeración en la que este objeto esté incluido, y así sucesivamente. Esta potencialidad que la intuición encuentra inscrita en sus distintas etapas es la manifestación de algo inagotable: siempre es posible rebasar todo término efectivamente accesible. Así, pues, esa potencialidad determina una especie de horizonte que nunca se da en forma actual, a la manera de los términos que se pueden efectivamente alcanzar y describir y que, sin embargo, se da implícitamente con cada término. Este horizonte es en cierto modo lo que existe de más presente, pues hace posible la percepción de todo lo que puede hacerse presente a la intuición. Se trata, por tanto, de una componente necesaria de la estructura de la experiencia matemática.

Es posible entonces, para el pensamiento intuitivo, representar este horizonte mediante una especie de operación de pase al límite, como uno de los objetos dados explícitamente por la experiencia. Esto es lo que ocurre cuando se adopta el punto de vista del infinito actual y cuando se habla de los conjuntos no-numerables.

No se suprime, por tanto, el horizonte que acompañaba y hacía posible el despliegue del pensamiento constructivo. En el dominio de la aritmética cantoriana se da también la presencia de esta misma potencialidad indefinida que hace posible el

engendramiento de las clases sucesivas de los ordinales transfinitos. Reduciendo el horizonte a un término objetivo actualmente dado, no se la destruye: simplemente, se la hace retroceder. Y la operación se prosigue hasta un punto en que se choca con las contradicciones de la teoría de conjuntos, es decir, hasta el momento en que, pretendiendo hablar de la totalidad de todos los conjuntos o todos los ordinales, se trata, totalizando todos los objetos matemáticos concebibles, de abolir esta estructura de horizonte que continúa siendo, sin embargo, una condición estructural del pensamiento matemático. Las contradicciones que surgen ponen de manifiesto la confusión en que se ha incurrido y los límites de la conceptualización en lo que concierne a la noción de infinito.

Entonces se hace necesario, a fin de desembrollar la situación confusa en la que la intuición se ha visto arrastrada, recurrir a la formalización. El pensamiento matemático no puede ser eficaz sino en la medida en que se vincule a condiciones rigurosas de realización. Y es en el dominio de lo formal donde se encuentran estas condiciones. Desde este momento sólo se reconoce la existencia matemática allí donde los objetos pueden ser representados en un formalismo no contradictorio.

Pero el formalismo es el dominio de la construcción. Es ésta precisamente la que le infunde eficacia y al mismo tiempo la que marca sus límites. En la medida en que se circunscribe a lo constructivo, el pensamiento es capaz de dominar perfectamente su objeto. Pero, al mismo tiempo, por el hecho de que lo constructivo comporte en sí la indicación de una potencialidad indefinida, siempre ofrece el medio de desbordar las representaciones que ha permitido construir. Así el sistema formal se ve arrastrado a una especie de transgresión indefinida de sus límites, que se manifiesta de manera negativa por los hechos de limitación, y positivamente por la posibilidad de construir sistemas indefinidamente extensibles.

El formalismo en sí, al pertenecer a lo constructivo, se ve englobado en esta estructura de horizonte que acompaña al pensamiento constructivo. Este es el motivo de su penetración en lo intuitivo. Si la superación de la intuición hacia lo formal queda como condición indispensable de la realización de un pensamiento que no puede alcanzar sus objetos más que por operaciones constructivas, lo formal no puede ser separado de su enraizamiento en la intuición [75].

---

[75] Esto no quiere decir que el sentido de los objetos formales dependa de una intuición previa. El formalismo, una vez constituido, queda independizado de las fases intuitivas que han podido preparar su aparición. Y desde el punto de vista del análisis formal, no es necesario interrogarse sobre lo que es anterior a la formalización. Las investigaciones metateóricas se centran sobre los sistemas tal como se presentan y estudian sus propiedades intrínsecas. Cuando más, será posible plantearse el problema de la aplicación de las investigaciones formales y preguntarse en qué medida tal o cual sistema formal puede ser útil para tal o cual fin.

Si se habla de un enraizamiento de lo formal en la intuición, es desde el punto de vista de una reflexión sobre el formalismo considerado como un momento de una determinada empresa del pensamiento. Sólo cuando intentamos reemplazar el formalismo en la totalidad de la experiencia se trata de comprender su función respecto al proyecto global del conocimiento, se puede tratar de comprender su función respecto al proyecto global del conocimiento, interrogarse sobre su génesis y elucidar, de una parte, la relación en que se encuentra con los

Por este motivo queda vinculado al horizonte de que antes hablábamos. Este horizonte permanece necesariamente exterior, pero al mismo tiempo está en la fuente de su significado. Si lo formal no comprende lo intuitivo, es que el horizonte de lo constructivo desborda siempre las construcciones que se hayan podido efectivamente construir.

La verdad del platonismo radica en que representa bajo forma de existencias ideales una estructura real de la experiencia, pues se pueden interpretar las afirmaciones de existencia concernientes a las clases y a los conjuntos infinitos como simples indicaciones que abren a la investigación nuevas perspectivas. Estas afirmaciones no representan sino la proyección, dentro de los entes ideales a que se presta la consistencia de los objetos construidos, de esta especie de llamada incesante que no termina nunca de requerir al pensamiento para nuevas prospecciones.

Si el sistema total es irrealizable es porque la experiencia matemática se despliega sobre el fondo de un horizonte inagotable. Este horizonte, al ser condición de posibilidad de la experiencia y de lo representable, sólo puede ser pensado como condición de posibilidad. (Es más, sólo puede ser pensado en el seno de una reflexión que, adoptando como objeto la misma experiencia matemática, se encuentra necesariamente en discontinuidad con ella). Por consiguiente, no puede ser representado este horizonte. Lo que pertenece a la estructura de lo constructivo, en tanto que tal, no puede ser conseguido en una construcción, pues una condición no puede presuponerse a sí misma. Si es cierto que la estructura de lo constructivo simboliza la de la temporalidad, la imposibilidad del sistema total se une a la imposibilidad de la reflexión total.

La experiencia matemática sólo manifiesta caracteres que pertenecen a la experiencia humana como tal. No podemos acceder a una presencia pura. Tanto en nuestro propio ser como en el mundo que nos ha sido dado y en la manera que nos ha sido dado existe una irreductible opacidad sobre la que intentamos perpetuamente ganar terreno sin poder abolirla. La presencia siempre está mezclada de ausencia y la positividad de negatividad. Hay una claridad que nos es accesible, pero siempre

---

estratos más elementales de la experiencia y, por otra, el papel que desempeña respecto a los ideales implícitos de la ciencia.

Cuando se examinan desde este punto de vista los hechos de limitación, se percibe que hacen aparecer, en el mismo interior del formalismo, una referencia a una fuente de evidencia que desborda el formalismo. A la vez porque se constituye partiendo de intuiciones y porque indica un horizonte de realidad que nunca llega a alcanzar, el formalismo remite a una capa de experiencia que sostiene, por así decir, sus resultados y alimenta su significación. Se constituye como formalismo dentro del movimiento mediante el que se separa de este soporte y conquista su autonomía, pero este movimiento sólo es posible en la medida en que la intuición no deje de proporcionar al formalismo el fundamento a partir del cual se erige y en el que funda su consistencia.

La vida del espíritu posee una unidad que le es propia; sus diferentes momentos no están separados entre sí de manera absoluta. Cuando se trata de comprenderle según su unidad, no se puede dejar de captar las relaciones de fundamento que ligan entre sí estos diferentes momentos, y en particular —por lo que nos ocupa— la relación que liga al campo de intuición al de la formalización y que funda el segundo sobre el primero.

vacilante, y lo que se revela es al mismo tiempo lo que se disimula. Nunca conseguimos captar el ser, sino sus manifestaciones.

La experiencia matemática no puede, por consiguiente, llenar esta distancia que separa lo formal de lo intuitivo, las construcciones posibles del sistema total, el infinito potencial del infinito actual. El pensamiento matemático sólo puede progresar en el descubrimiento de su objeto apoyándose sobre construcciones; lo que puede captar del objeto está en el formalismo que lo representa. Pero este objeto desborda siempre infinitamente las formas en las que se presenta. El ente matemático no se agota en sus manifestaciones.

Hay que ver en este rodeo, forzoso por los dominios de lo operatorio, la condición de un pensamiento acabado que siempre se toma en la sucesión de sus actos y que no puede llegar a una plena caridad sobre sí mismo ni a una plena comprensión de sus objetos. No hay ni creación del objeto ni intuición adecuada de sus propiedades, sino acto de descubrimiento ligado a un perfeccionamiento progresivo de los instrumentos que los hace capaces de mostrar una realidad que los trasciende.

Sería preciso, para prolongar estas observaciones, precisar el modo de funcionamiento de un pensamiento ligado a operaciones efectivamente realizables y, por otra parte, la relación que une el ser matemático a sus manifestaciones, haciendo aparecer, a partir de éstas, la huella en la experiencia matemática de la finitud del ser humano.

Así nos veríamos llevados a una elucidación de la estructura de la existencia humana en general.

Está en la naturaleza de una existencia finita el no poder alcanzar las realidades fundamentales, sino en un acto de descubrimiento que sólo muestra sus manifestaciones. Y, recíprocamente, las realidades fundamentales sólo pueden revelarse a una existencia finita a través de figuras siempre inadecuadas.

NOTA I

RESUMEN DE LA MEMORIA DE GÖDEL SOBRE LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES

La célebre Memoria de GÖDEL sobre las *proposiciones indecidibles* [1] se divide en cuatro parágrafos:

— El primero da una idea sumaria del Teorema Principal e indica el mecanismo de su demostración.
— El segundo da la descripción del formalismo estudiado por GÖDEL y una demostración completa del Teorema Principal.
— El tercero establece dos corolarios importantes de este Teorema, uno relativo a las *proposiciones aritméticas* y el otro a la *lógica de predicados de primer orden.*
— El cuarto establece el Teorema de la demostración de la no-contradicción del sistema.

Nosotros seguiremos la disposición de la Memoria de GÖDEL en lo que concierne a la división en parágrafos. Pero, por razones de claridad de exposición, introduciremos en el interior de los parágrafos subdivisiones que no figuran en la Memoria de GÖDEL.

237. INTRODUCCIÓN.

El contenido de este parágrafo ha sido expuesto, con algunas modificaciones en la notación, en nuestro § 72.

GÖDEL designa el sistema formal que utiliza mediante la letra *P.*

238. TEOREMA PRINCIPAL.

Este parágrafo consta de tres partes:

1) Descripción del sistema *P.*

[1] GÖDEL 3.

2) Aritmetización y teoremas de la representación en P de un cierto número de propiedades y de operaciones metateóricas de P.

3) Enunciado y demostración del teorema y observaciones al respecto.

1. *Descripción del sistema P.*

1.1. Morfología del sistema.

Describiremos con el mayor detalle esta parte, para indicar de manera precisa cuál es la terminología utilizada por GÖDEL [2].

1.1.1. *Signos fundamentales* [3].

1.11.1. *Constantes*: $\sim$, $\vee$, Π, 0, f, (,) [4].

1.11.2. *Variables del primer tipo*: $x_1, y_1, z_1, \ldots$.

1.11.3. *Variables del segundo tipo*: $x_2, y_2, z_2, \ldots$.

1.11.4. *Variables del tercer tipo*: $x_3, y_3, z_3, \ldots$.

Y así sucesivamente para todo número natural.

1.12. Categorías de expresiones.

1.12.1. *Signos de primer tipo* [5].

Son las combinaciones de signos de la forma: $a, fa, ffa, \ldots$, donde a es 0 o una variable del primer tipo.

Si $a = 0$, se hablará de *signo de número.*

1.12.2. *Signos del n-ésimo tipo,* para $n > 1$ [6].

Para $n > 1$, se entiende por *signo del n-ésimo tipo* lo mismo que por *variable del n-ésimo tipo.*

1.12.3. *Fórmulas elementales* [7].

Una combinación de signos de forma $a(b)$, donde b es un signo del n-ésimo tipo y a un signo del $(n + 1)$-ésimo tipo, es una *fórmula elemental.*

1.12.4. *Clase de las fórmulas*: es la menor clase que contiene todas las *fórmulas elementales* y que contiene, al mismo tiempo que las fórmulas a y b, las fórmulas $\sim (a)$, $(a) \vee (b)$, $x_i \Pi (a)$ [8].

1.12.5. *Proposiciones*: fórmulas en las cuales no existen variables libres [9].

1.12.6. *Signos de relación de n argumentos*: fórmulas que llevan n variables libres del primer tipo y ninguna otra variable libre.

1.12.7. *Signos de clase*: signos de relación de 1 argumento.

---

[2] La comparación de esta nota con la Sección 2-III mostrará en qué medida nos hemos apartado de GÖDEL en terminología y elección de signos.

[3] En toda esta nota, las expresiones impresas en itálicas traducen expresiones de GÖDEL.

[4] El símbolo Π es el cuantificador de universalización; debe ser precedido por la indicación de la variable a la que afecta. Por ejemplo, $x_1 \Pi (a)$ debe leerse: para todo x_1, se tiene (a).
El símbolo f designa la función *sucesor.*

[5] Correspondiente a los *términos* del § 77.
Los *signos de número* corresponden a las *cifras* del § 77.

[6] Corresponden a las *expresiones del n-ésimo tipo* del § 77.

[7] Corresponden a las *proposiciones elementales* del § 77.

[8] Las *fórmulas* corresponden a las *proposiciones* del § 77.

[9] Corresponden a las *proposiciones cerradas* del § 77.

1.13. *Signos introducidos como abreviaciones*:

$=$, (Ex_i), $\supset .\equiv$ [10].

1.2. Parte axiomática.

Los axiomas están formulados por medio de esquemas.

Estos esquemas (a diferencia de los símbolos utilizados) son los de nuestro § 79.

Las reglas se formulan implícitamente en la siguiente definición: una fórmula c se denomina *consecuencia inmediata* de a y de b si a *es* una fórmula $(\sim (b) \vee c)$, de a si c es la fórmula $v\ \Pi(a)$, donde v es una variable cualquiera.

Clase de *fórmulas demostrables*: es la menor clase que contiene los axiomas y que es saturada respecto a la relación de *consecuencia inmediata.*

2. *Aritmetización del sistema P y teoremas preparatorios.*

2.1. Aritmetización del sistema *P.*

Se asocia biunívocamente números enteros a los signos fundamentales, a las fórmulas y a las series de fórmulas de *P* [11]. La correspondencia así definida permite asociar una relación metateórica a una relación entre números enteros.

2.2. Introducción de las funciones recursivas.

Definición de la noción de *función recursiva de números enteros* [12] mediante el esquema de recursión primitiva, del esquema de sustitución y de las dos funciones *constante* y *sucesor.*

Definición de la noción de *relación recursiva entre números enteros* [13].

2.3. Teoremas sobre las funciones y relaciones recursivas.

Enunciado y demostración de cuatro teoremas (Teorema I a IV) sobre las funciones y relaciones recursivas, que serán utilizados para demostrar los teoremas de la sección siguiente. Estos cuatro teoremas son los de nuestro § 86 (I(86)) a IV(86)).

2.4. Definiciones recursivas de un cierto número de concepciones metateóricas.

Se definen cinco propiedades de enteros y después (a su través) cuarenta propiedades metateóricas que pueden expresarse bajo forma de relaciones entre números enteros o funciones de números enteros.

Todas estas funciones y estas relaciones entre números enteros están definidas de tal manera que, mediante la simple aplicación de los teoremas de la sección precedente, se puede afirmar que son recursivas. Se ve en particular que todas las categorías de expresiones del sistema *P* pueden expresarse por funciones o relaciones recursivas. Igualmente, las propiedades *ser un axioma, ser consecuencia inmediata* (de una o dos fórmulas dadas), *ser una figura de demostración* (ser una serie de fórmulas cada una de las cuales es un axioma o consecuencia inmediata de fórmulas

[10] Los signos $\supset$ y $\equiv$ corresponden a los $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ del § 78.

[11] El procedimiento utilizado es el descrito en el § 84.

[12] GÖDEL habla simplemente de *funciones recursivas.* En realidad se trata de funciones recursivas primitivas.

[13] Esta noción corresponde a la de *predicado recursivo* (primitivo) del § 60.

que la preceden), *ser una demostración de una fórmula dada,* se expresan mediante relaciones recursivas.

Se define, en fin, la propiedad *ser una fórmula demostrable,* de la que no se puede afirmar que se exprese mediante una relación recursiva.

2.5. Representación de las relaciones recursivas en *P.*

Enunciado y demostración de un teorema (Teorema V) que afirma que toda relación recursiva es *definible en P* (mediante un signo de relación de *P*) [14].

Este teorema corresponde al lema de nuestro § 90 (enunciado V(90)).

3. *Teorema principal y observaciones.*

3.1. El teorema principal y su demostración.

Sea κ una clase de fórmulas. Se denomina $Flg(\kappa)$ (*Folgerungsmenge von* κ) al menor conjunto de fórmulas que contiene todas las fórmulas de κ y todos los axiomas, y es cerrada respecto a la relación de *consecuencia inmediata.* Será *ω-no-contradictorio* [15] si no existe ningún signo de clase a tal que $Flg(\kappa)$ contenga a la vez todas las fórmulas $[x_1/n]a$ [16] (para cualquier n) y la fórmula $Neg\ (v\ Gen\ a)$ [17].

El teorema (Teorema VI) se enuncia como sigue:

(XCIX) *A toda clave recursiva* [18] *ω-no-contradictoria de fórmulas, se puede hacer corresponder un signo de clase r tal que ni v ni* $Neg\ (v\ Gen\ r)$ [19] *pertenezcan a* $Flg(\kappa)$.

Sigue la demostración. El desarrollo de nuestros §§ 93, 95 y 96 sigue en lo esencial la demostración de GÖDEL.

3.2. Observaciones sobre este teorema.

3.21. Si se pudiese dar una decisión formal (mediante la clase κ) de la proposición $v\ Gen\ r$ [20], se podría demostrar efectivamente una ω-contradicción.

3.22. Observación proponiendo una utilización algo diferente del Teorema V, permitiendo formular de otra manera el Teorema VI.

3.23. Si κ no es ω-no-contradictorio sino solamente no-contradictorio, no se puede afirmar la existencia de una proposición indecidible, sino sólo la de una

---

[14] GÖDEL utiliza el término *definible* en el sentido definido en el § 190.

[15] La expresión *no-contradictorio* corresponde a la expresión *coherente* del § 35. La expresión *ω-no-contradictorio* corresponde a la expresión *ω-coherente* del § 36.

[16] Esta notación designa la expresión obtenida reemplazando la variable libre x_1 de a por el *signo de número* correspondiente al entero n.

[17] Esta notación sintáctica designa la expresión obtenida ligando la variable a por un cuantificador de universalización y haciendo preceder de él la fórmula obtenida del signo de negación.

[18] GÖDEL entiende por esto una clase que puede definirse por una *relación recursiva.*

[19] Por estas notaciones sintácticas, GÖDEL designa, respectivamente, las fórmulas $(x_1)\ r\ (x_1)$ y $\sim (x_1)\ r\ (x_1)$, que se pueden formar a partir de la fórmula $r\ (x_1)$, utilizando el cuantificador de universalización y después la negación.

[20] Es decir: demostrar efectivamente que se puede derivar o refutar esta proposición a partir de los axiomas de *P* y de la clase κ.

propiedad para la que no se puede dar contraejemplo ni demostrar que conviene a todo número.

3.24. Se puede construir, a partir de una clase recursiva ω-no-contradictoria, otra clase que es no-contradictoria pero no ω-no-contradictoria. Basta con añadir a κ la proposición *Neg* (*v Gen r*), que no pertenece a $Flg(\kappa)$.

3.25. Existe al menos una clase κ recursiva y ω-no-contradictoria que sólo contiene un número finito de fórmulas. Esto basta para demostrar que, aun utilizando el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo, no se puede hacer decidibles todas las proposiciones de *P* (con tal que estas hipótesis no supriman la ω-no-contradicción).

3.26. La demostración del Teorema VI reposa esencialmente en las dos hipótesis siguientes:

1) La clase de los axiomas y la relación de consecuencia inmediata son *definibles recursivamente* [21].

2) Toda relación recursiva es *definible en P* (en el sentido del Teorema V).

En tales condiciones, todo sistema que verifique estas dos hipótesis y que sea ω-no-contradictorio, existen proposiciones indecidibles de la forma $(x)\ F\ (x)$, donde *F* es una propiedad recursivamente definida de números enteros. Y lo mismo sucede para toda extensión de tal sistema obtenido añadiéndole una clase recursivamente definible ω-no-contradictoria de axiomas.

Entre tales sistemas tenemos los de la Teoría de conjuntos de ZERMELO-FRAENKEL y de VON NEUMANN, y los sistemas de axiomas de la teoría de números [22].

239. OTROS TEOREMAS SOBRE LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES.

En este parágrafo GÖDEL establece varios teoremas que están emparentados con su Teorema Principal.

1. *Teorema sobre las relaciones aritméticas.*

Se dice que una relación es *aritmética* si se la puede definir únicamente mediante funciones de adición y de multiplicación, y de las constantes lógicas $\sim$, V, (x), =, pudiendo aplicarse solamente estos dos últimos signos a números enteros. Una proposición constituida únicamente por medio de estas componentes se denomina *aritmética.*

Así tenemos en teorema (Teorema VII):

(C) *Toda relación recursiva es aritmética.*

La demostración se realiza por inducción estructural [23].

---

[21] Es decir: pueden definirse mediante predicados recursivos.

[22] Tales como el sistema *LFN* del § 129.

[23] Véase § 32.

2. *Teorema sobre las proposiciones aritméticas indecidibles.*

Como toda proposición de la forma $(x)\ F\ (x)$, donde F es una propiedad recursivamente definida, es equivalente a una proposición aritmética (en virtud del teorema precedente) y esta equivalencia puede ser demostrada en P, tenemos el (Teorema VIII):

(CI) *En todo sistema formal obtenido a partir del sistema P (o de uno de los sistemas de axiomas de la teoría de conjuntos) añadiéndole una clase recursivamente definible ω-no-contradictoria de axiomas, existen proposiciones indecidibles* [24].

3. *Teorema sobre el cálculo restringido de funciones.*

Aquí se dan los siguientes dos teoremas:

3.1. Teorema IX.

(CII) *En todos los sistemas formales anteriormente descritos* [25] *se dan problemas indecidibles del cálculo restringido de funciones, es decir, proposiciones de este cálculo cuya validez no se puede demostrar y para las que no se pueden encontrar contraejemplos.*

3.2. Teorema X.

(CIII) *Todo problema de la forma* $(x)\ F\ (x)$, *donde F es una propiedad definida recursivamente, puede reducirse al problema decidir el carácter realizable de una proposición del cálculo restringido de funciones* [26].

240. Teorema sobre la demostración de no-contradicción de P.

En este parágrafo, Gödel establece un teorema (Teorema XI) que es, en suma, un corolario de su Teorema Principal, y que trata de la no-contradicción del sistema P y de sus extensiones.

1. *Enunciado y demostración del teorema.*

(CIV) *Sea* κ *una clase no-contradictoria recursiva cualquiera de fórmulas. La proposición que expresa que* κ *es no-contradictoria no es* κ*-demostrable* [27].

En particular, la no contradicción de P no es demostrable en P (basta con tomar para κ la clase vacía de fórmulas), a condición de que P sea no-contradictoria (en caso contrario, se puede demostrar cualquier cosa).

---

[24] Este teorema ha sido formulado casi en la misma forma en el § 124.

[25] En el § 238, en 3.26.

[26] Este teorema y el precedente han sido formulados en forma ligeramente distinta en el § 124.

[27] Una proposición se dice *κ-demostrable* si pertenece a $Flg\ (x)$.

La demostración de este teorema se puede hacer según el mecanismo indicado en el § 127 [28].

2. *Observaciones sobre este teorema.*

2.1. La demostración del Teorema XI es constructiva, puesto que permite, desde el momento en que disponemos de una demostración en la clase κ de la proposición que expresa que κ es no-contradictoria, derivar efectivamente una contradicción en κ.

2.2. El teorema se extiende fácilmente a los sistemas de axiomas de la teoría de conjuntos.

2.3. Estos resultados no contradicen en absoluto el punto de vista de HILBERT. Este demanda simplemente que se efectúe la demostración de no-contradicción con medios finitos. Pero nosotros podemos suponer que existen demostraciones finitas que no pueden ser representadas en P (o en los sistemas de axiomas de la teoría de conjuntos).

2.4. En el Teorema principal (Teorema VI) se puede reemplazar la hipótesis de la κ-no-contradicción por la siguiente: *la proposición que expresa que la clase κ es contradictoria no es κ-demostrable.*

[28] En el § 127 se ha considerado de una vez la no-contradicción de P y no la no-contradicción de una clase recursiva cualquiera de fórmulas. Pero el mecanismo de la demostración es exactamente el mismo.

NOTA II

LAS EXPOSICIONES NO-TECNICAS DEL TEOREMA DE GÖDEL

Existen varias exposiciones no-técnicas del Teorema de GÖDEL. Estas exposiciones no se proponen reemplazar la demostración de GÖDEL por demostraciones más simples, sino hacerse comprender lo esencial de esta demostración, sin alcanzar pleno rigor. Es útil decir algo sobre estas demostraciones, ante todo porque aclaran el mecanismo fundamental de la demostración de GÖDEL, y después porque éstas permiten comprender a qué aberraciones se puede llegar si no se sigue el procedimiento de GÖDEL en todas sus articulaciones. Estas exposiciones no se presentan como demostraciones, sino solamente como esbozos de demostraciones, por lo que es arriesgado tomar un esbozo por el objeto mismo que trata de representar, y apoyarse sobre ellos para elaborar una crítica que sólo tendría valor si este esbozo estuviese dotado de un rigor que no persigue.

241. EXPOSICIÓN DE GÖDEL.

Ha sido el mismo GÖDEL el primero en dar una exposición no-técnica de su teorema en el primer parágrafo de su Memoria sobre las Proposiciones Indecidibles [1]. Esta exposición ha sido reproducida con ligeras variaciones en el § 72. La exposición en cuestión no tiene sino un carácter meramente introductorio.

Pero existen otras exposiciones que forman parte de memorias o de obras no-técnicas, y cuyo fin es meramente descriptivo. La principal es la de ROSSER [2].

242. EXPOSICIÓN DE ROSSER.

1. *Preliminares.*

ROSSER indica en primer lugar las principales hipótesis implicadas por el Teorema de GÖDEL [3].

---

[1] GÖDEL 3, págs. 174-176.

[2] ROSSER 5.

[3] ROSSER no da *todas* las hipótesis del teorema, sino solamente las que juzga indispensables y que se ve obligado a llevar a su exposición. Este cuadro de hipótesis se puede comparar al más completo de los §§ 107 y 108.

1. Se distingue una *lengua formalizada LF*, a la que se aplica el Teorema, y una lengua *LB* en la que se hace la demostración (*metalengua*) y que no es necesario que esté formalizada. Las expresiones de *LF* se pueden expresar en *LB* de tal manera que a las proposiciones de *LF* correspondan enunciados de *LB*.

2. *LF* lleva un *operador de negación*, $\sim$, que se interpreta haciéndole corresponder la operación lógica de negación (en *LB*).

3. *LF* lleva expresiones que corresponden (biunívocamente) a los *enteros* y símbolos que desempeñan el papel de *variables*. Si A es una proposición de *LF* que contiene una variable Θ y que corresponde a un enunciado *A* de *LB* que contiene la variable *X*, y si *B* es la proposición que se obtiene a partir de A reemplazando Θ por una expresión correspondiente al entero *n*, entonces B corresponde al enunciado *B* que se obtiene a partir de *A* sustituyendo en él la sustitución correspondiente (reemplazando *X* por *n*).

4. Es posible describir una clase particular de proposiciones de *LF* que se denomina la *clase de proposiciones derivables de LF*.

5. *LF* contiene un *operador de implicación*, $\rightarrow$, que se interpreta haciéndole corresponder la expresión lógica *si .... entonces*.

Y la noción de *proposición derivable* se define de tal manera que, si las proposiciones A y A $\rightarrow$ B son derivables, la proposición B lo es también.

ROSSER recuerda después el principio del método de aritmetización y las consecuencias que comporta la utilización de este método. Si *P** es un predicado metateórico de un elemento *Ec* de *LF*, se puede encontrar un predicado aritmético *P* tal que el elemento *Ec* cumple el predicado *P** si, y solamente si, el número *e* asociado a *Ec* cumple el predicado *P*.

2. *Lema fundamental.*

Expuestos estos preliminares, ROSSER considera tres formas del Teorema de GÖDEL: la forma de GÖDEL [4], la de ROSSER [5] y la de KLEENE [6].

Las dos primeras pueden demostrarse partiendo de un lema fundamental [7] que enuncia el fenómeno de la circularidad siguiente: mediando ciertas condiciones, se puede encontrar en *LF* proposiciones que afirmen de sí mismas una determinada propiedad. Este lema utiliza la *función abreviada de sustitución Sbs* [8].

LEMA 1. (CV) *Sea P el predicado aritmético correspondiente al predicado metateórico P*. Supongamos que el enunciado X posee la propiedad de P y la función Sbs estén representadas en LF. En tal caso se puede encontrar una proposición A de LF cuyo número-G es a, y que representa en LF el enunciado*: *a* tiene la propiedad *P*.

---

[4] Véase § 91.
[5] Véase § 117.
[6] Véase § 115.
[7] Este lema de ROSSER no debe confundirse con el lema de GÖDEL del § 90 (enunciado V (90)).
[8] Véase § 92.

La proposición A expresa, pues, de sí misma que tiene la propiedad *P**.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de las hipótesis, el enunciado *Sbs XX tiene la propiedad P* es representable en *LF* por medio de una proposición B que contiene una variable Θ.

Sea *b* el número-G de B.

Sea A la proposición que se obtiene reemplazando en B la variable Θ por la expresión de *LF* que corresponde a *b*. Esta proposición A representa en *LF* el enunciado: *Sbs b b posee la propiedad P.*

Pero *Sbs b b* es el número-G de A. Esta proposición A tiene, por tanto, las propiedades anunciadas.

3. *Demostración de la forma original del Teorema de* GÖDEL.

Este lema permite demostrar cómo sigue la formal original del Teorema de GÖDEL.

Elijamos como predicado *P** el predicado metateórico *ser no-derivable en LF.* Mediante la aritmetización, podemos hacer corresponder al enunciado *la proposición cuyo número-G es X es no-derivable en LF* un enunciado aritmético, ~ *Dem X.*

GÖDEL ha demostrado para un gran número de sistemas *LF*:

1) La función *Sbs* es representable en *LF.*

2) El enunciado *Dem X* es, por tanto, también el enunciado ~ *Dem X* son representables en *LF.*

3) Si *LF* es ω-coherente y si la proposición que representa en *LF* el enunciado *Dem X* es derivable en *LF,* el enunciado *Dem X* es verdadero.

4) Si el enunciado *Dem X* es verdadero, la proposición que representa este enunciado en *LF* es derivable en *LF.*

El Lema 1 nos permite encontrar una proposición $\mathfrak{V}_G$ cuyo número-G es *g* y que representa en *LF* el enunciado ~ *Dem g.*

La proposición ~ $\mathfrak{V}_G$ representará el enunciado *Dem g.*

Entonces tendremos los dos lemas siguientes:

LEMA 2. (CVI) *Si LF es coherente,* $\mathfrak{V}_G$ *no es derivable en LF.*

Pues si $\mathfrak{V}_G$ es derivable en *LF,* se tiene: *Dem g.*

Y entonces la proposición que representa *Dem g* en *LF* es derivable. Esta proposición es ~ $\mathfrak{V}_G$.

Si *LF* es coherente, $\mathfrak{V}_G$ no puede, pues, ser derivable.

LEMA 3. (CVIII) *Si LF es ω-coherente,* ~ $\mathfrak{V}_G$ *no es derivable en LF.*

Pues si *LF* es ω-coherente y si ~ $\mathfrak{V}_G$ es derivable, el enunciado que representa ~ $\mathfrak{V}_G$, es decir, *Dem g,* es verdadero.

Esto significa que la proposición $\mathfrak{V}_G$ es derivable. Pero entonces *LF* no es coherente. Ahora bien, si un sistema es ω-coherente, es también coherente.

Por tanto, la proposición $\sim \mathfrak{G}_G$ no es derivable.

Los Lemas 2 y 3, considerados conjuntamente, dan el Teorema de GÖDEL en su forma original.

4. *Demostración de la forma de* ROSSER *del Teorema de* GÖDEL.

Para obtener la forma de ROSSER del Teorema de GÖDEL, basta con elegir como predicado *P** un predicado *Dem-R* ligeramente diferente del predicado *Dem* y que no le es equivalente salvo en el caso de que *FL* sea coherente.

ROSSER ha demostrado para una amplia clase de sistemas *LF*:

1) El enunciado *Dem-R X* es representable en *LF*.

2) Si *LF* es coherente y si la proposición que representa en *LF* el enunciado *Dem-R X* es derivable en *LF*, el enunciado $\sim$ *Dem* (*Neg X*)[9] es verdadero.

3) Si *LF* es coherente, y si la negación de la proposición que representa en *LF* el enunciado *Dem-R X* es derivable en *LF*, entonces el enunciado *Dem X* es falso.

El Lema 1 nos permite encontrar una proposición $\mathfrak{G}_R$ cuyo número-G es *r* y que representa en *LF* el enunciado $\sim$ *Dem-R r*. Supongamos que *LF* sea coherente.

La proposición $\sim \mathfrak{G}_R$ representa el enunciado *Dem-R r*.

Si $\sim \mathfrak{G}_R$ es derivable en *LF*, el enunciado $\sim$ *Dem* (*Neg r*) es verdadero, es decir, que $\sim \mathfrak{G}_R$ no es derivable en *LF*.

Por otra parte, como $\mathfrak{G}_R$ es la negación de $\sim \mathfrak{G}_R$ (que representa en *LF* el enunciado *Dem-R r*), si $\mathfrak{G}_R$ es derivable en *LF*, el enunciado *Dem r* es falso, o sea, $\mathfrak{G}_R$ no es derivable en *LF*.

Así, pues, si el sistema *LF* es coherente, contiene una proposición $\mathfrak{G}_R$ que es indecidible.

5. *Demostración de la forma de* KLEENE *del Teorema de* GÖDEL.

La forma de KLEENE del Teorema de GÖDEL puede demostrarse sin recurrir al Lema 1.

KLEENE demuestra que se puede asociar (biunívocamente) números enteros a las funciones recursivas generales.

Por otra parte demuestra que, para una clase extensa de sistemas *LF*:

1) El enunciado *X es un entero asociado a una función recursiva general* es representable en *LF*.

2) Existe una función *F* que enumera los números α tales que la proposición correspondiente al enunciado α *es un entero asociado a una función recursiva general* es derivable en *LF*.

Se puede definir como sigue una cierta función recursiva general *G*: $G\alpha = 1 + {}$ + (el valor adoptado, para el argumento α por la función recursiva general asociada al entero $F\alpha$).

A esta función va asociado un cierto entero *g*.

---

[9] Si *X* es el número-G de la proposición *A*, *Neg X* es el número-G de la proposición $\sim$ *A*.

Sea $\mathfrak{G}_K$ la proposición que representa en *LF* el enunciado: *g es un entero asociado a una función recursiva general.*

Este enunciado es verdadero. Si se establecen hipótesis convenientes de coherencia, la proposición $\sim \mathfrak{G}_K$ no podrá ser derivable en *LF.*

Pero la proposición $\mathfrak{G}_K$ ya no puede tampoco ser derivable en *LF,* pues en tal caso habría un entero *h* para el cual tendríamos: $F\ h = g$.

Y en tal caso también tendríamos:

$G\ h = 1 +$ (el valor adoptado, para el argumento *h,* por la función recursiva general asociada a $F\ h$).

$= 1 +$ (el valor adoptado, para el argumento *h,* por la función *G*).

$= 1 + G\ h$.

Mediando hipótesis adecuadas de coherencia, la proposición $\mathfrak{G}_K$ es, por tanto, indecidible en *LF.*

243. Exposición de Bernays.

Bernays da una exposición del Teorema de Gödel que se inspira en la misma exposición no-técnica de Gödel [10].

En primer término enuncia ciertas condiciones generales a las que debe someterse un sistema *LF* para que el Teorema de Gödel le sea aplicable. Como su exposición no es rigurosa se contenta con la condición de coherencia simple sin hacer alusión a la ω-coherencia. Después expone el procedimiento de la aritmetización e indica cómo se puede expresar en forma aritmética la propiedad *ser una derivación de una proposición* A.

La demostración del teorema se resume como sigue.

Sea *LF* un sistema que responda a las condiciones previstas.

Sea *Sp* una serie de proposiciones de *LF* cuyo número-G es *s* y sea A una proposición de *LF* cuyo número-G es *a* y que contiene una variable libre Θ.

Consideremos el enunciado metateórico: *La serie de proposiciones Sp es una derivación cuya última proposición es la que se obtiene, partiendo de* A, *reemplazando en* A *la variable* Θ, *allá donde figure, por la expresión de LF que corresponda al entero a.*

A través de la aritmetización, este enunciado puede expresarse bajo la forma de un enunciado aritmético, *Brn s a* [11].

A este enunciado corresponde en *LF* una proposición $\mathfrak{Brn}\ N_s\ N_a$. Si *Brn s a* es falso, la proposición correspondiente es refutable en *LF* [12].

Formemos la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{X}_2$.

---

[10] Bernays 5, 81-88.

[11] *Brn: predicado de* Bernays.

Utilizamos notaciones distintas a las de Bernays, a fin de no introducir innecesariamente nuevas notaciones.

[12] Esta frase aplica el lema de Gödel (véase § 90) al caso del predicado *Brn.*

Sea *b* el número-G de esta proposición. Supongamos que para un cierto entero *m* el enunciado *Brn m b* sea verdadero.

En tal caso la proposición $\mathfrak{Brn}\ N_m\ N_b$ es derivable en *LF*.

La serie de proposiciones cuyo número-G es *m* es, pues, una derivación de la proposición

$$(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ N_b.$$

De esta proposición se puede derivar la proposición

$$\sim \mathfrak{Brn}\ N_m\ N_b.$$

Pero esta conclusión no es compatible con la coherencia de *LF*.

Por consiguiente, la hipótesis no puede ser mantenida. Es preciso que, cualquiera que sea *m*, el enunciado *Brn m b* sea falso y, por tanto, que la proposición $\sim \mathfrak{Brn}\ N_m\ N_b$ sea derivable en *LF*.

Así, pues, tendremos: $(X) \sim Brn\ X\ b$.

A este enunciado corresponde la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ N_b$.

Esta proposición no es derivable en *LF*. En efecto, se obtiene sustituyendo $\mathfrak{X}_2$ por N_b en la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{X}_2$.

Si fuese derivable existiría, por tanto, un cierto entero *p* para el cual el enunciado *Brn p b* sería verdadero. La proposición $\mathfrak{Brn}\ N_p\ N_b$ sería entonces derivable en *LF*. Pero, en virtud de lo que precede, la proposición $\sim \mathfrak{Brn}\ N_p\ N_b$ es ciertamente derivable en *LF*.

Así, pues, si el sistema *LF* es coherente, la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ N_b$ no es derivable en *LF*.

Existe, pues, una proposición de *LF* que corresponde a un enunciado verdadero y que, sin embargo, no es derivable en *LF* [13].

244. Exposición de Wang.

Como se ve, Bernays no utiliza la función *Sbs*, lo que le obliga a emplear un predicado *Brn* más complicado que el predicado *Fdr* de Gödel.

Wang da una exposición del Teorema de Gödel [14] sirviéndose de la función *Sbs*, lo que le permite una mayor aproximación a la demostración original.

He aquí cómo se presenta esta exposición.

Consideremos un sistema *LF* que contiene una formalización de la Teoría de Números y que es coherente. Utilizando el procedimiento de la aritmetización, podemos expresar mediante un predicado aritmético *Fdr* la propiedad *ser una derivación de una proposición* A.

Por otra parte, podemos utilizar la función abreviada de sustitución *Sbs* [15].

---

[13] Bernays no demuestra que la proposición en cuestión no es refutable en *LF*. Para poder demostrar este hecho hay que suponer que el sistema *LF* es *ω-coherente*.

[14] Wang 9, págs. 427-430.

[15] Véase § 92.

Mediante las hipótesis hechas sobre el sistema *LF*, el predicado *Fdr* y la función *Sbs* pueden ser representados en tal sistema por la expresión predicativa $\mathfrak{Fdr}$ y por la expresión funcional $\mathfrak{Sbs}$.

La proposición $\mathfrak{Fdr}\ N_a\ N_b$ es derivable o refutable en *LF* según que el enunciado *Fdr a b* sea verdadero o falso [16].

Formemos la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Fdr}\ \mathfrak{X}_1\ (\mathfrak{Sbs}\ \mathfrak{X}_2\ \mathfrak{X}_2)$.

Denominemos a esta proposición $\mathfrak{Q}$.

(Se trata, en efecto, de la proposición $\mathfrak{Q}$ del § 93, y corresponde a la proposición $(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{X}_2$ de BERNAYS).

Sea q su número-G.

Reemplazando $\mathfrak{X}_2$ por N_q [17] en $\mathfrak{Q}$, obtenemos la proposición:

$$(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Fdr}\ \mathfrak{X}_1\ (\mathfrak{Sbs}\ N_q\ N_q).$$

Denominemos $\mathfrak{J}^*$ a esta proposición.

(Se trata de la proposición $\mathfrak{J}^*$ del § 93.)

Sea i su número-G.

En virtud de la definición de *Sbs*, tenemos (dada la manera en que se ha obtenido la proposición $\mathfrak{J}^*$):

$$Sbs\ q\ q = i.$$

Supongamos entonces que $\mathfrak{J}^*$ sea derivable en *LF*.

Existe, pues, un cierto número entero m para el cual el enunciado *Fdr m i* es verdadero [18].

Entonces tenemos: (EX) *Fdr X i.*

O también: (EX) *Fdr X* (*Sbs q q*).

La proposición correspondiente, es decir

$$(\mathfrak{EX}_1)\ \mathfrak{Tdr}\ \mathfrak{X}_1\ (\mathfrak{Sbs}\ N_q\ N_q),$$

es derivable en *LF*.

Pero esta proposición es $\sim \mathfrak{J}^*$.

Esta conclusión contradice la coherencia de *LF* y nuestra hipótesis no puede ser mantenida.

Por tanto, cualquiera que sea m, tendremos: el enunciado *Fdr m i*, o también *Fdr m* (*Sbs q q*), es falso.

Por tanto, la proposición correspondiente, $\mathfrak{Fdr}\ N_m\ (\mathfrak{Sbs}\ N_q\ N_q)$, es refutable en *LF*.

Así, cualquiera que sea m, la proposición

$$\sim \mathfrak{Fdr}\ N_m\ (\mathfrak{Sbs}\ N_q\ N_q),$$

es derivable en *LF*.

---

[16] Este corresponde al lema de GÖDEL, en el caso del predicado *Fdr*.

[17] Expresión de *LF* correspondiente al entero q.

[18] Esto corresponde, en la demostración de BERNAYS, a la hipótesis. Supongamos que, para un cierto entero m, el enunciado *Brn m b* sea verdadero.

En estas condiciones, si se establece una hipótesis conveniente de coherencia sobre *LF* [19], la proposición $\sim \mathfrak{V}^*$ no podrá ser derivable en *LF*.

Así, mediando esta hipótesis, la proposición $\mathfrak{V}^*$ es indecidible en *LF*.

245. Exposición de Beth.

Beth esboza una demostración que se asemeja en lo esencial a la de Bernays, pero que se presenta de manera ligeramente diferente [20].

Sea un sistema *LF* que contiene una formalización de la Teoría de Números y que sea coherente.

Nosotros suponemos que tal sistema se construye de manera que una proposición derivable en él no puede corresponder a un enunciado aritmético falso.

Utilizando el procedimiento de la aritmetización, podemos definir un predicado *Bth* [21] de la manera siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que el enunciado *Bth a* sea verdadero es que *a* sea el número-G de una proposición A de *LF* tal que

1) A no contenga más que una variable libre Θ.

2) La proposición obtenida reemplazando, en A, la variable Θ por la expresión de *LF* correspondiente a *a*, no sea derivable en *LF* [22].

Supongamos que este predicado sea representable en *LF* por medio de la expresión predicativa $\mathfrak{Bth}$.

Formemos la proposición $\mathfrak{Bth}\ \mathfrak{X}$ [23].

Sea *b* su número-G.

Supongamos que el enunciado *Bth b* sea falso.

Como la proposición $\mathfrak{Bth}\ \mathfrak{X}$ (cuyo número-G es *b*) contiene solamente una variable libre, esto significa, en virtud de la definición de *Bth*, que la proposición $\mathfrak{Bth}\ N_b$ (obtenida reemplazando en $\mathfrak{Bth}\ \mathfrak{X}$, la variable $\mathfrak{X}$ por la expresión N_b de *LF* que corresponde al entero *b*) es ciertamente derivable en *LF*.

El enunciado correspondiente, es decir, *Bth h*, no puede, por tanto, ser falso, contrariamente a lo que hemos supuesto.

Así, la proposición $\mathfrak{Bth}\ N_b$ corresponde a un enunciado verdadero y, sin embargo, no es derivable en *LF*. Su negación nunca será derivable en *LF*, pues corresponde a un enunciado falso [23 bis].

---

[19] Se trata, como puede verse, de la hipótesis de ω-coherencia.

[20] Beth 7, págs. 71-73.

[21] *Predicado de* Beth.

[22] Si se utiliza el predicado *Brn*, tenemos las correspondencias siguientes:

Bth a corresponde a $(X) \sim$ *Brn X a*,

y *Brn s a* corresponde a $\sim$ *Bth a*.

[23] Esta proposición corresponde a la proposición

$$(\mathfrak{X}_1) \sim \mathfrak{Brn}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{X}_2$$

de la demostración de Bernays.

[23 bis] La expresión anterior se inspira en la primera edición de la obra de Beth *Les foun-*

246. EXPOSICIÓN DE FINDLAY.

1. *Construcción de un enunciado indecidible no aritmético.*

FINDLAY ha dado una exposición muy original del Teorema de GÖDEL sin utilizar notación simbólica alguna [24]. La proposición indecidible construida por GÖDEL corresponde a un enunciado aritmético. Pero se puede describir el mecanismo de construcción utilizado por GÖDEL sin recurrir a la Aritmética, por medios puramente lingüísticos (es decir, tomados únicamente del lenguaje usual).

Será útil hacer tres distinciones previas.

a) Hay que distinguir las *expresiones* de una lengua y los *nombres* que sirven para designar estas expresiones [25].

b) Hay que distinguir los *enunciados de hecho* y las *formas enunciativas* [26]. Una *forma enunciativa* es una expresión que contiene variables y que se convierte en un *enunciado de hecho* cuando se reemplazan variables por expresiones de significación constante.

c) Hay que distinguir las *descripciones completas* y las *descripciones incompletas*. Una *descripción incompleta* es una expresión que contiene variables y que se convierte en una *descripción completa* cuando estas variables son reemplazadas por constantes.

Podemos construir de la manera siguiente un enunciado de hecho que es indemostrable [27].

1. Partamos de una expresión que constituya una demostración incompleta de un cierto enunciado de hecho:

---

daments logiques des Mathématiques (BETH, 7). La segunda edición de esta obra (BETH, 14), profundamente modificada, aporta ciertas modificaciones al Teorema de GÖDEL que refuerzan su rigor.

Para el Teorema de GÖDEL propiamente dicho, ver BETH, 14, págs. 71-73.

Para las nociones sintácticas presupuestas en la demostración del Teorema, ver ibíd. páginas 68-71. Para el Corolario de GÖDEL, ver ibíd. págs. 73-74.

[24] FINDLAY 1.

[25] Como FINDLAY utiliza únicamente la lengua usual, no puede distinguir rigurosamente la lengua formalizada a la que pertenece la proposición indecidible de GÖDEL y la sintaxis de esta lengua. FINDLAY reemplaza esta distinción por la que establece entre *expresión* y *nombre de una expresión*.

[26] FINDLAY utiliza las expresiones *statement* y *statement-form*. La distinción que hace aquí corresponde a la que hemos establecido entre *proposición cerrada* y *proposición abierta* (véase TABLA DE NOTACIONES 2.32.6). Como la exposición de FINDLAY se sitúa totalmente al nivel de una lengua no-formalizada, evitaremos hablar de *proposiciones*.

De otra parte, como hemos utilizado el término *enunciado* en un sentido general, llamaremos *enunciado de hecho* al que no tiene variables (lo que FINDLAY llama *declaración*).

[27] Este enunciado corresponde evidentemente a la *proposición indecidible* de GÖDEL.

El enunciado de hecho que se obtiene reemplazando en la forma enunciativa A [28] *la variable que contiene por el nombre de esta forma enunciativa.*

2. Construyamos una cierta forma enunciativa que contenga la descripción siguiente:

Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa A, *la variable que contiene por el nombre de esta forma enunciativa.*

Nosotros utilizaremos, como nombre de estas expresiones, la misma expresión escrita en letras románicas.

3. Construyamos la descripción siguiente:

El enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa. Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa A, la variable que ella contiene por el nombre de esta forma enunciativa, *la variable que ella contiene* [29] *por el nombre de esta forma enunciativa.*

4. Construyamos un enunciado de hecho que contenga la siguiente expresión:

Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa. Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa A, la variable que ella contiene por el nombre de esta forma enunciativa, *la variable que ella contiene por el nombre de esta forma enunciativa.*

Denominaremos a este enunciado de hecho enunciado A. Es este enunciado el que corresponde a la proposición indecidible de GÖDEL.

Si queremos obtener efectivamente el enunciado de hecho que el enunciado A declara indemostrable, nos basta, según las estipulaciones del mismo enunciado A, con reemplazar en la fórmula escrita en el punto 2, la variable A por el nombre de esta forma enunciativa.

Entonces obtenemos el siguiente enunciado de hecho:

Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa. Es imposible demostrar el enunciado de hecho que se obtiene reemplazando, en la forma enunciativa A, la variable que ella contiene por el nombre de esta forma enunciativa, *la variable que ella contiene por el nombre de esta forma enunciativa.*

Volvemos a encontrar, pues, el mismo enunciado de hecho A.

Por consiguiente, este enunciado afirma de sí mismo que es indemostrable.

---

[28] Aunque no se trate, hablando en puridad, de una proposición, utilizaremos la variable sintáctica A (reservada, en principio, a las proposiciones) para no tener que introducir una nueva notación.

[29] Se trata de la variable sintáctica A.

2. *Construcción de un enunciado indecidible de forma aritmética.*

Se puede utilizar este mecanismo de construcción para obtener el enunciado aritmético que corresponde a la proposición indecidible de GÖDEL.

Basta con asociar biunívocamente enteros a las expresiones de la lengua utilizada y hacer corresponder a las propiedades y operaciones sintácticas (relativas a estas expresiones) propiedades y operaciones aritméticas (relativas a los enteros que están asociados a estas expresiones).

En particular, se hará corresponder a la propiedad *demostrable* una cierta propiedad aritmética que denominaremos *Dem,* y se hará corresponder a la operación de sustitución una cierta función aritmética.

Para no vernos obligados a definir explícitamente esta función, utilizaremos la expresión: *Reemplazar, en el número de una forma enunciativa de una variable* [30], *el número de la variable por el número de una cierta constante.*

Una tal expresión significa: aplicar a los números asociados respectivamente a la forma enunciativa en cuestión, a la variable que contienen y a la constante en cuestión, la función que corresponde a la operación de sustitución [31].

Mediante estas correspondencias, nuestro enunciado A se convierte en:

El número que se obtiene reemplazando, en el número de la forma enunciativa. El número que se obtiene reemplazando, en el número de la forma enunciativa A, el número de la variable que ella contiene por el número del nombre de esta forma enunciativa, no tiene la propiedad *Dem, el número de la variable que ella contiene por el número del nombre de esta forma enunciativa, no tiene la propiedad Dem.*

Llamemos *B* a este enunciado.

El enunciado *B* no es demostrable, pues, en caso de serlo, se podría mostrar que su número tiene la propiedad *Dem,* y se llegaría a una contradicción.

Tampoco es refutable, pues si lo fuese se podría demostrar que su número tiene la propiedad *no-Dem.* Pero entonces se desembocaría en una contradicción, puesto que, si *B es refutable,* es que el número asociado a *B* tiene la propiedad *Dem.*

3. *Observaciones.*

Como puede verse, la exposición de FINDLAY pone a la luz el carácter circular de la proposición indecidible de GÖDEL, pero es menos satisfactoria que las exposiciones precedentes, pues no distingue netamente el dominio de los enunciados metateóricos y los de las proposiciones del sistema formal estudiado [32].

En cuanto a las exposiciones precedentes, establecen claramente esta distinción, pero no demuestran que la proposición indecidible de que tratan pertenezca efectivamente al sistema formal considerado. La parte más larga y difícil de la demostración de GÖDEL está precisamente consagrada al esclarecimiento de este hecho.

La única manera de demostrarlo rigurosamente es a través de la utilización de las

[30] Diremos, para simplificar, *número de una expresión* en lugar de *número asociado a una expresión.*

[31] Si quisiésemos proceder con rigor, debiéramos emplear la función *Sub* del § 88.

[32] CHURCH ha formulado ciertas críticas respecto a esta exposición. Véase CHURCH 13.

funciones recursivas y estableciendo, de una parte, el carácter recursivo de las nociones utilizadas y de otra el Lema de GÖDEL.

247. OTRAS EXPOSICIONES Y ALUSIONES DIVERSAS.

Existen otras exposiciones del Teorema de GÖDEL. Señalemos aquí una exposición de BETH más elemental (y menos adecuada) que la que hemos reproducido precedentemente [33]. Señalemos también la exposición de HERMES-SCHOLZ [34] y la de KLEENE [35].

De otra parte, se encuentran alusiones a los resultados de GÖDEL en las numerosas obras y artículos consagrados a cuestiones de lógica formal o a los fundamentos de las matemáticas. Algunos autores citan los Teoremas de GÖDEL dando una cierta idea de su contenido, otros sólo hacen breves alusiones. Se encontrarán alusiones diversas, indicaciones o comentarios relativos a los Resultados de GÖDEL (de valor bastante desigual) entre otros autores, en BETH [36], CARRUCCIO [37], COPI [38], DE CESARE [39], FEYS [40], GEYMONAT [41], GIORGI [42], GOKIÉLI [43], KOLMAN [44], LADRIERE [45], LASLEY [46], MCNAUGHTON [47], MOSTOWSKI [48], PAP [49], PÉTER [50], QUINE [51], ROUGIER [52], SÁNCHEZ-MAZAS [53], SKOLEM [54], THOMPSON [55], TURQUETTE [56], USHENKO [57], VAIDYANATHASWAMI [58], VON WRIGTH [59] y ZICH [60].

---

[33] BETH 2 y 6.
[34] HERMES y SCHOLZ 1.
[35] KLEENE 16.
[36] BETH 5.
[37] CARRUCCIO 1 y 2.
[38] COPI 1.
[39] DE CESARE 1.
[40] FEYS 10.
[41] GEYMONAT 1.
[42] GIORGI 1.
[43] GOKIÉLI 1.
[44] KOLMAN 1.
[45] LADRIERE 1.
[46] LASLEY 1.
[47] MCNAUGHTON 3.
[48] MOSTOWSKI 5.
[49] PAP 1.
[50] PÉTER 7, 9 y 10. Esta última obra es una traducción de PÉTER 7. Sin embargo, aporta ciertas modificaciones a PÉTER 7, en particular en lo que concierne a la interpretación de las relaciones que existen entre el Teorema de GÖDEL y el Teorema de CHURCH.
[51] QUINE 3.
[52] ROUGIER 1.
[53] SÁNCHEZ-MAZAS 1.
[54] SKOLEM 18.
[55] THOMPSON 1.
[56] TURQUETTE 1.
[57] USHENKO 1 y 2.
[58] VAIDYANATHASWAMI 1.
[59] VON RIGHT 1.
[60] ZICH 1.

NOTA III

INDICACIONES COMPLEMENTARIAS SOBRE LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES

Esta Nota comprende algunas indicaciones relativas a ciertos resultados sobre las proposiciones indecidibles y que, no desempeñando un papel esencial para nuestro objeto, no han sido citadas en las exposiciones precedentes. Aquí nos ocupamos de ellas exclusivamente a título documental.

248. TEOREMAS DE CHWISTEK.

CHWISTEK ha establecido la existencia de proposiciones indecidibles en ciertos sistemas por métodos distintos al de GÖDEL [1]. (En particular, no emplea el procedimiento de la aritmetización).

Utiliza tres sistemas: LF_1, LF_2 y LF_3.

Cada sistema LF_2 y LF_3 es un sub-sistema de LF_1 y el sistema LF_3 es además un subsistema de LF_2.

Construye una cierta proposición $\mathfrak{G}_C$ que pertenece a LF_2 y demuestra en LF_1 un teorema cuya significación es la siguiente: si la proposición $\mathfrak{G}_C$ es derivable o refutable en LF_2, entonces hay una contradicción en LF_3, y por consiguiente también en LF_2.

CHWISTEK demuestra también un teorema que corresponde al Corolario de GÖDEL [2].

Este teorema es también un teorema de LF_1.

Su significación es la siguiente: si existe en LF_2 un teorema que afirma la coherencia de LF_3, entonces hay una contradicción en LF_2.

Lo que equivale a decir: si es posible demostrar, en un sistema dado, que uno de sus subsistemas es coherente, este sistema contiene una contradicción.

---

[1] CHWISTEK 2.

[2] Véase § 127.

249. Demostración de Mostowski.

Mostowski ha dado una demostración del Teorema de Gödel que sólo se aplica a una parte del sistema considerado por Gödel y que (por esta razón) es más simple que la demostración de Gödel [3].

Mostowski utiliza en esta demostración los métodos introducidos por Tarski [4].

Ulam hace observar que la exposición de Mostowski sugiere la posibilidad de reemplazar el método de la *aritmetización* por un método de *algebrización* que sería más general [5].

250. Generalización de Chauvin.

Chauvin ha obtenido una generalización del Teorema de Gödel, que se puede describir como sigue [6]:

Sea *LF* un cierto sistema y *F* una función que aplica biunívocamente las expresiones de *LF* sobre el conjunto de los números enteros [7]. Se dice que *LF* es una *lógica gödeliana de F* si los predicados que deben intervenir en la construcción de Gödel son representables en *LF*.

Sea *Cl* una clase de funciones enteras definidas sobre el conjunto de los valores tomados por *F* [8]. Supongamos que el sistema *LF* disfruta de la propiedad siguiente: si un cierto enunciado *P a b* es representable en *LF* y si *G* es una función de *Cl* representable en *LF*, entonces el enunciado *P*(*Ga*) (*Gb*) es igualmente representable en *LF*.

Si el sistema *LF* es, además, una lógica gödeliana respecto a *F*, se puede construir, para cada una de las funciones de la clase *Cl*, una proposición de *LF* que es indecidible en *LF*.

251. Generalización de Kalmár.

Kalmár ha propuesto otro método de generalización que se asemeja bastante al de Chauvin [9].

Sea *Cl* una cierta clase de funciones de enteros.

---

[3] Mostowski 4.

[4] En Tarski 4. Véase también Tarski 6.

[5] Ulam 1.

[6] Chauvin 1 y 2.

[7] Esta función *F* hace corresponder, por tanto, a las expresiones de *LF* sus números-G.

[8] Las funciones que pertenecen a esta clase hacen corresponder, por tanto, enteros a los valores tomados por *F*.

[9] Kalmár 7 y 8.

Y sea *Inf* un predicado biargumental (*desigualdad funcional*) definido como sigue: si F es una función de enteros y α un entero, la condición necesaria y suficiente para que el enunciado *Inf* F α sea verdadero es que la función F no tome nunca el valor α [10].

Sea, por otra parte, *LF* un sistema dotado de la siguiente propiedad: todos los enunciados *Inf* F α, donde F pertenece a la clase *Cl*, son representables en *LF*.

Denominamos a tal sistema *teoría de desigualdades respecto a la clase Cl.*

Una teoría de desigualdades se denomina *incorrecta* si incluye un teorema que represente un enunciado falso de la forma *Inf* F α.

Y una teoría de desigualdades se denomina *incompleta* cuando tiene una proposición que representa un enunciado verdadero de la forma *Inf* F α que no sea un teorema.

Se dice que un sistema *LF* es un *sistema gödeliano* si constituye una teoría de desigualdades respecto a una clase *Cl* que contiene una función *KLM* [11] tal que para un cierto entero *k*, la proposición que representa en *LF* el enunciado *Inf Klm k*, expresa de sí misma que no es un teorema de *LF* [12].

KALMÁR demuestra el Teorema de GÖDEL bajo la forma:

(CVIII) *Todo sistema gödeliano constituye una teoría de desigualdades incorrecta o incompleta.*

Este resultado significa simplemente que todo sistema al que se pueda aplicar el procedimiento descrito en los §§ 125 y 126 y que responda a ciertas condiciones de coherencia [13] contiene proposiciones indecidibles.

252. RESULTADO DE MOSTOWSKI PARA LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

La proposición indecidible construida por GÖDEL corresponde a un enunciado aritmético y concierne, por tanto, a los números enteros. Pero es posible construir en ciertos sistemas proposiciones indecidibles de naturaleza más compleja, que conciernen a los números reales. En esto consiste la demostración de MOSTOWSKI [14].

En cualquier caso, mientras que la Demostración de GÖDEL se aplica a todo sistema que contiene una formalización de la aritmética recursiva, la demostración de MOSTOWSKI sólo puede aplicarse a sistemas mucho más capaces que contengan una formalización de la Teoría de Conjuntos.

Por otra parte, en tanto que la proposición indecidible de GÖDEL se hace derivable si se añaden al sistema considerado axiomas o reglas de derivación apropiados de naturaleza bastante elemental, la proposición indecidible de MOSTOWSKI continúa

[10] Véase § 125.

[11] *Función de* KALMÁR.

[12] Véase § 126.

[13] Estas condiciones deben asegurar que el sistema no constituye una teoría de desigualdades incorrectas.

[14] MOSTOWSKI 8.

siendo indecidible salvo en el caso de que se añada al sistema considerado una hipótesis de carácter no-constructivo sobre la existencia de ciertos ordinales.

Finalmente, a diferencia de la demostración de GÖDEL, la de MOSTOWSKI es no-constructiva.

MOSTOWSKI considera un sistema *LF* que corresponde a la Teoría de Conjuntos de VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL [15].

Construye una proposición que afirma que el sistema *LF* admite un modelo de una especie particular, y demuestra que esta proposición es indecidible en el sistema *LF*.

253. LOS TEOREMAS DE USPÉNSKIJ.

Señalemos, en fin, una versión del Teorema de GÖDEL *debida* a USPÉNSKIJ, que pone en relación la existencia de proposiciones indecidibles en ciertos sistemas y ciertas propiedades de los conjuntos recursivamente enumerables [16].

El estudio de USPÉNSKIJ se conecta a un estudio anterior de KLEENE [17], en el que este autor aporta ciertos desarrollos a su *teoría de predicados* [18].

Poniendo en forma simétrica la demostración de su *teorema de la estratificación* [19], KLEENE se ha visto llevado a descubrir una propiedad relativa a la *separabilidad* de los conjuntos recursivamente enumerables; como consecuencia de ciertas observaciones de MOSTOWSKI, ha demostrado rigurosamente la existencia de esta propiedad.

Se dice que dos conjuntos En_1 y En_2 pueden ser *separados* (o que son *separables*) si existe un conjunto En_3 que contiene el conjunto En_1 como subconjunto y que está separado de En_2 [20].

Si existe un tal conjunto En_3, se dice que los conjuntos En_1 y En_2 están *separados por este conjunto.*

Se dice que dos conjuntos En_1 y En_2 pueden estar *separados por un conjunto perteneciente a una cierta clase Cl* si se puede encontrar en esta clase un conjunto En_3 tal que En_1 y En_2 estén separados por este conjunto.

KLEENE demuestra que dos conjuntos recursivamente enumerables nunca pueden ser separados por un conjunto recursivo general. En efecto, se pueden construir dos conjuntos recursivamente enumerables separados en $En\text{-}Kl_1$ y $En\text{-}Kl_2$ que no puedan estar separados por un conjunto recursivo general.

Esta proposición puede ser demostrada a partir del lema siguiente:

(CIX) *Dados dos conjuntos recursivamente enumerables separados* En_1 *y* En_2

[15] Véase CAPITULO II, nota 17.
[16] USPÉNSKIJ 1.
[17] KLEENE 15.
[18] Véase § 172.
[19] Véase § 174.
[20] Es decir: que ningún elemento es común con En_3.

que contienen respectivamente En-Kl$_1$ *y En-Kl*$_2$ *como subconjuntos, siempre se puede determinar un número k que no pertenezca al conjunto-reunión de En*$_1$ *y de En*$_2$ [21].

USPÉNSKIJ readopta este lema como definición de la *no-separabilidad*, e introduce a continuación la noción de *no-separabilidad efectiva*. Dos conjuntos En_1 y En_2 son *no-separables* (en el sentido de USPÉNSKIJ), si dados dos conjuntos recursivamente enumerables separados En_i y En_j que contengan respectivamente En_1 y En_2 como subconjuntos, existe un número k que no pertenece al conjunto-reunión de En_i y de En_j.

Dos conjuntos En_1 y En_2 son *efectivamente no-separables* si existe una función parcialmente recursiva F tal que, si a_1 y a_2 son los números asociados a dos conjuntos recursivamente enumerables separados En_i y En_j [22] que contienen, respectivamente, a En_1 y En_2 como sub-conjuntos, el entero $F\ a_1\ a_2$ no pertenece al conjunto-reunión de En_i y de En_j.

USPÉNSKIJ introduce, por otra parte, dos nociones relativas a la saturación sintáctica (en sentido fuerte).

Un sistema *LF* es *no-saturable* si es imposible encontrar una extensión [23] coherente y saturada (sintácticamente en el sentido fuerte) de *LF*.

Un sistema *LF* es *efectivamente no-saturable* si existe una función parcialmente recursiva G tal que, si a es el entero asociado a una extensión coherente cualquiera LF_a de *LF* [24], entonces $G\ a$ es el entero asociado a una proposición indecidible de LF_a.

USPÉNSKIJ considera sistemas que responden a las dos condiciones siguientes:

a) Si A es un teorema (del sistema), entonces $\sim\sim$ A es también un teorema.

b) Si $\sim\sim\sim$ A es un teorema, entonces $\sim$ A es también un teorema.

Hay que observar que, para todo sistema que responda a estas dos condiciones, la noción de *no-saturabilidad* coincide con la de *no-resolubilidad esencial* [25].

También demuestra que, para todo sistema *LF* que responda a estas dos mismas condiciones, se dan también las dos condiciones siguientes:

1) (CX) *La condición necesaria y suficiente para que LF sea no-saturable es que los conjuntos* En_a *y* En_b, *formados respectivamente por los números de* GÖDEL *de las proposiciones derivables y por los de las proposiciones refutables de LF, sean no-separables (en el sentido de* USPÉNSKIJ).

2) (CXI) *La condición necesaria y suficiente para que LF sea efectivamente no-saturable es que los conjuntos* En_a *y* En_b (*definidos en el sentido anterior*) *sean efectivamente no-separables.*

---

[21] Es decir: del conjunto formado por los elementos que no pertenecen a En_1 o En_2.

[22] Se supone que se ha definido un procedimiento que permite asociar un entero a todo conjunto recursivamente enumerable.

[23] Véase § 166.

[24] Se supone que se ha definido un procedimiento que permite asociar (biunívocamente) enteros al sistema *LF* y a sus extensiones.

[25] Véase § 166.

254. La proposición indecidible de Kreisel.

1. *El lema y el teorema de* Kreisel.

Kreisel demuestra la existencia de una proposición indecidible dentro de una cierta forma de la teoría de conjuntos, utilizando el método de los modelos [26].

Sea *LFP-A* una lógica aplicada de los predicados de primer orden correspondiente a una cierta forma de la teoría de conjuntos [27]. Este sistema *LFP-A* debe contener el predicado de pertenencia $\in$ (o uno que le corresponda), mediante el cual se pueda expresar que un elemento de un conjunto *En* pertenece a este conjunto.

Por otra parte, debe ser posible formar, en este sistema, expresiones que definan estos conjuntos.

Consideremos, en general, el formalismo de la teoría clásica de números, *LFN*. Este sistema contiene, como el sistema *LFP-A*, la lógica de predicados de primer orden.

Denominaremos *términos* (de *LFP-A* o de *LFN*) a las constantes individuales de *LFP-A* o de *LFN*) y a las expresiones formadas aplicando una constante funcional o una expresión funcional (del *LFP-A* o de *LFN*) a constantes individuales o a variables individuales (del *LFP-A* o de *LFN*).

Aritmetizando el sistema *LFP-A* se puede expresar en forma aritmética el enunciado metateórico: *LFP-A es coherente.*

Este enunciado puede representarse en *LFN* por una cierta proposición $\mathfrak{C}$.

Hilbert y Bernays demuestran que se puede interpretar el sistema *LFP-A* en el sistema obtenido añadiendo la proposición $\mathfrak{C}$, como nuevo axioma, a los axiomas de *LFN* [28].

Más precisamente: demuestran que es posible hacer corresponder a los predicados y a los términos de *LFP-A* predicados y términos de *LFN* de tal suerte que, reemplazando en una proposición derivable de *LFP-A* a los predicados y términos que figuran en ella por los predicados y términos correspondientes de *LFN*, se obtiene una proposición de *LFN* que sea derivable en el sistema obtenido añadiendo la proposición $\mathfrak{C}$ a los axiomas de *LFN*.

Kreisel refuerza este resultado demostrando que la interpretación de *LFP-A* en *LFN* puede ser definida de tal manera que no sólo haga corresponder a los predicados y términos de *LFP-A* predicados y términos de *LFN*, sino que también haga corresponder simultáneamente a toda expresión de *LFP-A* que defina un conjunto y una expresión de *LFN* que represente un entero.

Kreisel se sirve de este resultado como de un lema para establecer la existencia de una proposición indecidible en *LFP-A* [29], pero Wang redescubre el mismo teorema sin utilizar este lema [30].

---

[26] Kreisel 1.
[27] Véase § 208.
[28] Hilbert y Bernays 1. Segundo Tomo, págs. 234-253.
[29] Kreisel 1, Teorema I.
[30] Wang 12, 4.2, pág. 38.

La demostración de KREISEL utiliza el procedimiento de la diagonal, y descansa sobre las dos siguientes hipótesis:

LFP-A es ω-coherente.

LFP-A contiene un modelo de *LFN* (es decir: es posible hacer corresponder a toda proposición de *LFN* una proposición de *LFP-A* de tal manera que a toda proposición derivable de *LFN* corresponda una proposición derivable de *LFP-A*).

WANG utiliza un procedimiento de demostración que hace intervenir el método semántico [31], modificando, en consecuencia, las hipótesis de KREISEL.

Veamos cómo se presenta la versión de WANG del teorema de KREISEL.

2. *El lema de* WANG.

Supongamos que *LFP-A* contiene un modelo de *LFN* y denominémosle *LFP-*A_m: por tanto, *LFP-*A_m forma parte de *LFP-A* que corresponde a *LFN*.

En virtud del teorema de HILBERT y BERNAYS rememorado anteriormente, podemos hacer corresponder respectivamente a los predicados, términos y proposiciones de *LFP-A*, otros predicados, términos y proposiciones de *LFN*; y en virtud de las hipótesis que acabamos de establecer, podemos hacer corresponder respectivamente a estos predicados, términos y proposiciones de *LFN*, predicados, términos y proposiciones de *LFP-*A_m.

Mediante esta doble correspondencia, podemos hacer corresponder, pues, respectivamente, a los predicados, términos y proposiciones de *LFP-A*, otros predicados, términos y proposiciones de *LFP-*A_m. Denominaremos *imagen-HB* de un elemento de *LFP-A* al elemento de *LFP-*A_m que lleva asociado en una tal correspondencia [32].

Como *LFP-*A_m pertenece a *LFP-A*, la *imagen-HB* de un elemento de *LFP-A* es un elemento de *LFP-A*.

Diremos que el sistema *LFP-A* admite un *modelo ω-coherente* si se puede asociar a toda proposición de *LFP-A* uno de los símbolos *Vri* o *Fal*, de suerte que:

a) Todas las proposiciones derivables de *LFP-A* estén asociadas al símbolo *Vri* [33].

b) Para toda proposición A(Θ) de *LFP-*A_m que no contenga sino la única variable libre Θ, la proposición $\sim (\Theta)\, A\, (\Theta)$ sólo puede ir asociada al símbolo *Vri* si al menos una de las proposiciones A(κ) [34] va asociada al símbolo *Fal* [35].

Si un sistema admite un modelo ω-coherente, es ω-coherente. Pero la inversa no es necesariamente cierta.

---

[31] Véase Sección 1-VIII.

[32] Imagen asociada a un elemento en virtud de la correspondencia descrita por HILBERT y BERNAYS. WANG utiliza la expresión: *Bernays model.*

[33] Esta condición asegura que la correspondencia así establecida determina un modelo.

[34] Las proposiciones A (κ) son las que se obtienen reemplazando en A (Θ) la variable Θ por una expresión de *LFP-*A_m, que representa a un entero.

[35] Esta condición asegura que el modelo es ω-coherente.

Si el sistema *LFP-A* admite un modelo ω-coherente *Md*, diremos que una proposición de *LFP-A* es *verdadera* o *falsa respecto a este modelo* según que vaya asociada al símbolo *Vri* o *Fal* en la correspondencia determinada por el modelo *Md*.

Es posible demostrar el lema siguiente [36]:

(CXII) *Si LFP-A admite un modelo ω-coherente Md, y si una proposición* A *de LFP-A y su imagen-*HB *tienen valores de verdad diferentes* [37] *respecto al modelo Md, la proposición* A *es indecidible en LFP-A.*

3. *Forma de* WANG *del teorema de* KREISEL.

Como el sub-sistema *LFP-*A_m es (por hipótesis) un modelo de *LFN*, debe contener expresiones quue correspondan a los enteros. Denominemos a estas expresiones *cifras* y designémoslas por los símbolos N_0, N_1, N_2 ...

Supongamos que *LFP-*A_m contenga una expresión funcional $\mathfrak{Dm}$ que haga corresponder a toda la cifra (de *LFP-*A_m) su imagen-HB. Designemos por $\in_I$ la imagen-HB del predicado de pertenencia $\in$ de *LFP-A*.

Sea entonces *En-Kr* (*conjunto de* KREISEL) el conjunto de las cifras N_i de *LFP-*A_m (y, por tanto de *LFP-A*) tales que se tenga:

$$\sim \mathfrak{Dm}\ N_i \in_I N_i.$$

Se trata, por tanto, del conjunto de las cifras de *LFP-A* tales que sus imágenes-HB no le pertenecen [38].

Sea $\mathfrak{Efr}$ la expresión de *LFP-A* que representa este conjunto *En-Kr*. Se puede definir $\mathfrak{Efr}$ por la condición siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que se dé

$$N_i \in \mathfrak{Efr},$$

es que se dé

$$\sim \mathfrak{Dm}\ N_i \in_I N_i.$$

Designemos por $\mathfrak{Efr}_I$ la imagen-HB de $\mathfrak{Efr}$,

y supongamos que:

$$\mathfrak{Efr}_I = N_k\ [39].$$

---

[36] WANG 12, 2.7, pág. 33.

[37] Es decir, si la proposición A y su imagen-HB no son verdaderas o falsas al mismo tiempo respecto al modelo *Md*.

[38] Las expresiones que hemos denominado *cifras* juegan, en el sistema *LFP-A*, el papel de conjuntos. Por ello se les puede aplicar el predicado $\in$.

El predicado $\in_I$, imagen-HB del predicado $\in$, puede ser interpretado como la relación de desigualdad entre enteros.

Observemos que la imagen-HB de una cifra no coincide, en general, con la cifra.

[39] Como el sistema *LFP-A* debe contener un modelo de *LFN*, debe ciertamente contener un predicado de igualdad.

Formemos entonces la proposición:

$$N_k \in \mathfrak{Efr}.$$

Es esta proposición lo que constituye el objeto del teorema de KREISEL, que podemos formular como sigue [40]:

(CXIII) *Supongamos que el sistema LFP-A admite un modelo ω-coherente Md y que contiene un modelo de FLN en el que se puede definir la expresión funcional* $\mathfrak{Sma}$. *Sea* $\mathfrak{Efr}$ *el término de LFP-A tal que, para todo i, la proposición*

$$(N_i \in \mathfrak{Efr}) \leftrightarrow (\sim \mathfrak{Sma}\, N_i \in_I N_i)$$

sea verdadera respecto al modelo Md.

Y sea N_k *la cifra de LFP-A tal que la proposición*

$$\mathfrak{Efr}_I = N_k$$

sea verdadera respecto al modelo Md.

En tal caso, la proposición

(1) $$N_k \in \mathfrak{Efr}$$

es indecidible en LFP-A.

En efecto, aplicando la definición de $\mathfrak{Efr}$, tenemos la proposición:

(2) $$(N_k \in \mathfrak{Efr}) \leftrightarrow (\sim \mathfrak{Sma}\, N_k \in_I N_k)$$ [41]

que es verdadera respecto al modelo *Md.*

Como $N_k = \mathfrak{Efr}_I$ y $\mathfrak{Sma}\, N_k$ es la imagen-HB de N_k, la proposición $(\mathfrak{Sma}\, N_k \in_I N_k)$ es la imagen-HB de la proposición $(N_k \in \mathfrak{Efr})$.

La proposición 2(254) afirma, pues, que la proposición 1(254) es equivalente a la negación de su imagen-HB.

Si el modelo *Md* está definido de tal manera que los operadores proposicionales están asociados a las operaciones lógicas intuitivas que les corresponden, se puede concluir de lo que precede que la proposición 1(254) y su imagen-HB tienen valores de verdad diferentes respecto al modelo *Md.*

En virtud del lema de WANG, la proposición 1(254) es, por tanto, indecidible.

---

[40] Este enunciado es la forma de WANG del teorema de KREISEL (WANG 12, 4.2, pág. 38). La formulación que damos de ella es algo menos precisa que la de WANG; la descripción detallada de todas las hipótesis hubiese recargado inútilmente la exposición.

KREISEL supone que el sistema *LFP-A* es ω-coeherente, WANG supone que admite un modelo ω-coherente; WANG utiliza, por tanto, una hipótesis más fuerte que KREISEL.

Por otra parte, KREISEL no debe suponer que la proposición $(\mathfrak{Etr}_I = N_k)$ es cierta, pues se asegura, mediante su lema, de que la imagen-HB de $\mathfrak{Etr}$ es una cifra. Como WANG demuestra, el teorema, sin hacer uso del lema de KREISEL, debe añadir una hipótesis suplementaria respecto a la imagen-HB de $\mathfrak{Etr}$. No obstante, esto no modifica en nada la generalidad del teorema.

[41] Basta con aplicar a N_k la condición formulada en el enunciado.

Estos resultados son válidos para toda forma de teoría de conjuntos formalizada en el cuadro de una lógica aplicada de predicados de primer orden que responda a las condiciones del teorema de KREISEL.

255. LAS PROPOSICIONES INDECIDIBLES DE WANG.

1. *Existencia de proposiciones indecidibles que hacen intervenir la noción de* verdad.

WANG demuestra la existencia de proposiciones indecidibles en toda lógica aplicada de predicados de primer orden correspondiente a una forma de la teoría de conjuntos.

El método de que se sirve para establecer estos resultados es el mismo que el que utiliza para demostrar el teorema de KREISEL, y que ha sido expuesto esquemáticamente en el parágrafo precedente.

Sea *LFP-A* una lógica aplicada de predicados de primer orden correspondiente a una cierta forma de la teoría de conjuntos. Supongamos, como en el caso del parágrafo precedente, que *LFP-A* admita un modelo ω-coherente *Md* y que contenga un modelo del sistema *LFN* que denominaremos *LFP-*A_m.

Supongamos que se pueda definir en *LFP-*A_m:

1) Una expresión funcional $\mathfrak{Sbs}$ que represente la función abreviada de sustitución *Sbs* [42];

2) una expresión funcional $\mathfrak{Imo}$ que haga corresponder toda la cifra *LFP-A* a su imagen-HB.

Supongamos, en fin, que sea posible formalizar en *LFP-A* la noción de *verdad* respecto a *LFP-*A_m, es decir, que se pueda definir en *LFP-A* una expresión predicativa $\mathfrak{Vrí}$ dotada de la siguiente propiedad: si A es una proposición cualquiera de *LFP-*A_m y *a* su número-G, la proposición

$$\mathfrak{Vrí}\, N_a \leftrightarrow A \quad [43]$$

es derivable en *LFP-A* [44].

Designemos por $\mathfrak{Vrí}_I$ la imagen-HB de $\mathfrak{Vrí}$.

Formemos en *LFP-*A_m la proposición:

(1) $\qquad \sim \mathfrak{Vrí}\,[\mathfrak{Imo}\,(\mathfrak{Sbs}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{X})]$.

Sea *a* el número-G de esta proposición, y sea N_a la expresión de *LFP-*A_m que representa al entero *a*.

---

[42] Véase § 92.

[43] N_a es la expresión de *LFP-A*, que representa el entero *a*.

[44] En virtud del *teorema de la verdad* (véase § 187) no es posible definir en *LFP-*A_m una expresión predicativa dotada de esta propiedad. Por este motivo, nuestra hipótesis supone que esta expresión puede estar definida en *LFP-A* (y no en *LFP-*A_m).

Reemplazando $\mathfrak{X}$ por N_a en 1(255), obtenemos:

(2) $\sim \mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_a\ N_a)]$.

Sea *b* el número-G de esta proposición 2(255).

En función de las propiedades de la función *Sbs*, tenemos:

$$Sbs\ a\ a = b.$$

Y podemos derivar en *LFP-*A_m:

$$\mathfrak{Sbs}\ N_a\ N_a = N_b.$$

Reemplazando $(\mathfrak{Sbs}\ N_a\ N_a)$ por N_b en 2(255), obtenemos:

(3) $\sim \mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ N_b]$.

Formemos, por otra parte, en *LFP-A*, la proposición

(4) $\mathfrak{Brí}\ N_b$.

Las proposiciones 3(255) y 4(255) son indecidibles.

Podemos enunciar este hecho bajo forma del teorema siguiente[45]:

(CXIV) *Si el sistema LFP-A admite un modelo ω-coherente y contiene un modelo de LFN en el cual se puedan definir las expresiones funcionales* $\mathfrak{Imo}$ *y* $\mathfrak{Sbs}$, *y si es posible formalizar en este sistema la noción de* verdad *respecto al subsistema LFP-*A_m, *entonces las proposiciones*

$$\mathfrak{Brí}\ N_b \quad \text{y} \quad \sim \mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ N_b]$$

son indecidibles en LFP-A.

En virtud de las propiedades de $\mathfrak{Brí}$, como *b* es el número-G de 2(255), es posible, en efecto, derivar en *LFP-A* la equivalencia

$$\mathfrak{Brí}\ N_b \leftrightarrow \sim \mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ (\mathfrak{Sbs}\ N_1\ N_a)].$$

Y de esta equivalencia se puede derivar

(5) $\mathfrak{Brí}\ N_b \leftrightarrow \mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ N_b]$.

La proposición $\mathfrak{Prí}_I\ [\mathfrak{Imo}\ N_b]$ es la imagen-HB de la proposición $\mathfrak{Prí}\ N_b$.

Como la proposición 5(255) es derivable en *LFP-A*, es verdadera respecto al modelo *Md*.

Si el modelo *Md* queda definido de tal manera que los operadores proposicionales vayan asociados a las operaciones intuitivas que les corresponden, se puede concluir que la proposición $\mathfrak{Brí}\ N_b$ y su imagen-HB tienen valores de verdad diferentes respecto al modelo *Md*. En virtud del lema de WANG, la proposición $\mathfrak{Brí}\ N_b$ es, pues, indecidible en *LFP-A*.

Se puede establecer el mismo resultado de manera directa sin utilizar el lema de WANG.

[45] WANG 12, Teorema 1, pág. 37.

La proposición $\sim \mathfrak{Bew}_{\mathrm{I}}\,[\mathfrak{Sub}\,N_b]$ es igualmente indecidible, pues si fuese derivable o refutable, en virtud de la equivalencia 5(255), la proposición $\mathfrak{Bew}\,N_b$ lo sería igualmente, contrariamente a lo que acabamos de demostrar.

La proposición 3(255) puede considerarse como la imagen-HB de una proposición que afirmaría de sí misma que no es verdadera. Corresponde, por tanto, a la paradoja de EPIMÉNIDES.

WANG demuestra que se puede construir, partiendo de la proposición 3(255), una serie indefinida de proposiciones (cada una de las cuales es la imagen-HB de la precedente) que son todas indecidibles en *LFP-A.*

2. *Teorema de* WANG *respecto a la noción de* designación.

WANG demuestra la existencia de una proposición indecidible de otra forma, utilizando la paradoja de RICHARD.

Para establecer este teorema no hace intervenir ya la noción de *verdad,* sino la de *designación* (respecto a *LFP-*A_m), demostrando, a propósito de esta noción, un teorema de limitación análogo al *teorema de la verdad* [46].

Supongamos, como antes, que el sistema *LFP-A* admita un modelo ω-coherente *Md* y que contenga un modelo *LFP-*A_m del sistema *LFN,* y que sea posible definir en *LFP-*A_m las expresiones funcionales de $\mathfrak{Sbs}$ e $\mathfrak{Sub}$.

Supongamos, por otra parte, que sea posible definir en *LFP-A* una expresión funcional $\mathfrak{Sbs}$ que haga corresponder a cada término de *LFP-A* el sucesor de este término. Esta expresión quedará caracterizada como sigue: si t es el número-G de un término τ de *LFP-A,* $\mathfrak{Sqn}\,N_t$ [47] es el número-G del término $\sigma\,\tau$ obtenido aplicando a τ la función sucesor σ [48].

Como *LFP-*A_m debe corresponder a la teoría de números, podemos suponer que existe en *LFP-*A_m una expresión funcional $\mathfrak{Min}$ que corresponda al operador *Min* [49].

Supongamos, en fin, que sea posible formalizar en *LFP-A* la noción de *designación* respecto a *LFP-*A_m, es decir, que sea posible definir en *LFP-A* una expresión funcional $\mathfrak{Dsn}$ dotada de la propiedad siguiente:

Si τ es un término de *LFP-*A_m (que no contenga variables libres) y si t es su número-G, entonces la proposición

$$\mathfrak{Dsn}\,N_t = \tau$$

es derivable en *LFP-A* [50].

WANG demuestra que no es posible formalizar en un sistema la noción de *designación* respecto a este mismo sistema.

---

[46] Véase § 187.

[47] N_t es la expresión de *LFP-A,* que representa el entero t.

[48] Como el sistema *LFP-*A_m debe corresponder a la teoría de números, podemos suponer que contiene una constante funcional correspondiente a la función sucesor. Designaremos por σ esta constante funcional. Como se ve, la expresión $\mathfrak{Sqn}$ hace corresponder a un término dado el término obtenido añadiéndole una unidad.

[49] Véase § 63.

[50] Véase nota 39 de la presente NOTA III.

He aquí el enunciado del teorema que establece esta propiedad [51]:

(CXV) *Es imposible definir en LFP-A_m una expresión funcional* $\mathfrak{Dsn}$ *tal que, para todo término* τ *de LFP-A_m que no contenga variables libres, siendo* t *el número-G de* τ*, la proposición*

$$\mathfrak{Dsn}\, N_t = \tau$$

sea derivable en LFP-A_m.

La demostración de este teorema se basa en la utilización de la paradoja de RICHARD.

3. *Existencia de una proposición indecidible haciendo intervenir la noción de* designación.

Se puede utilizar como sigue la expresión $\mathfrak{Dsn}$ para construir una proposición indecidible.

Sean, respectivamente, $=_I$, $\mathfrak{Dsn}_I$ y $\mathfrak{Sqn}_I$ las imágenes-HB de $=$, $\mathfrak{Dsn}$ y $\mathfrak{Sqn}$.

Formemos en *LFP-A_m* la expresión

(6) $$\mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, (\mathfrak{Sbs}\, \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}))]].$$

Sea c su número-G y N_c el término de *LFP-A_m* que representa el entero c.

Reemplazando $\mathfrak{Y}$ por N_c en 6(255) obtendremos:

(7) $$\mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, (\mathfrak{Sbs}\, N_c\, N_c))]].$$

Sea d el número-G de esta expresión y N_d el término de *LFP-A_m* que representa al entero d.

En virtud de las propiedades de la función *Sbs*, tenemos:

$$Sbs\ c\ c = d.$$

y podemos derivar en *LFP-A_m*

$$\mathfrak{Sbs}\, N_c\, N_c = N_d.$$

Reemplazando $(\mathfrak{Sbs}\, N_c\, N_c)$ por N_d en 7(255), obtendremos:

(8) $$\mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, N_d)]].$$

En virtud de las propiedades de $\mathfrak{Dsn}$, como d es el número-G de 7(255), se puede derivar en *LFP-A* la proposición:

$$\mathfrak{Dsn}\, N_d = \mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, (\mathfrak{Sbs}\, N_c\, N_c))]].$$

Y de esta proposición se puede derivar:

(9) $$\mathfrak{Dsn}\, N_d = \mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, N_d)]]$$

En virtud de las propiedades de la expresión funcional $\mathfrak{Mín}$, existirá un entero m tal que:

$$\mathfrak{Mín}\, \mathfrak{X}\, [\mathfrak{Ima}\, \mathfrak{X} =_I \mathfrak{Dsn}_I\, [\mathfrak{Sqn}_I\, (\mathfrak{Ima}\, N_d)]] = N_m.$$

[51] WANG 12, 5.1, pág. 39.

Este entero puede ser considerado como el menor número cuya imagen-HB es igual a su propio sucesor.

Se puede demostrar que la proposición

$$\mathfrak{Dsn}\ N_d = N_m$$

es verdadera respecto al modelo *Md.*

Y se puede demostrar también que la proposición

$$\mathfrak{Dsn}\ (\mathfrak{Sqn}\ N_d) = \sigma\ N_m$$

es igualmente verdadera respecto a este modelo.

Entonces tenemos el teorema [52]:

(CXVI) *Si el sistema LFP-A admite un modelo ω-coherente Md y contiene un modelo de LFN en el cual se pueda definir las expresiones funcionales* $\mathfrak{Sma}$ *y* $\mathfrak{Sbs}$, *y si es posible definir en LFP-A la expresión funcional* $\mathfrak{Sqn}$ *y formalizar en LFP-A la noción de* designación *respecto al sub-sistema LFP-*A_m, *la proposición*

$$\mathfrak{Dsn}\ (\mathfrak{Sqn}\ N_d) = \sigma\ N_m$$

es indecidible en LFP-A.

256. Observaciones de Helmer y de Finsler.

Podemos preguntarnos si las proposiciones indecidibles poseen una significación.

Helmer se ha planteado esta pregunta y la ha contestado utilizando la distinción entre enunciados (de una lengua no formalizada) y proposiciones (de una lengua formalizada) [53]. Se puede decir que un enunciado sólo tiene sentido si se dispone de un criterio que permita decidir su verdad o su falsedad. No ocurre lo mismo con las proposiciones de un sistema formal. Una proposición, aun en el caso de que sea indecidible, tiene una significación por el hecho de estar construida de acuerdo con *las reglas de formación* del sistema.

La proposición indecidible de Gödel corresponde a un enunciado matemático que concierne a la no derivabilidad de una cierta proposición. Este enunciado posee una significación, aun en el caso de que la proposición a que concierne sea indecidible, pues para que podamos decidir sobre su verdad o falsedad basta con que podamos reconocer si una serie dada de símbolos constituye o no una derivación de la proposición en cuestión. Y las reglas del sistema utilizado están formuladas de tal manera que disponemos efectivamente de un tal criterio de verificación.

Finsler ha reconsiderado desde otro punto de vista la distinción entre sistema formal y lenguaje no formalizado [54]. Este autor opone la noción de *derivación* (en

[52] Wang 12, Teorema 2, pág. 40.
[53] Helmer 2.
[54] Finsler 2.

un sistema formal) a la noción absoluta de ***demostrabilidad***. La noción de *derivación* es relativa a las reglas del sistema a que se refiere, mientras que la noción de *demostrabilidad* se refiere a una significación intuitiva. El sistema debe, evidentemente, estar construido de tal forma que las derivaciones que se puedan efectuar en él sean aceptables desde el punto de vista de la idea absoluta de demostrabilidad (lo que se reduce a exigir que el sistema obedezca a ciertas condiciones de *coherencia*).

257. Proposiciones indecidibles y modelos no-regulares.

Como hemos indicado en el § 235 [55], existe un nexo entre la existencia (en los sistemas que contienen una formalización de la teoría de números enteros) de proposiciones indecidibles y la existencia (para estos mismos sistemas) de modelos no-regulares.

Un reciente estudio de KEMENY [56], consagrado al análisis de ciertos conceptos fundamentales de la semántica, ilustra de manera particularmente clara la naturaleza de este nexo. Al mismo tiempo arroja luz sobre las relaciones que existen entre la noción de saturación sintáctica y la de saturación semántica.

Cuando se formaliza una teoría matemática, nos esforzamos en construir un sistema formal que represente correctamente la estructura de esta teoría. Hay que preocuparse, por tanto, para que los modelos de este sistema tengan exactamente la misma estructura. Tenemos, por consiguiente, un modelo perfectamente determinado o una categoría perfectamente determinada de modelos. Si el sistema admite efectivamente este modelo o estos modelos podemos estar seguros de que admite una formalización de la teoría estudiada. Pero es posible que represente al mismo tiempo otras estructuras que las de esta teoría, o, dicho de otro modo, que admite modelos no-isomorfos a los que se tiene a la vista. Si se pretende obtener un sistema que represente de manera verdaderamente adecuada una estructura matemática dada, se debe suprimir esta indeterminación y construir un sistema que admita únicamente modelos que tengan esta estructura; en tal caso se debe construir, por tanto, un sistema categórico.

Pero el teorema de GÖDEL nos enseña que todo sistema en el cual se puede formalizar la teoría de números enteros es incompleta (en sentido sintáctico). No es posible, pues, formalizar de manera adecuada la teoría de números enteros. Esto significa que los sistemas a los que es aplicable el teorema de GÖDEL admiten otros modelos que los que se tiene a la vista cuando acometemos la formalización de la teoría de números enteros.

Partiendo de esta observación, KEMENY propone distinguir dos categorías de modelos: los que se tiene efectivamente a la vista cuando se contruye el sistema y los demás.

---

[55] Véanse págs. 354-356.

[56] KEMENY 4.

Denominemos *campo de interpretación natural* de un sistema *LF* a un campo de interpretación correspondiente a la estructura que se quiere representar en el sistema *LF*, y *campo de interpretación no-natural* de un sistema *LF* a un campo de interpretación de *LF* que no sea natural.

Correlativamente, denominemos *modelo natural* de un sistema *LF* a un campo de interpretación natural de *LF* tal que toda proposición derivable de *LF* sea válida respecto a este campo, y *modelo no-natural* de un sistema *LF* a un modelo de *LF* que no es natural [57]. Se dice que dos campos de interpretación de un sistema *LF* son *equivalentes* cuando toda proposición de *LF* válida respecto a uno de estos campos, es válida respecto al otro y solamente entonces.

Se dice que dos modelos de un sistema *LF* son *equivalentes* cuando los campos de interpretación que constituyen son equivalentes.

Una constante de un sistema *LF* se denomina *constante lógica* de este sistema cuando se encuentra puesta en correspondencia con el mismo elemento en todos los campos de intepretación naturales de *LF* que tienen el mismo dominio de individuos.

Una constante de un sistema *LF* se denomina *constante extra-lógica* de este sistema cuando no es una constante lógica del mismo.

KEMENY introduce dos restricciones que le permiten dar un sentido más preciso a la noción de campo de interpretación natural y al mismo tiempo introducir ciertas simplificaciones en sus definiciones:

1) Todos los campos de interpretación naturales de un sistema deben tener el mismo dominio de individuos;

2) todo campo de interpretación de un sistema que no difiera de un campo de interpretación natural más que por los elementos con los cuales son puestos en correspondencia las constantes extralógicas del sistema es igualmente un campo de interpretación natural de este sistema.

Es posible demostrar que los campos de interpretación naturales no juegan un

---

[57] La terminología utilizada en la exposición presente difiere algo de la de KEMENY. La hemos adoptado para armonizar el contenido de esta exposición con el de la Sección 4-I y de la 3-IX.

KEMENY designa por la expresión *semi-modelo* la noción que designamos aquí por *campo de interpretación*. El utiliza el término *modelo* en el sentido habitual de *modelo* (véanse §§ 24 y 26), y utiliza el término *interpretación* para designar los modelos de un sistema que responda efectivamente a la intención que se tiene cuando se construye este sistema (*modelos naturales* en la terminología aceptada más arriba). KEMENY introduce directamente las *interpretaciones* como una categoría especial de modelos sin pasar (como se hace arriba) por una definición intermedia que utilizaría la noción de *semi-modelo*.

Los *modelos no-naturales* de KEMENY corresponden aproximadamente a los *modelos no-regulares* en el sentido de HENKIN (véase pág. 312) y en el sentido de ROSSER y de WANG (véanse págs. 314-315). Como KEMENY sigue una vía de aproximación muy diferente de la de HENKIN y de la de ROSSER y WANG, no se puede considerar que estas nociones coincidan exactamente. En todo caso, por lo que concierne a los resultados que son evocados arriba, no hay ningún inconveniente en identificar la noción de *modelo no-natural* y la de *modelo no-regular*.

papel particular sino en la medida en que tienen que ver con un sistema incompleto (en sentido sintáctico).

Nosotros diremos que una proposición de un sistema *LF* es *analíticamente verdadera* si es válida respecto a todo campo de interpetación natural que se pueda proponer para *LF*.

Y diremos que una proposición de un sistema *LF* es *válida en sentido general* si lo es respecto a todo campo de interpretación (cualquiera) que se pueda proponer para *LF* [58].

KEMENY propone una definición de la saturación semántica (absoluta) más restrictiva que la definición ordinaria [59]: un sistema *LF* se dice *saturado* (en el sentido de KEMENY) si toda proposición analíticamente verdadera de *LF* es derivable en *LF*, y recíprocamente [60].

HENKIN ha demostrado que toda proposición de *LFP-ω* válida en sentido general es derivable en *LFP-ω* y recíprocamente [61]. Y él ha demostrado que este teorema se extiende a toda clase de sistemas.

KEMENY demuestra que, para todo sistema *LF* perteneciente a esta clase, las propiedades siguientes son equivalentes entre sí:

1) Todas las proposiciones *LF* son decidibles.

2) Todos los campos de interpretación (y, por tanto, todos los modelos) de *LF* son equivalentes.

3) La noción de *proposición válida en sentido general* coincide con la de *proposición analíticamente cierta.*

4) El sistema *LF* es saturado (en el sentido de KEMENY) [62].

Así, la noción de saturación sintáctica (en sentido fuerte) es idéntica a la de saturación semántica (absoluta), a condición de que se defina la saturación semántica refiriéndose únicamente a los modelos naturales.

---

[58] Como se ve, si se identifican las nociones de *campo de interpretación natural* y *campo de interpretación regular*, la noción de *proposición analíticamente verdadera* se hace idéntica a la de *proposición válida en sentido regular* (véase pág. 308).

La noción de *validez en sentido general* utilizada aquí es la misma que ha sido introducida en el § 214. KEMENY designa a esta noción con el término *universal.*

[59] Véase pág. 70.

[60] La definición de la página 70 utiliza la noción de validez en sentido general. Un sistema *LF* es saturado en el sentido previsto por esta definición si todas las proposiciones de *LF* válidas respecto a *todos* los campos de interpretación de *LF* son derivables en *LF* y recíprocamente. Un sistema *LF* es saturado en el sentido de KEMENY si todas las proposiciones de *LF* válidas respecto a todos los *campos de interpretación naturales* de *LF* son derivables en *LF* y recíprocamente. Ahora bien, una proposición puede ser válida respecto a todos los campos de interpretación naturales, sin serlo respecto a otros campos de interpretación. Puede hacerse, pues, que todas las proposiciones válidas respecto a todos los campos de interpretación sean derivables, sin que por ello todas las proposiciones válidas respecto a todos los campos de interpretación naturales lo sean. En otros términos, un sistema puede ser saturado (en sentido semántico) en el sentido de la definición ordinaria, sin serlo en el sentido de KEMENY.

[61] Teorema XCIV (véase pág. 311).

[62] KEMENY 4, Teorema 36, pág. 25.

Y, por otra parte, la noción de *proposición válida en sentido general* no se distingue realmente de la noción de *proposición analíticamente verdadera* más que en el caso en que todas las proposiciones no son decidibles. En otros términos, sólo en el caso en que el sistema sea no-saturado en sentido sintáctico los modelos no-naturales juegan un papel diferente al de los modelos naturales.

La presencia de proposiciones indecidibles en un sistema, indica que los axiomas y las reglas de este sistema no dan una caracterización adecuada de la estructura matemática que se trata de formalizar. Este hecho debe traducirse, cuando se trata de interpretar el sistema, por la exigencia de modelos que no corresponden a la estructura considerada. Hay proposiciones del sistema que corresponden a enunciados verdaderos en todas las interpretaciones que parecen naturales para el sistema, y que, sin embargo, no son teoremas del sistema. Pero esto sólo se verifica para ciertas interpretaciones; el sistema admite que tienen un cierto carácter anormal (en el sentido de que no corresponden a la estructura que se pretende formalizar) y en las que las proposiciones en cuestión no corresponden ya a enunciados verdaderos.

Así, la anomalía que se comprueba en las propiedades sintácticas del sistema corresponde a otra anomalía que es de naturaleza semántica. Cada una de estas anomalías traduce un mismo hecho fundamental: la imposibilidad de encontrar una representación formal adecuada de la estructura matemática considerada. Ya nos situemos en el punto de vista sintáctico o en el semántico, se constata que existe una inadecuación entre lo intuitivo y lo formal.

Se parte de una cierta aprehensión intuitiva para ir hacia una formalización tan estricta como sea posible. Después, remontándose desde el sistema que se ha edificado hacia sus interpretaciones posibles, se observa que la estructura de este sistema es compatible con interpretaciones distintas de las que se esperaba encontrar. El sistema no constituye un cuadro bastante determinado en relación con lo que se le pretendía hacer expresar. Hay en él como una especie de exceso respecto a la estructura que debía representar. Este margen, esta indeterminación relativa, que se traduce en el plano sintáctico por la presencia de proposiciones indecidibles y en el plano semántico por la de modelos no-regulares.

NOTA IV

LA INDUCCION TRANSFINITA

258. REPASO DE ALGUNAS NOCIONES SOBRE LOS NÚMEROS ORDINALES.

Sea un conjunto *En* ordenado según una relación *R*.

Se puede agregar a este conjunto un elemento característico que denominaremos su *tipo de orden.*

Si este conjunto tiene un primer elemento, se dice que es *bien ordenado,* y su tipo de orden se denomina *número ordinal.*

Es posible definir operaciones con los números ordinales y establecer entre ellos una relación de orden, $\leqq$.

Se distinguen dos especies de números ordinales.

Sea *En* un conjunto bien ordenado de números ordinales.

Si *En* tiene un último elemento, su tipo de orden es *un ordinal de primera especie.*

Es posible representar un ordinal de primera especie mediante la operación: $+ 1$. Si μ es el último elemento de *En,* siendo *En* formado por todos los ordinales $\leqq \mu$, ordenados según su magnitud, se representará el tipo de orden de *En* por la notación $\mu + 1$. (Así, $\omega + 1$) es el tipo de orden del conjunto de ordinales: 1, 2, 3, ..., ω.) El ordinal $(\mu + 1)$ puede denominarse sucesor del ordinal μ.

Si el conjunto *En* no tiene último elemento, su tipo de orden es un *ordinal de segunda especie.* Es posible representar este ordinal mediante la operación de pase al límite. Se puede mostrar, en efecto, que el tipo de orden de un conjunto *En* ordenado de ordinales que no tiene último elemento es el menor ordinal superior a todo número de este conjunto.

Si μ_i es un ordinal cualquiera de *En* y ξ el tipo de orden de *En,* todos los términos de *En,* a partir de un cierto rango, están comprendidos entre μ_i y ξ. El número ξ posee, pues, una propiedad análoga a la del límite de una serie creciente de números reales. Se puede representar el conjunto *En* bajo la forma de una sucesión:

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_\omega, \mu_{\omega+1}, \ldots, \mu_\nu, \ldots,$$

donde ν es un ordinal cualquiera inferior a ξ.

Entonces, el número ordinal ξ podrá representarse mediante la notación:

$$\xi = \lim_{\nu<\xi} \mu_\nu.$$

Por tanto, tendremos: todo número ordinal de segunda especie es el límite de la sucesión de todos los números ordinales que le son inferiores, ordenados según su magnitud.

Todos los números ordinales finitos (0, 1, 2, ...) son números ordinales de primera especie.

Se designa por ω el tipo de orden del conjunto de los ordinales finitos, ordenados según su magnitud; ω es un número ordinal de segunda especie. Los números ordinales $\geqq \omega$ se denominan *números ordinales transfinitos.*

Mediante la teoría de los números ordinales es posible desarrollar una teoría de los números cardinales para los conjuntos infinitos. A todo conjunto puede asociársele un número *cardinal.*

El *número cardinal* de un conjunto *En* (finito o infinito) puede ser considerado como la clase de todos los conjuntos que tienen la misma potencia que el conjunto *En* (es decir, que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca *En*).

A todo número ordinal ν se puede hacer corresponder un número cardinal unívocamente determinado: el del conjunto bien ordenado del que ν es el número ordinal. A los números cardinales asociados a los ordinales transfinitos se les denomina *alephs.*

A todo cardinal finito corresponde un solo ordinal.

Contrariamente, a todo aleph corresponde una infinitud de ordinales. Basándonos en las propiedades de los números ordinales es posible introducir una ordenación entre los alephs.

Basándonos en la correspondencia existente entre números ordinales y cardinales, se puede jerarquizar los números ordinales en *clases.*

La *primera clase de ordinales* contiene todos los ordinales finitos.

La *segunda clase de ordinales* contiene todos los ordinales transfinitos que son los tipos de orden de conjuntos numerables: clase de los ordinales asociados al primer aleph.

En general, la *clase de ordinales de rango* $(\nu + 1)$ contiene todos los ordinales asociados al aleph de rango ν.

259. El principio de inducción transfinita.

El *principio de inducción transfinita* es una generalización de principio de inducción ordinaria a los números ordinales transfinitos, válida solamente la primera para los ordinales finitos.

Se la puede formular como sigue: si una propiedad P es válida para el ordinal o, y si, cuando es válida para todos los ordinales inferiores a un cierto ordinal μ, vale también para μ, vale también para todo ordinal.

Dicho de manera más precisa:

Si una propiedad P vale para el ordinal o,

si, cuando vale para el ordinal μ, vale también para su sucesor $(\mu + 1)$,

y si, cuando vale para todos los ordinales μ_ν de un conjunto ordenado, vale también para el ordinal

$$\xi = \lim_{\nu < \xi} \mu_\nu,$$

vale para todo ordinal.

El principio de la inducción ordinaria corresponde al caso sólo si se consideran las dos primeras condiciones.

El principio de inducción transfinita puede no tomarse en toda su generalidad, pero sólo para una cierta categoría de ordinales: la propiedad P vale entonces solamente para los ordinales de esta categoría.

GENTZEN, en su demostración de no-contradicción para la Aritmética, utiliza un principio de inducción transfinita que se extiende solamente a un segmento de la segunda clase de ordinales transfinitos. Se trata del segmento determinado por el *primer número-ε*, es decir, del conjunto de los ordinales inferiores del *primer número-ε*.

Se denomina *primer número-ε* al primer número ordinal ν que cumple la ecuación $\omega^\nu = \nu$.

Es un número ordinal de segunda especie que es el límite de la sucesión: ν_0, ν_1, ν_2, ..., definida por el esquema recursivo

$$\begin{cases} \nu_0 = 1 \\ \nu_{n+1} = \omega^{\nu_n} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

Sigla utilizada:

JSL : The Journal of Symbolic Logic.

ACKERMANN (WILHELM).

1. *Begründung des "tertium non datur" mittels der hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.* Mathematische Annalen, vol. 93, 1924, pp. 1-36.
2. *Zum hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.* Mathematische Annalen, vol. 99, 1928, pp. 118-133.
3. *Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke.* Mathematische Annalen, volumen 100, 1928, pp. 638-649.
4. *Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* Mathematische Annalen, vol. 112, 1936, pp. 419-432.
5. *Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre.* Mathematische Annalen, vol. 114, 1937, pp. 305-315.
6. *Bemerkungen zu den logisch-matematischen Grundlagenproblemen.* En: F. GONSETH, *Philosophie mathématique,* pp. 76-82.
7. *Zur Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* Mathematische Annalen, volumen 117, 1940, pp. 162-194.
8. *Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne Tertium non Datur.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 33-57.
9. *Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System.)* Mathematische Zeitschrift, vol. 55, 1952, pp. 364-384.
10. *Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II.* Mathematische Zeitschrift, vol. 57, 1953, pp. 155-166.
11. *Solvable cases of the decision problem.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1954, VIII + 114 pp.
12. V.: HILBERT (DAVID) y ACKERMANN (WILHELM), *Grundzüge der theoretischen Logik.*
13. V.: HILBERT (DAVID) y ACKERMANN (WILHELM), *Principles of mathematical logic.*

ACTES *du Congrès International de Philosophie Scientifique.* (Actualités scientifiques et industrielles, nos 388-395). Paris, Hermann et Cie, 1935, 8 volúmenes.

ACTES *du Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949.* II, *Logique.* (Actualités scientifiques et industrielles, n° 1134.) Paris, Hermann et Cie, 1951, 153 pp.

ACTES *du Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949.* III, *Philosophie mathématique, Mécanique.* (Actualités scientifiques et industrielles, número 1137.) Paris, Hermann et Cie, 1951, 146 pp.

ACTES *du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20-26 août 1953.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company; Louvain, Editions E. Nauwelaerts; 1953, 14 vols.

BAR-HILLEL (YEHOSHUA).

1. V.: FRAENKEL (ABRAHAM) y BAR-HILLEL (YEHOSHUA), *Le problème des antinomies et ses développements récents.*

BARZIN (MARCEL).

1. *Sur la portée du théorème de M. Gödel.* Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5eme série, vol. 26, 1940, pp. 230-239.

BEHMANN (HEINRICH).

1. *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.* Mathematische Annalen, vol. 86, 1922, pp. 163-229.
2. *Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 40, 1931, pp. 37-48.

BERNAYS (PAUL).

1. *Die Philosophie der Mathematik und die hilbertsche Beweistheorie.* Blätter für deutsche Philosophie, vol. 4, 1930, pp. 326-367.
2. *Methode des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen.* En: *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932,* tomo 2, p. 342.
3. *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik.* En: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, pp. 196-216.
4. *Sur le platonisme dans les mathématiques.* L'Enseignement Mathématique, 34eme année, 1935, pp. 52-69.
5. *Quelques points essentiels de la métamathématique.* L'Enseignement Mathématique, 34eme année, 1935, pp. 70-95.
6. *Logical calculus.* Notes on lectures at the Institute for Advanced Study 1935-36, prepared with the assistance of F. A. FICKEN. Mimeographed. Princeton, N. J., Institute for Advanced Study, 1936, 125 pp.

7. *Thesen und Bemerkungen zu den philosopischen Fragen un zur Situation der logisch-mathematischen Grundlagenforschung.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques, pp.* 104-110.
8. *A system of axiomatic set theory.*
   Part I. JSL, vol. 2, 1937, pp. 65-77.
   Part II. JSL, vol. 6, 1941, pp. 1-17.
   Part III. JSL, vol. 7, 1942, pp. 65-89.
   Part IV. JSL, vol. 7, 1942, pp. 133-145.
   Part V. JSL, vol. 8, 1943, pp. 89-106.
   Part. VI. JSL, vol. 13, 1948, pp. 65-79.
   Part VII. JSL, vol. 19, 1954, pp. 81-96.
9. *Bemerkungen zur Grundlagenfrage.* En: F. GONSETH, *Philosophie mathématique,* pp. 83-87.
10. *Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration.* En: *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938,* pp. 144-152.
11. *Discussion.* Ibid., pp. 153-161.
12. *Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung.* Theoria, volumen 2, n. 7-8, 1954, pp. 153-154.
13. V.: HILBERT (DAVID) und BERNAYS (PAUL), *Grundlagen der Mathematik.*

BERNAYS (PAUL) y SCHÖNFINKEL (MOSES).

1. *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* Mathematische Annalen, vol. 99, 1928, pp. 342-372.

BERRY (GEORGES D. W.).

1. *Symposium: On the ontological significance of the Löwenheim-Skolem theorem.* En: *Academic Freedom, Logic, and Religion,* (American Philosophical Association, Eastern Division, Volume 2), Philadelphia, University of Pennsylvania Press, 1953, pp. 39-55.

BETH (EVERT W.).

1. *Some remarks on Dr Perelman's essay on logical antinomies.* Mind, n.s., vol. 45, 1936, pp. 487-488.
1 bis. *Une démostration de la non-contradition de la logique des types au point de vue fini.* Nieuw Archief voor Wiskunde, vol. 19, 1936, pp. 59-62.
1 ter. *L'évidence intuitive dans les mathématiques modernes.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques,* pp. 161-165.
2. *Inleiding not de wijsbegeerte der wiskunde.* (Philosophische Bibliotheek.) Antwerpen en Brussel, Standaard Boekhandel; Nijmegen en Utrecht, Dekker en van de Vegt; 1.ª edic., 1940, 270 pp.; 2.ª edic., 1942, 270 pp.

3. *Wijsbegeerte der wiskunde.* Euclides, vol. 17, 1940-41, pp. 141-158.
4. *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano.* (Philosophische Bibliotheek.) Antwerpen en Brussel, Standaard Boekhandel; Nijmegen en Utrecht, Dekker en van de Vegt; 1944, 204 pp.
5. *Hundred years of symbolic logic. A retrospect on the occasion of the Boole De Morgan centenary.* Dialectica, vol. 1, 1947, pp. 333-346.
6. *Wijsbegeerte der wiskunde.* (Philosophische Bibliotheek.) Nueva edición totalmente refundida. Antwerpen, Standaard Boekhandel; Nijmegen, Dekker en van de Vegt; 1948, 387 pp.
7. *Les fondements logiques des mathématiques.* Préface de P. DESTOUCHES-FÉVRIER. (Collection de logique mathématique. Série A.I.). Litografiado. Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1950, 222 pp.
8. *A topological proof of the completeness theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel.* Fourteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, volumen 17, 1952, p. 157.
9. *A topological proof of the completeness theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, vol. 54, 1951, pp. 436-444. También: Indagationes Mathematicae, vol. 13, 1951, pp. 436-444.
10. *Some consequences of the theorem of Löwemheim-Skolem-Gödel-Malcev.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, volumen 56, 1953, pp. 66-71. También: Indagationes Mathematicae, vol. 15, 1953, pp. 66-71.
11. *Sur la description de certains modèles d'un système formel.* En: *Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles,* 20-26 *août 1953,* Volumen V, *Logique, Analyse Philosophique, Philosophie des Mathématiques,* páginas 64-69.
12. *Remarks on natural deduction.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, vol. 58, 1955, pp. 322-325. También: Indagationes Mathematicae, vol. 17, 1955, pp. 322-325.
13. *Die Stellung der Logik im Gebäude der heutigen Wissenschaft,* Studium Generale, 8. Jahrgang, Heft 7, 1955, pp. 425-431.
14. *Les fondement logiques des mathématiques.* Préface de P. DESTOUCHES-FÉVRIER. Segunda edición corregida y aumentada. (Collection de logique mathématique. Série A.I.) Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1955, XV + 241 pp.

BLACK (MAX).

1. *The semantic definition of truth.* Analysis, vol. 8, 1948, pp. 49-63.

BOONE (WILLIAM W.).

1. *An extension of a result of Post.* Thirteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 16, 1951, pp. 237-238.

BOREL (EMILE).

1. *Leçons sur la théorie des fonctions. (Eléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions.)* 3.ª edición. (Colección de monografías sobre la teoría de las funciones, publicada bajo la dirección de M. Emile Borel.) Paris, Gauthier-Villars, 1928, XII + 293 pp.

BORGERS (ALFONS).

1. *Development of the notion of set and of the axioms for sets.* Synthèse, vol. 7, 1948-49, pp. 374-390.

BOULIGAND (GEORGES).

1. *Connaissance mathématique, idées de construction et d'existence.* En: *Actes du Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949,* III, *Philosophie mathématique, Mécanique,* pp. 75-83.

BOURBAKI (N.).

1. *Théorie des ensembles. (Fascicule des résultats.)* (Actualités scientifiques et industrielles, n.° 846.) París, Hermann et C^ie, 1939, VIII + 50 pp.
2. *Foundations of mathematics for the working mathematician.* JSL, vol. 14, 1949, páginas 1-8.

BOUTROUX (PIERRE).

1. *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes.* (Nueva colección científica.) París, Alcan, 1920, 274 pp. (Nueva edición, París, Presses Universitaires de France, 1955.)

BROUWER (L. E. J.).

1. *Intuitionism and formalism.* Bulletin of the American Mathematical Society, volumen 20, 1914, pp. 81-96.
2. *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre.* Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie), volumen 12, n. 5, 1918. *Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen.* Ibid., vol. 12, número 7, 1919.
3. *Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.* Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie), vol. 13, n. 2, 1923.
4. *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik.*
   I. Mathematische Annalen, vol. 93, 1924-25, pp. 244-257.
   II. Mathematische Annalen, vol. 95, 1925-26, pp. 453-472.
   III. Mathematische Annalen, vol. 96, 1926-27, pp. 451-488.
5. *Intuitionistischen Betrachtungen über den Formalismus.* Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-matematische Klasse, 1928, páginas 48-52.

6. *Richtlijnen der intuitionistische wiskunde.* Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the Section of Sciences, vol. 50, 1947, página 307.
7. *Consciousness, philosophy and mathematics.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, páginas 1235-1249.

BRUNSCHVIGG (LÉON).

1. *Les étapes de la philosophie mathématique.* (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) París, Alcan, 1912, XI + 591 pp.
2. *La modalité du jugement.* 2.ª edición. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) París, Alcan, 1934, V + 246 pp.

BURALI-FORTI (C.).

1. *Una questione sui numeri transfiniti.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 11, 1897, pp. 154-164.

CARNAP (RUDOLF).

1. *Die Mathematik als Zweig der Logik.* Blätter für deutsche Philosophie, vol. 4, 1930, pp. 298-310.
2. *Logische Syntax der Sprache.* (Schriften zur wissenchaftlichen Weltauffassung. Band 8). Wien, Julius Springer, 1935, 274 pp.
3. *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik.* Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 42, 1935, pp. 163-190.
4. *The logical syntax of language.* Translation by SMEATON (AMETHE). New-York Harcourt Brace and C°; London, Kegan Paul, Trench, Teubner and C°; 1937, XVI + 352 pp.
5. *Foundations of logic and mathematics.* (International Encyclopedia of Unified Science, vol. I, n. 3.) Chicago, The University of Chicago Press, 1939, VIII + + 71 pp.
6. *Science and analysis of language.* Preprinted for the members of the Fifth International Congress for the Unity of Science, Cambridge, Mass., 1939, as from "The Journal of Unified Science" (Erkenntnis), vol. 9, 6 pp.
7. *Introduction to semantics.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1942, XII + 263 pp.
8. *Formalization of logic.* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1943, XVIII + 159 pp.

CARRUCCIO (ETTORE).

1. *Alcune conseguenze di un risultato del Gödel e la razionalità del reale.* Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, vol. 78, 1947, pp. 88-90.
2. *Considerazioni sulla compatibilità di un sistema di postulati e sulla dimostrabilità delle formule matematiche.* Pontificia Academia Scientiarum, Acta, vol. 10, número 2, 1948, pp. 21-41.

CAVAILLES (JEAN).

1. *Réflexions sur le fondement des mathématiques.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie, VI, Logique et Mathématiques,* pp. 136-139.
2. *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles.*
   I. *La création de Cantor.*
   II. *Dedekind. Les axiomatisations. (Zermelo-Fraenkel, von Neumann.)*
   (Actualités scientifiques et industrielles, núms. 606-607.) París, Hermann et C^ie, 1938, 108 et 40 pp.
3. *Méthode axiomatique et formalisme.*
   I. *Le problème du fondement des mathématiques.*
   II. *Axiomatique et système formel.*
   III. *La non-contradiction de l'arithmétique.*
   (Actualités scientifiques et industrielles, núms. 608, 609 et 610.) París, Hermann et C^ie, 1938, 78, 56 et 70 pp.
4. *La logique et la théorie de la science.* París, Presses Universitaires de France, 1947, VIII + 78 pp.
5. *Transfini et continu.* (Actualités scientifiques et industrielles, n.° 1020.) París, Hermann et C^ie, 1947, 24 pp.
6. *Mathématiques et formalisme.* Revue Internationale de Philosophie, vol. 3, 1949, pp. 158-165.

CAVAILLES (JEAN) y LAUTMAN (ALBERT).

La pensée mathématique. (Con discusión por CARTAN, CHABAUTY, DUBREIL, EHRESMANN, FRÉCHET, HYPPOLITE, PAUL LÉVY, SCHRECKER y por los autores.) Bulletin de la Société Française de Philosophie, vol. 40, n. 1, 1946, pp. 1-39.

CHAUVIN (ANDRÉ).

1. *Structures logiques.* Actas semanales de las sesiones de l'Académie des Sciences (París), vol. 228, 1949, pp. 1085-1087.
2. *Généralisation du théorème de Gödel.* Actas semanales de las sesiones de l'Académie des Sciences (París), vol. 228, 1949, pp. 1179-1180.

CHURCH (ALONZO).

1. *A set of postulates for the foundation of logic.* Annals of Mathematics, second series, vol. 33, 1932, pp. 346-366, et vol. 34, 1933, pp. 839-864.
2. *A proof of freedom from contradiction.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 21, 1935, pp. 275-281.
3. *The Richard paradox.* The American Mathematical Monthly, vol. 71, 1935, pp. 356-361.
4. *Mathematical Logic. Lectures delivered at Princeton University, October 1935-January* 1936. Mimeographed. Princeton, University Mathematics Departement, 1936, III + 113 pp.
5. *A note to the Entscheidungsproblem.* JSL, vol. 1, 1936, pp. 40-41.

6. *Correction to a note on the Entscheidungsproblem.* JSL, vol. 1, 1936, páginas 101-102.
7. *A bibliography of symbolic logic.* JSL, vol. 1, n. 4, 1936, pp. 121-218.
8. *An unsolvable problem of elementary number theory.* American Journal of Mathematics, vol. 58, 1936, pp. 345-363.
9. *Additions and corrections to A bibliography of symbolic logic.* JSL, vol. 3, número 4, 1938, pp. 178-192. (Con tres índices: pp. 193-212.)
10. *The constructive second number class.* Bulletin of the American Mathematical Society, April 1938, pp. 224-232.
11. *The present situation in the foundation of mathematics.* En: F. GONSETH, *Philosophie mathématique,* pp. 67-72.
12. *The calculi of lambda-conversion.* (Annals of Mathematical Studies, n.° 6.) Lithoprinted. Princeton, Princeton University Press, 1941, 77 pp.
13. Informe de J. N. FINDLAY, *Gödelian sentences: a non-numerical approach.* JSL, vol. 7, 1942, pp. 129-130.
14. Informe de EMIL L. POST, *Formal reductions of the general combinatorial decision problem.* JSL, vol. 8, 1943, pp. 50-52.
15. *Introduction to mathematical logic. Part I.* (Notes by C. A. TRUESDELL.) (Annals of Mathematical Studies, n.° 13.) Lithoprinted. Princeton, Princeton University Press, 1944, VI + 118 pp.
16. *Special cases of the decision problem.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 49, 1951, pp. 203-221.
17. *Special cases of the decision problem. A correction.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 50, 1952, pp. 270-272.

CHURCH (ALONZO) y KLEENE (STEPHEN COLE).

1. *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* Fundamenta Mathematicae, volumen 28, 1936, pp. 11-21.

CHURCH (ALONZO) y QUINE (WILLARD VAN ORMAN).

1. *Some theorems on definability and decidability.* Thirteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 16, 1951, pp. 239-240.
2. *Some theorems on definability and decidability.* JSL, vol. 17, 1951, pp. 179-187.

CHURCH (ALONZO) y ROSSER (J. BARKLEY).

1. *Some properties of conversion.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 39, 1936, pp. 472-482.

CHWISTEK (LÉON).

1. *La sémantique rationnelle et ses applications.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques,* pp. 77-81.
2. *A formal proof of Gödel's theorem.* JSL, vol. 4, 1939, pp. 61-68.

3. *Sur les fondements des sciences exactes.* En: F. GONSETH, *Philosophie mathématique,* pp. 88-91.

COPI (COPILOWISH) (IRVING M.).

1. *Modern logic and the synthetic a priori.* The Journal of Philosophy, vol. 46, 1949, pp. 243-245.

CRAIG (WILLIAM) y QUINE (WILLIARD VAN ORMAN).

1. *On reduction to a symmetric relation.* JSL, vol. 17, 1952, p. 188.

CURRY (HASKELL B.).

1. *Grundlagen der kombinatorischen Logik.* American Journal of Mathematics, volumen 52, 1930, pp. 509-536 et pp. 789-834.
2. *Remarks on the definition and nature of mathematics.* (Preprinted for the members of the Fifth International Congress for the Unity of Science, Cambridge, Mass., 1939.) The Journal of Unified Science (Erkenntnis), vol. 9, 1939, páginas 164-169.
3. *A revision of the fundamental rules of combinatorial logic.* JSL, vol. 6, 1941, páginas 41-53.
4. *Some aspects of the problem of mathematical rigor.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 47, 1941, pp. 221-241.
5. *A formalization of recursive arithmetic.* American Journal of Mathematics, volumen 63, 1941, pp. 263-282.
6. *The paradox of Kleene and Rosser.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 50, n. 3, 1941, pp. 454-516.
7. *The combinatorial foundations of mathematical logic.* JSL, vol. 7, 1942, páginas 49-64.
8. *The inconsistency of certain formal logics.* JSL, vol. 7, 1942, pp. 115-117.
9. *A theory of formal deducibility.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, 1949, p. 78.
10. *Languages and formal systems.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948,* pp. 770-772.
11. *A theory of formal deducibility.* (Notre Dame mathematical lectures, n.° 6.) Lithoprinted. Notre Dame, Indiana, University of Notre Dame Press, 1950, IX + 126 pp.
12. *Language, metalanguage and formal system.* The Philosophical Review, vol. 59, 1950, pp. 346-353.
13. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1951, VIII + 75 pp.
14. *La théorie des combinateurs.* Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, serie V, vol. 10, fasc. 3-4, 1951, pp. 347-359.
15. *La logique combinatoire et les antinomies.* Ibid, pp. 360-370.

16. *Leçons de logique algébrique.* (Collection de logique mathématique. Série A. II.) Litografiado. París, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1952, 163 páginas.
17. *Remarks on the definition and nature of mathematics.* Dialectica, vol. 8, 1954, páginas 228-233.

DAVIS (MARTIN).

1. *Arithmetical problems and recursively enumerable predicates.* Twelfth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 15, 1950, pp. 77-78.
2. *Arithmetical problems and recursively enumerable predicates.* JSL, vol. 18, 1953, pp. 33-41.

DE CESARE (ELIAS A.).

1. *La lógica moderna y la crisis de la matemática.* (*Resumen de una conferencia.*) Revista del Centro Estudiantes de Ingeniería (La Plata), vol. 16, n. 65, 1939, páginas 239-243.

DIEUDONNÉ (JEAN).

1. *L'axiomatique dans les mathématiques modernes.* En: *Actes du Congrés International de Philosophie des Sciences, París, 1949,* III, *Philosophie mathématique, Mécanique,* pp. 47-53.

DOPP (JOSEPH).

1. *La notion d'existence dans la logique moderne.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy* (*Amsterdam, August 11-18, 1948*), páginas 735-739.
2. *Leçons de logique formelle. Première partie. Logique ancienne. La logique des jugements prédicatifs.* Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1949, XI + 166 pp.
3. *Leçons de logique formelle. Deuxième partie. Logique moderne I. Le calcul des propositions inanalysées.* Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1950, XI + 216 pp.
4. *Leçons de logique formelle. Troisième partie. Logique moderne II. Logique des propositions à une ou plusieurs mentions d'objets.* Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1950, XVI + 274 pp.
5. *Table des formules. Leçons de logique formelle, II et III, Annexe.* Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1950, 15 pp.

DREBEN (BURTON).

1. *On the completeness of quantification theory.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 38, 1952, pp. 1047-1052.

DUBARLE (D.).

1. *Le dernier écrit philosophique de Jean Carvaillès.* Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 53, 1948, pp. 225-247 et 350-378.
2. *Logique et réflexion.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, pp. 649-652.
3. *Remarque sur la philosophie de la formalisation logico-mathématique.* Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 60, 1955, pp. 352-390.

LES ENTRETIENS DE ZÜRICH *sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938.* Exposiciones y discusiones publicadas por el presidente de los debates, F. GONSETH, profesor en l'Ecole Polytechnique Fédérale. Zürich, S. A. Leemann Frères et C^{ie}, 1941, 209 pp.

FARBER (MARVIN).

1. *Logical systems and the principles of logic.* Philosophy of Science, vol. 9, 1942, páginas 40-54.

FEYS (ROBERT).

1. *Directions nouvelles de la logistique aux Etats-Unis.* Revue Néoscolastique de Philosophie, vol. 40 (2.ª serie, n. 55), 1937, pp. 398-411.
2. *La logique nouvelle des modalités.* Revue Néo-scolastique de Philosophie, volumen 40 (2.ª serie, n. 56), 1937, pp. 517-553, et vol. 41 (2.ª serie, n. 58), 1938, páginas 217-252.
3. *Principes de logistique. Ier volume.* Roneotipado. Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1939, 129 pp.
4. *Fondements et méthodes des mathématiques. Notes sur la réunion d'études de Zürich.* Revue Néo-scolastique de Philosophie, vol. 42 (2.ª serie, n. 61), 1939, páginas 78-88.
5. *Logistick geformarliseerde logica.* I. *Algemeen overzicht. Propositie- en klassenlogica.* (Philosophische Bibliotheek.) Antwerpen, Standaard Boekhandel; Nijmegen, Dekker en van de Vegt; 1944, 340 pp.
6. *La technique de la logique combinatoire.* Revue Philosophique de Louvain, volumen 44 (3.ª serie, n. 1), 1946, pp. 74-103, et vol. 44 (3.ª serie, n. 2), 1946, pp. 237-270.
7. *Les méthodes récentes de déduction naturelle.* Revue Philosophique de Louvain, volumen 44 (3.ª serie, n. 3), 1946, pp. 370-400.
8. *Note complémentaire sur les méthodes de déduction naturelle.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 45 (3.ª serie, n. 5), 1947, pp. 60-72.
9. *Logique formalisée et philosophie.* Synthèse, vol. 6, 1947-48, pp. 283-298.
10. *De ontwikkeling van het logisch denken.* (Philosophische Bibliotheek.) Antwerpen, Standaard Boekhandel; Nijmegen, Dekker en van de Vegt; 1949, 220 pp.
11. *Neo-positivisme en symbolische logica.* Annalen van het Thijmgenoostschap, vol. 37, n. 2, 1949, pp. 150-157.
    Discusión por P. VAN LENT, E. HÜFFER, B. DELFGAUW y por el autor. Ibid., páginas 158-159.

12. *L'abstraction en logique formalisée.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, pp. 731-734.
13. *Logistique.* En: *Philosophie (Chronique des années de guerre 1939-1945)*, XI, *Philosophie des sciences-psychologie.* Publicada por l'Institut International de Philosophie, publicación emprendida bajo los auspicios de la U.N.E.S.C.O. (Actualités scientifiques et industrielles, nº 1089.) Paris, Hermann et C^ie, 1950, páginas 17-40.
14. *Resultaten en mogelijkheden van de geformaliseerde logica.* Tidjschrift voor Philosophie, vol. 12, 1950, pp. 227-245.
15. *Logica en wijsbegeerte van de wiskunde.* Tijdschrift voor Philosophie, vol. 13, 1951, pp. 303-314.
16. *Nature et possibilités de la logique formalisée.* En: *Actes du Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris, 1949*, II, *Logique*, pp. 69-80. También: Theoria, vol. 1, n. 3-4, 1953, pp. 133-136.
17. *La formalisation comme suggestion rigoureuse.* En: *Les méthodes formelles en axiomatique, Paris, décembre 1950.* Paris, Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, nº 36, 1953, pp. 53-58.

FINDLAY (J. N.).

1. *Gödelian sentences: a non-numerical approach.* Mind, n.s., vol. 51, 1942, páginas 259-265.

FINSLER (PAUL).

1. *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit.* Mathematische Zeitschrift, vol. 25, 1926, pp. 676-682.
2. *Gibt es unentscheidbare Sätze?* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 16, 1944, pp. 310-320.

FITCH (FREDERIC BRENTON).

1. *The consistency of the ramified* Principia. JSL, vol. 3, 1938, pp. 140-149.
2. *A basic logic.* JSL, vol. 7, 1942, pp. 105-114.
3. *Representations of calculi.* JSL, vol. 9, 1944, pp. 57-62.
4. *A minimum calculus for logic.* JSL, vol. 9, 1944, pp. 89-94.
5. Informe de M. BARZIN, *Sur la portée du théorème de M. Gödel.* JSL, vol, 12, 1947, p. 25.
6. *An extension of basic logic.* JSL, vol. 13, 1948, pp. 95-106.
7. *The Heine-Borel theorem in extended basic logic.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 9-15.
8. *Towards a demonstrably consistent mathematics.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, 1949, pp. 73-74.
9. *On natural numbers, integers and rationals.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 81-84.
10. *A further consistent extension of basic logic.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 209-218.
11. *A demonstrably consistent mathematics.*
    Part I. JSL, vol. 15, 1950, pp. 17-24.
    Part II. JSL, vol. 16, 1951, pp. 121-124.

12. *A simplification of basic logic.* JSL, vol. 18, 1953, pp. 317-325.
13. *Symbolic logic. An introduction.* New-York, The Ronald Press Company, 1952, X + 238 pp.

FRAENKEL (ABRAHAM).

1. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* Mathematische Zeitschrift, vol. 22, 1925, pp. 250-273.
2. *Einleitung in die Mengenlehre.* (Die Grundlehre der mathematische Wissenschaften in Einzeldarstellugen. Band IX.) Berlin, Julius Springer, 3.ª edición, 1928, XIII + 424 pp.
3. *Zusatz zu vorstehenden Aufsatz Herrn v. Neumanns.* Mathematische Annalen, vol. 99, 1928, pp. 392-393.
4. *Sur la notion d'existence dans les mathématiques.* L'Enseignement Mathématique, vol. 34, 1935, pp. 18-32.
5. *The recent controversies about the foundation of mathematics.* Scripta Mathematica, vol. 13, 1947, pp. 17-36.

FRAENKEL (ABRAHAM) y BAR-HILLEL (YEHOSHUA).

1. *Le problème des antinomies et ses développements récents.* Traducido por A. LAUTMAN. Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 46, 1939, pp. 225-242.

VON FREYTAG (gen. LÖRINGHOFF) (BRUNO).

1. *Gedanken zur Philosophie der Mathematik.* Meinsenheim am Glan, Westkulturverlag, Anton Hai, 1948, 53 pp.

GÉGALKINE (I. I.).

1. *Sur l'Entscheidungsproblem.* (Texto ruso con un resumen en francés.) Colección matemática, vol. 6, 1939, pp. 185-198.
2. *Probléma razréšimosti na konéčnyh klassah.* (*Sur le problème de la résolubilité pour les classes finies*). Moskovskij Gosudarsténnyj Univérsitét, Učényé zapiski, n. 100 (Matématika, vol. 1), 1946, pp. 155-221.
Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 17, 1952, p. 271.

GENTZEN (GERHARD).

1. *Untersuchungen über das logische Schliessen.* Mathematische Zeitschrift, vol, 39, 1934, pp. 176-210 y 405-431.
2. *Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik.* Mathematische Zeitschrift, vol. 41, 1936, pp. 357-366.
3. *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* Mathematische Annalen, vol. 112, 1936, pp. 493-565.
4. *Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik.* Semester-Berichte (Münster i. W.) 9. Semester, Winter 1936-37, pp. 65-80.

5. *Unendlichkeitsbegriff und Widerspruchsfreiheit der Mathematik.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques,* pp. 201-205.
6. *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschug.* Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, neue Folge, Heft 4, 1938, pp. 1-18.
7. *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* Forschungen zur Logic und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, neue Folge, Heft 4, 1938, pp. 19-44.
8. *Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie.* Mathematische Annalen, vol. 119, 1943, páginas 140-161.

GEYMONAT (LUDOVICO).

1. *La crisi della logica formale.* En: *Fondamenti logici della scienza,* Francesco de Silva, Turin, 1947, pp. 111-135.

GIORGI (GIOVANNI).

1. *A proposito di alcune discussioni recenti sui problemi della logica deduttiva.* Bolletino della Unione Matematica Italiana, ser. 3, vol. 3, 1948, pp. 256-259.

GLIVENKO (V.).

1. *Sur la logique de M. Brouwer.* Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5.ª serie, vol. 14, 1928, pp. 223-224.
2. *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.* Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5.ª serie, vol. 15, 1929, pp. 183-188.

GÖDEL (KURT).

1. *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit.* Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger, vol. 67, 1930, pp. 214-215.
2. *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik und Physic, vol. 37, 1930, pp. 349-360.
3. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatshefte für Mathematik und Physic. vol. 38, 1931, páginas 173-198.
4. *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik.* Erkenntnis, vol. 2, 1931-32, páginas 147-148.
5. *Nachtrag.* Erkenntnis, vol. 2, 1931-32, pp. 149-151.
6. *Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 2, para 1929-30, pub. 1932, pp. 27-38.
7. *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3, para 1930-31, pub. 1932, pp. 12-13.

8. *Eine Eigenschaft der Realisierung des Aussagenkalküls.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3, para 1930-31, pub. 1932, pp. 20-21.
9. *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.* Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-nat. Klasse, Anzeiger, vol. 69, 1932, pp. 65-66. Reproducido en: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, para 1931-32, pub. 1933, página 40.
10. *Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, para 1931-32, pub. 1933, pp. 9-10.
11. *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, para 1931-32, pub. 1933, pp. 34-38.
12. *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, para 1931-32, pub. 1933, pp. 39-40.
13. *Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls.* Monatshefte für Mathematik und Physic, vol. 40, 1933, pp. 433-443.
14. *On undecidable propositions of formal mathematical systems.* Mimeographed lecture notes. Princeton, Institute for Advanced Study, 1934, 30 pp.
15. *Über die Länge der Beweise.* Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, vol. 7, 1936, pp. 23-24.
16. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., vol. 24, 1938, pp. 556-557.
17. *Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., vol. 25, 1939, pp. 220-224.
18. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.* (*Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1938-1939*; *notes by* GEORGE W. BROWN.) (Annals of Mathematical Studies, n. 3.) Lithoprinted. Princeton, Princeton University Press, 1940, 66 pp.
19. *What is Cantor's continuum problem?* The American Mathematical Monthly, vol. 54, 1947, pp. 515-525.
20. *Russell's mathematical logic.* En: *The philosophy of Bertrand Russell,* edited by PAUL ARTHUR SCHLIPP (The Library of Living Philosophers, volumen V), Evanston, Illinois, The Library of Living Philosophers Inc., 1946 (primera edición 1944), pp. 123-153.

GOKIÉLI (L. P.).

1. *K problémé aksiomatizacii logiki.* (*On the problem of axiomatizacion of logic.*) Tiflis, Akadémiá Nauk Gruzinskoj, SSR, 1947, 86 pp. Recensión por KLINE (GEORGE L.), JSL, vol. 14, 1949, pp. 243-244.

GONSETH (FERDINAND).

1. *La logique en tant que physique de l'objet quelconque.* En: *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique,* VI, *Philosophie des Mathématiques,* pp. 1-23.

2. *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique.* Paris, Alcan, 1936, XII + 386 pp.
3. *Qu'est-ce que la logique?* (Actualités scientifiques et industrielles, n° 524.) Paris, Hermann et C^ie^, 1937, 87 pp.
4. *Philosophie mathématique.* (Actualités scientifiques et industrielles, n° 837.) Paris, Hermann et C^ie^, 1939, 100 pp.

GRELLING (KURT).

1. *The logical paradoxes.* Mind. n.s., vol. 45, 1936, pp. 481-486.
2. *Der Einfluss der Antinomien auf die Entwicklung der Logik in 20. Jahrhundert.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI. *Logique et Mathématiques,* pp. 8-17.
3. *Gibt es eine gödelsche Antinomie?* Theoria, vol. 3, 1937, pp. 297-306.
4. *Zusätze und Berichtigungen.* Theoria, vol. 4, 1938, pp. 68-69.

GRIZE (JEAN-BLAISE).

1. *Un nouveau calcul de déduction naturelle dû à F. B. Fitch.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 53, 1955, pp. 328-367.

GRZEGORCZYK (ANDRZEJ).

1. *Undecidability of some topological theories.* Fundamenta Mathematicae, vol. 38, para 1951, pub. 1952, pp. 137-152.

GUÉRARD DES LAURIERS (L. B.).

1. *Analyse de l'être mathématique.* Revue des Sciences Philosophiques et Théologiques, vol. 22, 1933, pp. 385-431 et 585-639.
2. *L'activité de jugement en mathématiques.* Revue des Sciences Philosophiques et Théologiques, vol. 24, 1935, pp. 407-433, et vol. 25, 1936, pp. 76-103 et 269-298.
3. *Propositions logistiques vraies. Démonstrabilité. Arithmétisation.* Les Sciences Philosophiques et Théologiques, vol. 2, 1941-1942, pp. 327-345.

HASENJAEGER (GISBERT).

1. *Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 273-276.
2. *Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe.* JSL, vol. 18, 1953, pp. 42-48.
3. *On definability and derivability.* En: *Mathematical interpretations of formal systems* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1955, pp. 15-25.

HELMER (OLAF).

1. *Perelman versus Gödel.* Mind, vol. 46, 1937, pp. 58-60.

2. *The significance of undecidable sentences.* The Journal of Philosophy, vol, 34, 1937, pp. 490-494.

HEMPEL (CARL G.).

1. *Le problème de la vérité.* Theoria, vol. 3, 1937, pp. 206-246.

HENKIN (LEON).

1. *The completeness of formal systems.* Dissertation, Princeton University, 1947.
2. *The completeness of the first-order functional calculus.* JSL, vol. 14, 1949, páginas 159-166.
3. *Some notes on nominalism.* JSL, vol. 18, 1950, pp. 19-21.
4. *Completeness in the theory of types.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 81-91.

HERBRAND (JACQUES).

1. *Recherches sur la théorie de la démonstration.* Thèse de la Faculté de Sciences de l'Université de Paris, 1930, 128 pp.
2. *Les bases de la logique hilbertienne.* Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 37, 1930, pp. 243-255.
3. *Sur le problème fondamental de la logique mathématique.* Actas de las sesiones de la Société des Sciences et des Lettres, de Varsovia, Classe III, vol. 24, 1931, pp. 12-56.
4. *Sur la non-contradiction de l'arithmétique.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 166, 1932, pp. 1-8.

HERMES (H.) y SCHOLZ (HEINRICH).

1. *Mathematische Logik.* En: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, Algebra und Zahlentheorie,* 1. Teil, Heft 1, Teil I. Leipzig, B.G. Teubner, 1952, 82 pp.

HEYTING (AREND).

1. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930, II, Physikalisch-mathematische Klasse, pp. 42-56.
2. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.* Sitzungsberichte der preusischen Akademie der Wissenschaften, 1930, II, Physikalisch-matematische Klasse, pp. 57-71. Et: 1930, X-XII, pp. 158-169.
3. *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.* Erkenntnis, vol. 2, 1931, pp. 106-115.
4. *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie.* (Ergebnisse der Mathematik, III. Band, 4. Heft.) Berlin, Julius Springer, 1934, 73 pp.
5. *De ontwikkeling van de intuitionistische wiskunde.* Euclides, vol. 13, 1936-37, pp. 129-144.
6. *Intuitionistische wiskunde.* Mathematica B, vol. 7, 1938-1939, pp. 129-142.

7. *Les fondements des mathématiques du point de vue intuitionniste.* En: F. GONSETH, *Philosophie mathématique,* pp. 73-75.
8. *Sur la tâche de la philosophie des mathématiques.* En: *Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20-26 août 1953,* Volume V, *Logique, Analyse Philosophique, Philosophie des Mathématiques,* pp. 193-198.

HILBERT (DAVID).

1. *Über den Zahlbegriff.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 8, 1900. Reproducido en: D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7.ª edición, Anhang VI, pp. 241-246.
2. *Mathematische Probleme.* Archiv der Mathematik und Physik, 3ª Reihe, Bd. 1, 1901, pp. 44-63 et pp. 213-237. Reproducido en: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, pp. 290-329.
3. *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.* (Aus den Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904.) En: D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7.ª ed., Anhang VII, pp. 247-261.
4. *Axiomatisches Denken.* Mathematische Annalen, vol. 78, 1918, pp. 405-415. Reproducido en: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, páginas 146-156.
5. *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.* Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der hamburggischen Universität, vol. 1, 1922, páginas 157-177. Reproducido en: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, pp. 157-177.
6. *Die logische Grundlagen der Mathematik.* Mathematische Annalen, vol. 88, 1923, pp. 151-165. Reproducido en: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, pp. 178-191.
7. *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, vol. 95, 1925, pp. 161-190.
8. *Die Grundlagen der Mathematik.* Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der hamburgischen Universität, vol. 6, 1928, pp. 65-85. Reproducido en forma abreviada en D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7.ª ed., Anhang IX, pp. 289-312.
9. *Grundlagen der Geometrie.* Siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage. (Wissenschaft und Hypothese, VII.) Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1930, VII + 326 pp. (Primera edición, 1899.)
10. *Probleme der Grundlegung der Mathematik.* Mathematische Annalen, vol. 102, 1930. Reproducido en: D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7.ª edición, Anhang X, pp. 313-323.
11. *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre.* Mathematische Annalen, vol. 104, 1931, pp. 485-494. Reproducido en: *David Hilberts gesammelte Abhandlungen,* tomo 3, pp. 182-195.
12. *David Hilberts gesammelte Abhandlungen. Dritter Band. Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte.* Berlin, Julius Springer, 1935, VII + 435 pp.

HILBERT (DAVID) y ACKERMANN (WILHELM).

1. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Zweite Auflage. Berlin, Julius Springer, 1938, VIII + 133 pp. (Primera edición, 1928.)

HILBERT (DAVID) y ACKERMANN (WILHELM).

1. *Principles of mathematical logic.* English translation by LEWIS M. HAMMOND, GEORGE G. LECKIE and F. STEINHARDT. Edited and with notes by ROBERT E. LUCE, New-York, Chelsea Publishing Company, 1950, XII + 172 pp.

HILBERT (DAVID) y BERNAYS (PAUL).

1. *Grundlagen der Mathematik.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XL.) Berlin, Julius Springer. Erster Band, 1934, XII + 471 pp.
   Zweiter Band, 1939, XII + 498 pp.

HÜFFER (E. J. E.).

1. *Mathematische existentie.* Bijdragen van de philosophische en theologische Faculteiten der Nederlandsche Jezuïeten, 1940, Derde Deel, Aflevering 1, páginas 1-18.

HUSSERL (EDMUND).

1. *Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft.* (Sonderdruck aus: Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Band V, herausgegeben von E. HUSSERL, Freiburg i. Br.) Halle (Saale), Max Niemeyer Verlag, 1929, XI + 298 pp.
2. *Erfahrung und Urteil. Untersuchungen zur Genealogie der Logik.* Ausgearbeitet und herausgegeben von LUDWIG LANDGREBE. Prag, Academia-Verlag, 1939, XXIV + 478 pp.

JANICZAK (ANTONI).

1. *A remark concerning decidability of complete theories.* JSL, vol. 15, 1950, páginas 277-279.

JOHANSSON (INGEBRIGT).

1. *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus.* Compositio Mathematica, vol. 4, 1936, pp. 119-136.

KALMÁR (LÁSZLÓ).

1. *Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem.* Acta Litt. ac Scient. Reg. Univers. Hung. Franc. Joseph, Sectio Scient. Math., vol. 5, 1930-1932, pp. 222-236.
2. *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* En: *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich,* 1932, pp. 337-338.

3. *Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten.* Mathematische Annalen, vol. 108, 1933, pp. 468-484.
4. *On the reduction of the decision problem. First paper. Ackermann prefix, a single binary predicate.* JSL, vol. 4, 1939, pp. 1-9.
5. *Egyszerü példa eldönthetetlen aritmetikai problémàra.* (*Ein einfaches Beispiel für ein unentscheidbares arithmetisches Problem.*) (Texto húngaro con un resumen en alemán.) Matematikai és fizikai lapok, vol. 50, 1943, pp. 1-23. Recensión por PÉTER (RÓSZA), JSL, vol. 9, 1944, p. 24.
6. *On unsolvable mathematical problems.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy* (*Amsterdam, August* 11-18, 1948), pp. 756-758.
7. *Une forme du théorème de Gödel sous des hypothéses minimales.* Actas semanales de las sesiones des Sciences de l'Académie des Sciences (Paris), vol. 229, 1949, pp. 963-965.
8. *Quelques formes générales du théorème de* GÖDEL. Ibid., pp. 1047-1049.
9. *Contributions to the reduction theory of the decision problem. First paper. Prefix* (x_1) (x_2) (Ex_3) ... (Ex_{n-1}) (x_n) *a single binary predicate.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol, 1, n. 1, 1950, pp. 64-73.
10. *Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen.* Methodos, vol. 2, 1950, pp. 220-226.
11. *A simple construction of undecidable propositions in formal systems.* Traducción del texto precedente por ERNST V. GLASERSFELD. Ibid., pp. 227-231.
12. *Contributions to the reduction theory of the decision problem. Third paper. Prefix* (x_1) (Ex_2) ... (Ex_{n-2}) (x_{n-1}) (x_n), *a single binary predicate.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 2, 1951, pp. 19-38.
13. *Contributions to the reduction theory of the decision problem. Fourth paper. Reduction to the case of a finite set of individuals.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 2, 1951, pp. 125-142.

KALMÁR (LÁSZLÓ) y SURÁNYI (JÁNOS).

1. *On the reduction of the decision problem. Second paper. Gödel prefix, a single binary predicate.* JSL, vol. 12, 1947, pp. 65-73.
2. *On the reduction of the decision problem. Third paper. Pepis prefix, a single binary predicate.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 161-173.

KATTSOFF (LOUIS D.).

1. *A philosophy of mathematics.* The Iowa State College Press, 1948, VI + 266 pp.

KEMENY (JOHN G.).

1. *Models of logical systems.* JSL, vol. 13, 1948, pp. 16-30.
2. *Type theory versus set theory.* Twelfth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 15, 1950, p. 78.

3. *A note on pseudomodels.* Fourteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 17, 1952, pp. 158-159.
4. *A new approach to semantics. Part I.* JSL, vol. 21, 1956, pp. 1-27.

KLEENE (STEPHEN COLE).

1. *Proof by cases in formal logic.* Annals of Mathematics, second series, vol. 35, n. 3, 1934, pp. 529-544.
2. *A theory of positive integers in formal logic.* American Journal of Mathematics. *Part I,* vol. 57, 1935, pp. 153-173. *Part II,* ibid. pp. 219-244.
3. *λ-definability and recursiveness.* Duke Mathematical Journal, vol. 2, 1936, páginas 340-353.
4. *A note on recursive functions.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 42, 1936, pp. 544-546.
5. *General recursive functions of natural numbers.* Mathematische Annalen, vol. 112, 1936, pp. 727-742.
6. Recensión sobre CH. PERELMAN, *L'antinomie de M. Gödel.* JSL, vol. 2, 1937, pp. 40-41.
7. Recensión sobre O. HELMER, *Perelman versus Gödel.* JSL, vol. 2, 1937, páginas 48-49.
8. *On notation for ordinal numbers.* JSL, vol. 3, 1938, pp. 150-155.
9. *On the term "analytic" in logical syntax.* (Preprinted for the members of the Fifth International Congress for the Unity of Science, Cambridge, Mass., 1939.) The Journal of Unified Science (Erkenntnis), vol. 9, 1939, pp. 189-192.
10. *Recursive predicates and quantifiers.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 53, 1943, pp. 41-73.
11. *On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals.* American Journal of Mathematics, vol. 66, 1944, pp. 41-58.
12. *On the interpretations of intuitionistic number theory.* JSL, vol. 10, 1945, páginas 109-124.
13. *On the intuitionistic logic.* En: *Library of the Xth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948), Vol. I, Proceedings of the Congress,* Preprint 1948, pp. 185-187.
14. *On the intuitionistic logic.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948),* pp. 741-743.
15. *A symmetric form of Gödel's theorem.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the Section of Sciences, vol. 53, 1950, páginas 800-802. También: Indagationes Mathematicae, vol. 12, 1950, pp. 244-246.
16. *Introduction to metamathematics.* (Bibliotheca Mathematica. A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Vol. I.) Amsterdam, North Holland Publishing C°; Groningen, P. Noordhoff N. V.; 1952, X + 550 pp. Also published by D. van Nostrand Company Inc., New-York, as a volume in the Univesity Series in Higher Mathematics.

17. *Recursive fonctions and intuitionistic mathematics.* En: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, U. S. A., August 30-September 6, 1950,* Providence, American Mathematical Society, vol. 1, 1952, pp. 679-685.
18. *Arithmetical predicates and function quantifiers.* Fifteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 18, 1953, p. 190.
19. V.: CHURCH (ALONZO) and KLEENE (STEPHEN COLE), *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.*

KLEENE (STEPHEN COLE) y ROSSER (J. BARKLEY).

1. *The inconsistency of certain formal logics.* Annals of Mathematics, vol. 36, 1935, pp. 630-636.

KOLMAN (ARNŎST).

1. *Kritický výklad symbolické metody moderní logiky.* (*Exposé critique de la méthode symbolique de la logique moderne.*) Prague, Orbis, 1948, 299 pp. Recensión por ZICH (O. V.), JSL, vol. 14, 1949, pp. 56-57.

KOLMOGOROFF (A. N.).

1. *Zur Deutung der intuitionistischen Logik.* Mathematische Zeitschrift, vol. 35, 1932, pp. 58-65.

KOYRÉ (A.).

1. *Epiménide le menteur.* (*Ensemble et catégorie.*) (Actualités scientifiques et industrielles, n° 1021.) Paris, Hermann et C^{ie}, 1947, 42 pp.

KREISEL (G.).

1. *Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus.* [Primera parte.] Fundamenta Mathematicae, vol. 37, para 1950, pub. 1951, páginas 265-285.
2. *On the interpretation of non-finitist proofs.* JSL, vol. 16, 1951, pp. 241-267, et vol. 17, 1952, pp. 43-58. V. *Erratum,* ibid., vol. 17, p. IV.
3. *Some concepts concerning formal systems of number theory.* Mathematische Zeitschrift, vol. 57, 1952, pp. 1-12.
4. *The diagonal method in formalized arithmetic.* The British Journal for the Philosophy of Science, vol. 3, 1952-53, pp. 364-374.
5. *On a problem of Henkin's.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, vol. 56, 1953, pp. 405-406. También: Indagationes Mathematicae, vol. 15, 1953, pp. 405-406.
6. *Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus II.* [2.ª parte.] En: *Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20-26 août 1953,* Volumen XIV, *Volume complémentaire et communications du colloque de logique,* pp. 39-49.

7. *Models, translations and interpretations.* En: *Mathematical interpretations of formal systems* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1955, pp. 26-50.

KUCZYŃSKI (JERZY).

1. *O twierdzeniu Gödla.* (*Über den Satz von Gödel.*) (Texto polaco con un resumen en francés.) Kwartalnik filozoficzny, vol. 14, 1938, pp. 74-80. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 3, 1938, p. 118.

KUSTAANHEIMO (PAUL).

1. *Über die Vollständigkeit der Axiomensysteme mit einem endlichen Individuenbereich.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A, I. Mathematica-Physica 63. Helsinki, 1949, 44 pp.

LADRIÈRE (JEAN).

1. *Le rôle du théorème de Gödel dans le développement de la théorie de la démonstration.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 47, 1949, pp. 469-492.
2. *Rationnel et irrationel en mathématiques.* Revue Philosophique de Louvain, volumen 48, 1950, pp. 37-62.
3. *Le théorème fondamental de Gentzen.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 49, 1951, pp. 357-384.

LASLEY (J. W., Jr).

1. *The revolt against Aristotle.* American Scientist, vol. 30, 1942, pp. 275-287.

LAUTMAN (ALBERT).

1. *De la réalité inhérente aux théories mathématiques.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques,* pp. 140-143.
2. *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques.* I. *Les schémas de structure.* II. *Les schémas de genèse.* (Actualités scientifiques et industrielles, números 590 y 591). Paris, Hermann et C^ie^, 1938, 159 pp.
3. V.: CAVAILLÈS (JEAN) et LAUTMAN (ALBERT), *La pensée mathématique.*

LOCHER (L.).

1. *Die Finsler'schen Arbeiten zur Grundlegung der Mathematik.* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 10, 1937-38, pp. 206-207.

LORENZEN (PAUL).

1. *Grundlagen der Mathematik.* En: *Fiat review of german science 1939-1946, Pure mathematics Part I,* Senior author WILHELM Süss, published by office of Military Government for Germany, Field Information Agencies Technical,

printed under the supervision of Dieterich'sche Verlagbuchhandlung, Wiesbaden 1948, pp. 11-22.
2. *Konstruktive Begründung der Mathematik.* Mathematische Zeitschrift, vol. 53, 1950, pp. 162-202.
3. *Algebraische und logistiche Untersuchungen über freie Verbände.* JSL, vol. 16, 1951, pp. 81-106.
4. *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis.* Mathematische Zeitschrift, volumen 54, 1951, pp. 1-24.
5. *Die ontologische und die operative Auffassung der Logik.* En: *Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20-26 août 1953,* Volumen V, *Logique, Analyse Philosophique, Philosophie des Mathématiques, 1953,* páginas 12-18.

LOŚ (JERZY).

1. *The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems.* (Texto inglés con resúmenes en polaco y en ruso.) Studia Logica, vol. 2, 1955, páginas 151-212. V. *Errata,* ibid., p. 329.

LÖWENHEIM (LEOPOLD).

1. *Über Möglichkeiten im Relativkalkül.* Mathematische Annalen, vol. 76, 1915, páginas 447-470.

MANNOURY (G.).

1. *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.* Assen, Van Gorcum en Comp., N. V., X + 288 pp.

MARKOV (A. A.).

1. *Névozmožnosť nékotoryh algoritmov v téorii associativnyh sistém.* (*Impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 77, 1951, pp. 19-20. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 16, 1951, p. 215.
2. *Téoriá algorifmov.* (*La théorie des algorithmes.*) Trudy Matématičéskogo Instituta iméni V. A. Stéklova, vol. 38, 1951, pp. 176-189. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 18, 1953, pp. 340-341.
3. *Névozmožnosť algorifmov raspoznavaniá nékotoryh svojstv associativnyh sistém.* (*Impossibility of algorithms for recognizing some properties of associative systems.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 77, 1951, pp. 953-956. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 17, 1952, pp. 151-152.
4. *Ob odnoj nérazréšimoj problémé, kasaúščéjsá matric.* (*On an unsolvable problem concerning matrices.*) Ibid., vol. 78, 1951, pp. 1089-1092. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 17, 1952, p. 152.

5. *O nérazrěšimyh algorifmičéskih problémah.* (*Sur les problèmes algorithmiques insolubles.*) Matématičéskij sbornik, n.s., vol. 31, 1952, pp. 34-42. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), vol. 18, 1953, p. 341.

MARSHALL (HALL, Jr.).

1. *The word problem for semigroups with two generators.* JSL, vol. 14, 1949, páginas 115-118.

MCKINSEY (J. C. C.).

1. *A new definition of truth.* Synthese, vol. 7, 1948-49, pp. 428-433.

MCNAUGHTON (ROBERT).

1. *Some formal relative consistency proofs.* JSL, vol. 18, 1953, pp. 136-144.
2. *A consistency proof via a partial non-standard truth definition.* Sixteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 19, 1954, página 157.
3. *The unknowable in mathematics.* Sixteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 19, 1954, pp. 156-157.
4. V.: WANG (HAO) and MCNAUGHTON (ROBERT), *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles.*

MENGER (KARL).

1. *Der Intuitionismus.* Blätter für deutsche Philosophie, vol. 4, 1930, pp. 311-325.

MOSTOWSKI (ANDRZEJ).

1. Recensión sobre J. KUCZYŃSKI, *O twierdzeniu Gödla.* JSL, vol. 3, 1938, p. 118.
2. *Bemerkungen zum Begriff der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit.* JSL, vol. 4, 1939, pp. 113-114.
3. *On definable sets of positive integers.* Fundamenta Mathematicae, vol. 34, 1946, páginas 81-112.
4. *O zdaniach microzstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki.* (*On undecidable propositions in formalized systems in mathematics.*) Kwartalnik filozoficzny, vol. 16, 1946, pp. 223-277. Recensión por ULAM (S.), JSL, vol. 12, 1947, p. 60.
5. *Logika matematyczna. Kurs uniwersytecki.* (*Logique mathématique. Cours donné à l'Université.*) (Monografie matematyczne, t. 18.) Varsovie et Wroclaw, 1948, VIII + 388 pp. Recensión por ZICH (O. V.), JSL, vol. 14, 1949, pp. 189-190.
6. *On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates.* Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, vol. 21, 1948, pp. 114-119.
7. *Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus.* JSL, vol. 13, 1948, pp. 204-207.
8. *An undecidable arithmetical statement.* Fundamenta Mathematicae, vol. 36, 1949, pp. 143-164.

9. *Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1952, VIII + 117 pp.
10. *On models of axiomatic systems.* Fundamenta Mathematicae, vol. 39, pour 1952, pub. 1953, pp. 133-158.
11. V.: TARSKI (ALFRED), 17, *Undecidable theories.*

MOSTOWSKI (ANDRZEJ) y TARSKI (ALFRED).

1. *Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, 1949, página 76.

MYHILL (JOHN R.).

1. *Note on an idea of Fitch.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 175-176.
2. *A reduction in the number of primitive ideas of arithmetic.* JSL, vol. 15, 1950, página 130.
3. *A complete theory of natural, rational and real numbers.* JSL, vol. 15, 1950, páginas 185-196.

3 bis. *A system which can define its own truth.* Fundamenta Mathematicae, vol. 37, para 1950, pub. 1951, pp. 190-192.

4. *Report on some investigations concerning the consistency of the axiom reducibility.* JSL, vol. 16, 1951, pp. 35-42.
5. *Towards a consistent set-theory.* JSL, vol. 16, 1951, pp. 130-136.
6. *A finitary metalanguage for extended basic logic.* JSL, vol. 17, 1952, páginas 164-178.
7. *Criteria of constructibility for real numbers.* JSL, vol. 18, 1953, pp. 7-10.
8. *Arithmetic with creative definitions by induction.* JSL, vol. 18, 1953, páginas 115-118.
9. *A stumbling block in constructive mathematics.* Fifteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 18, 1953, pp. 190-191.
10. *On the logical paradoxes.* Fifteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 18, 1953, p. 191.
11. *Symposium*: *On the ontological significance of the Löwenheim-Skolem theorem.* En: *Academic Freedom, Logic, and Religion.* (American Philosophical Association, Eastern Division, Volumen 2), Philadelphia, University of Pennsylvania Press, 1953, pp. 39-55.

NELSON (DAVID).

1. *Recursive functions and intuitionistic number theory.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 61, 1947, pp. 307-368.
2. *Constructive falsity.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 16-26.

NEUMANN (J. VON).

1. *Zur hilbertschen Beweistheorie.* Mathematische Zeitschrift, vol. 26, 1927, páginas 1-46.
2. *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre.* Mathematische Annalen, vol. 99, 1928, pp. 373-391.
3. *Die Axiomatisierung der Mengenlehre.* Mathematische Zeitschrift, vol. 27, 1928, pp. 669-752.

NOVAK (I. L.).

1. *A construction of models for consistent systems.* Fundamenta Mathematicae, volumen 37, 1950, pp. 87-110.

NOVIVOK (P. S.).

1. *Ob algoritmičéskoj nérazréšimosti problémy toždéstva.* (*On algorithmic unsolvability of the word problem.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 85, 1952, páginas 709-712. Recensión por BOONE (WILLIAM W.), JSL, vol. 19, 1954, páginas 58-60.

PAP (ARTHUR).

1. *The philosophical analysis of natural language.* Methodos, vol. 1, 1949, pp. 344-369.
2. *Note on the "semantic" and the "absolute" concept of truth.* Philosophical Studies, vol. 3, 1952, pp. 1-8.

PEPIS (JÓZEF).

1. *Ein Verfahren der mathematischen Logik.* JSL, vol. 3, 1938, pp. 61-76.
2. *Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* Fundamenta Mathematicae, vol. 30, 1938, pp. 257-348.

PERELMAN (CH.).

1. *Les paradoxes de la logique.* Mind, vol. 45, n. 1, 1936, pp. 204-208.
2. *L'antinomie de M. Gödel.* Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5.ª serie, vol. 22, 1936, pp. 730-736.
3. *Réponse à MM. Grelling et Beth.* Mind, n.s., vol. 46, 1937, pp. 278-279.
4. *Une solution des paradoxes de la logique et ses conséquences pour la solution du problème de l'infini.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie,* VI, *Logique et Mathématiques,* pp. 206-210.
5. *L'équivalence, la définition et la solution du paradoxe de Russell.* L'Enseignement Mathématique, vol. 36, 1937-38, pp. 350-356.

PÉTER (RÓZSA).

1. *Rekursive Funktionen.* En: *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932,* pp. 336-337.

2. *Über den Zusammenbang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen.* Mathematische Annalen, vol. 110, 1934, pp. 612-632.
3. *A rekursiv függvények elméletéhez.* (*Zur Theorie der rekursiven Funktionen.*) (Texto húngaro con un resumen en alemán.) Matematikai és fizikai lapok, volumen 42, 1935, pp. 25-49.
4. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen.* Mathematische Annalen, vol. 111, 1935, pp. 42-60.
5. *Über die mehrfache Rekursion.* Mathematische Annalen, vol. 113, 1936, páginas 489-527.
6. *Az axiomatikus módszer korlátai.* (*The bounds of the axiomatic method.*) (Texto húngaro con un resumen en alemán.) Matematikai és fizikai lapok, vol. 48, 1941, pp. 120-143. Recensión por KALMÁR (LÁSZLÓ), JSL, vol. 6, 1941, página 111.
7. *Játék a végtelennel. Matematika kivülállóknak.* (*Playing with the infinite. Mathematics por outsiders.*) Budapest, Dante, 1944, 328 pp. Recensión por KEMENY (JOHN G.), JSL, vol. 13, 1948, pp. 141-142.
8. *Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 248-272.
9. *Rekursive Funktionen.* Budapest, Akademischer Verlag, 1951, 206 pp.
10. *Das Spiel mit dem Unendlichen. Mathematik für Aussenstehende.* Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1955, VIII + 278 pp.

PIL' ČAK (B. U.).

1. *O problémé razrésimosti dlá isčisléniá zadač.* (*On the decision problem for the calculus of problems.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 75, 1950, pp. 773-776. Recensión por RASIOWA (HELENA), JSL, vol. 16, 1951, pp. 226-27.

POIRIER (RENÉ).

1. *Le nombre.* Paris, Alcan, 1938, 184 pp.

POST (EMIL L.).

1. *Introduction to a general theory of elementary propositions.* American Journal of Mathematics, vol. 43, 1921, pp. 163-185.
2. *Finite combinatory processes. Formulation* 1. JSL, vol. 1, 1936, pp. 103-105.
3. *Formal reductions of the general combinatorial decision problem.* American Journal of Mathematics, vol. 65, 1943, pp. 197-215.
4. *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 50, 1944, pp. 284-316.
5. *Recursive unsolvability of a problem of Thue.* JSL, vol. 11, 1946, pp. 65-70.
6. *A variant of a recursively unsolvable problem.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 52, 1946, pp. 264-268.
7. *Note on a conjecture of Skolem.* JSL, vol. 12, 1947, p. 28.
8. *The word problem for semigroups with two generators.* JSL, vol. 14, 1949, páginas 115-118.

9. *Note on a relation recursion calculus.* Thirteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 16, 1951, p. 238.

PROCEEDINGS *of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948).* Edited by E. W. BETH, H. J. POS, J. H. A. HOLLAK. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1949, 2 vol. 1259 pp.

QUINE (WILLARD VAN ORMAN).

1. *Set theoretic foundations for logic.* JSL, vol. 1, 1936, pp. 45-57.
2. *New foundations for mathematical logic.* American Mathematical Monthly, volumen 44, 1937, pp. 70-80.
3. *O sentido da nova lógica. (The meaning of the new logic.)* (Biblioteca de ciências sociais.) São Paulo, Livraria Martius Editora, 1944, 252 pp. Recensión por BERRY (GEORGE D. W.), JSL, vol. 12, 1947, pp. 16-17.
4. *On the logic of quantification.* JSL, vol. 10, 1945, pp. 1-12.
5. *On decidability and completeness.* Synthèse, vol. 7, 1948-49, n. 6-7, pp. 441-446.
6. *Methods of logic.* New-York, Henry Holt & Company, 1950, XX + 264 pp.
7. *Mathematical logic.* Revised edition. Cambridge, Mass. Harvard University Press, 1951, XII + 346 pp.
8. *On ω-inconsistency and a so-called axiom of infinity.* JSL, vol. 18, 1953, páginas 119-124.
9. V.: CHURCH (ALONZO) and QUINE (WILLARD VAN ORMAN), *Some theorems on definability and decidability,* Abstract.
10. V.: CHURCH (ALONZO) and QUINE (WILLARD VAN ORMAN), *Some theorems on definability and decidability.*
11. V.: CRAIG (WILLIAM) and QUINE (WILLARD VAN ORMAN), *On reduction to a symmetric relation.*

RASIOWA (HELENA) y SIKORSKI (R.).

1. *A proof of the completeness theorem of Gödel.* Fundamenta Mathematicae, volumen 37, para 1950, pub. 1951, pp. 193-200.
2. *A proof of the Skolem-Löwenheim theorem.* Fundamenta Mathematicae, vol. 38, para 1951, pub. 1952, pp. 230-232.

REICHBACH (JULIUSZ).

1. *O pelności węzszego rachunku funkcyjnego.* Studia Logica, vol. 2, 1955, páginas 213-228.
   Completeness of the functional calculus of first order. (Resumido en lengua inglesa.) Ibid., pp. 245-250. V. *Errata,* ibid., p. 329.

REICHENBACH (HANS).

1. *Elements of symbolic logic.* New-York, The Macmillan Company, 1947, XIII + 444 pp.

RENOIRTE (FERNAND).

1. *Elément de critique des sciences et de cosmologie.* Louvain, Editions de l'Institut Supérieur de Philosophie, 1945, 235 pp.

REYMOND (ARNOLD).

1. *Les principes de la logique et la critique contemporaine.* (Bibliothèque de la Revue des Cours et Conférences.) París, Boivin, 1932, XI + 277 pp.

RICE (H. G.).

1. *Classes of recursively enumerable sets and their decision problems.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 74, 1953, pp. 358-366.

RICHARD (JULES).

1. *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles.* Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées, vol. 16, 1905, pp. 541-543. También: Acta Mathematica, vol. 30, 1906, pp. 295-296.
2. *Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome de Zermelo.* L'Enseignement Mathématique, vol. 9, 1907, pp. 94-98.

RIEGER (LADISLAV).

1. *On countable generalised σ-algebras, with a new proof of Gödel's completeness theorem.* Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 1 (76), n. 1, 1951, pp. 29-40.

ROBINSON (ABRAHAM).

1. *On the metamathematics of algebra.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam, Nort-Holland Publishing Company, 1951, IX + 195 páginas.

ROBINSON (JULIA).

1. *Undecidability in the arithmetic of integers and rationals and in the theory of fields.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, 1949, p. 77.
2. *Definability and decision problems in arithmetic.* JSL, vol. 14, 1949, páginas 98-114.
3. *General recursive functions.* Proceedings of the American Mathematical Society, volumen 1, n. 6, para 1950, pub. 1951, pp. 703-718.

ROBINSON (RAPHAEL M.).

1. *The theory of classes. A modification of von Neumann's system.* JSL, vol. 2, 1937, pp. 29-36.
2. *Primitive recursive functions.* Bulletin of the American Mathematical Society, volumen 53, 1947, pp. 925-942.
3. *Recursion and double recursion.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948, pp. 987-993.

4. *Arithmetical definability of field elements.* JSL, vol. 16, 1951, pp. 125-126.
5. *Undecidable rings.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 70, 1951, pp. 137-159.
6. *Arithmetical definitions in the ring of integers.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 2, 1951, pp. 279-284.
7. V.: TARSKI (ALFRED), 17, *Undecidable theories.*

ROSENBLOOM (PAUL C.).

1. *The elements of mathematical logic.* New-York, Dover Publications, Inc., 1951, 6 + IV + 214 pp.

ROSSER (J. BARKLEY).

1. *A formal logic without variables.* Annals of Mathematics, 2 s., vol. 36, 1935, páginas 127-150. Y: Duke Mathematical Journal, vol. 1, 1935, pp. 328-355.
2. *Constructibility as a criterion for existence.* JSL, vol. 1, 1936, pp. 36-39.
3. *Extensions of some theorems of Gödel and Church.* JSL, vol. 1, 1936, pp. 87-91.
4. *Gödel theorems for non-constructive logics.* JSL, vol. 2, 1937, pp. 129-137.
5. *An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem.* JSL, vol. 4, 1939, pp. 53-60.
6. V.: CHURCH (ALONZO) and ROSSER (J. BARKLEY), *Some properties of conversion.*
7. V.: KLEENE (STEPHEN COLE) y ROSSER (J. BARKLEY), *The inconsistency of certain formal logics.*

ROSSER (J. BARKLEY) y TURQUETTE (ATWELL R.).

1. *The Gödel completeness of m-valued functional calculi of first orden.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, 1949, página 74.
2. *A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi.* JSL, volumen 14, 1949, pp. 219-225.

ROSSER (J. BARKLEY) y WANG (HAO).

1. *Non-standard models for formal logics.* JSL, vol. 15, 1950, pp. 113-129.

ROUGIER (L.).

1. *Enoncés indéterminés, indécidables, contradictoires, vides de sens.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, pp. 610-617.

RUSSELL (BERTRAND).

1. *Introduction à la philosophie mathématique.* Traduit de l'anglais par G. MOREAU. (Bibliothèque scientifique.) Paris, Payot, 1928, 244 pp.

2. *The principles of mathematics.* Second edition. London, George Allen and Unwin; New-York, W. W. Norton and Company; first published 1903, second edition 1937, reprinted 1942 and 1948, XXXIX + 534 pp.

RUSSELL (BERTRAND) y WHITEHEAD (ALFRED NORTH).

1. *Principa Mathematica.* Second. edition. Cambridge, At the University Press.
Vol. I, first edition 1910, second edition 1925, reprinted 1935, 1950, XLVI + + 674 pp.
Vol. II, first edition 1912, second edition 1927, reprinted 1950, XXXI + 742 páginas.
Vol. III, first edition 1913, second edition 1927, reprinted 1950, VIII + 491 páginas.

SAARNIO (UGO).

1. *Der Begriff der Hierarchie und die logischen Paradoxien.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, pp. 785-790.

SÁNCHEZ-MAZAS (MIGUEL).

1. *Los juicios de la matemática y el modo de existencia de sus objetos.* Theoria, volumen 1, n. 2, 1952, pp. 60-70.

SCHOLZ (HEINRICH).

1. *Die Axiomatik der Alten.* Blätter für deutsche Philosophie, vol. 4, 1930, páginas 259-278.
2. *Geschichte der Logik.* (Geschichte der Philosophie in Längschnitten, Heft 4.) Berlin, 1931, VII + 78 pp.
3. *Was will die formalisierte Grundlagensforschung?* Deutsche Mathematik, vol. 7, n. 2-3, 1943, pp. 206-248.
4. V.: HERMES (H.) y SCHOLZ (HEINRICH), *Mathematische Logik.*

SCHÖNFINKEL (MOSES).

1: V.: BERNAYS (PAUL) und SCHÖNFINKEL (MOSES), *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.*

SCHRÖTER (KARL).

1. *Was ist eine mathematische Theorie?* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 53, 1943, pp. 69-82.

SCHÜTTE (KURT).

1. *Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* Mathematische Annalen, vol. 109, 1934, pp. 572-603.
2. *Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln.* Mathematische Annalen, vol. 110, 1934, pp. 161-194.

3. *Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis.* Mathematische Annalen, vol. 124, 1951-1952, pp. 123-147.

SERRUS (CHARLES).

1. *Traité de logique.* Paris, Aubier, Editions Montaigne, 1945, 381 pp.

SHEPHERDSON (J. C.).

1. *Inner models for set theory.*
   Part I. JSL, vol. 16, 1951, pp. 161-190.
   Part II. JSL, vol. 17, 1952, pp. 225-237.
   Part III. JSL, vol. 18, 1953, pp. 145-167.

SIERPIŃSKI (WACLAW).

1. *Leçons sur les nombres transfinis.* (Colección de monografías sobre la teoría de las funciones, publicada bajo la dirección de M. Emile Borel.) Paris, Gauthier-Villars, 1928, VI + 240 pp.

SIKORSKI (R.).

1. V.: RASIOWA (HELENA) y SIKORSKI (R.), *A proof of the completeness theorem of Gödel.*
2. V.: RASIOWA (HELENA) y SIKORSKI (R.), *A proof of the Skolem-Löwenheim theorem.*

SKOLEM (THORALF).

1. *Logische-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiana, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1920, n. 4, 1920, 36 pp.
2. *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich.* Videnskapsselskapets Skrifter 1923, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse, n. 6, pp. 1-38.
3. *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* En: *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf den fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors von 4. bis 7. Juli* 1923, Helsingfors, 1923, páginas 217-232.
4. *Über die mathematische Logik.* Norsk Matematisk Tidsskrift, vol. 10, 1928, páginas 125-142.
5. *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik.* Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1929, número 4, 1929, 49 pp.
6. *Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreibe mittels eines endlichen Axiomensystems.* Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Series II, n. 10, 1933, pp. 73-82

7. *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.* Fundamenta Mathematicae, vol. 23, 1934, pp. 150-161.
8. *Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf "arithmetische".* Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. 8, 1937, pp. 73-88.
9. *Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme.* Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger, vol. 13, 1940, pp. 1-4.
10. *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem.* En: *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938,* pp. 25-47.
11. *Discussion.* Ibid., pp. 47-52.
12. *Remarks on recursive functions and relations.* Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger, vol. 17, 1944, pp. 89-92.
13. *Some remarks on recursive arithmetic.* Ibid., pp. 103-106.
14. *A note on recursive arithmetic.* Ibid., pp. 107-109.
15. *Some remarks on the comparison between recursive functions.* Ibid., pp. 126-129.
16. *Den rekursive aritmetikk.* (*L'arithmétique récursive.*) Norsk Matematisk Tidsskrift, vol. 28, 1946, pp. 1-12. Recensión por KETONEN (OIVA), JSL, vol. 13, 1948, pp. 169-170.
17. *The development of recursive arithmetic.* En: *Den 10. Skandinaviske Matematiker Kongres i Køhenhavn, 26-30 August 1946,* Copenhague, Jul. Gjellerups Forlag, 1947, pp. 1-16.
18. *Some considerations concerning recursive functions.* Mathematica Scandinavica, volumen 1, 1953, pp. 213-221.
19. *Peano's axioms and models of arithmetic.* En: *Mathematical interpretations of formal systems* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1955, pp. 1-14.

SPECKER (ERNST).

1. *Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis.* JSL, vol. 14, 1949, pp. 145-158.

SURÁNYI (JÁNOS).

1. *A logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájának redukciójáról.* (Texto húngaro con un resumen en alemán: *Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls.*) Matematikai és fizikai lapok, vol. 50, 1943, páginas 51-74.
2. *Reductions of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948),* pp. 759-762.

3. *Contributions to the reduction theory of the decision problem. Second paper. Three universal, one existential quantifiers.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 1, 1950, pp. 261-271.
4. *Contributions to the reduction theory of the decision problem. Fifth paper. Ackermann prefix with three universal quantifiers.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. 2, 1951, pp. 325-335.
5. V.: KALMÁR (LÁSZLÓ) and SURÁNYI (JÁNOS), *On the reduction of the decision problem, Second paper, Gödel prefix, a single binary predicate.*
6. V.: KALMÁR (LÁSZLO) and SURÁNYI (JÁNOS), *On the reduction of the decision problem, Third paper, Pepis prefix, a single binary predicate.*

SZMIELEW (W.).

1. *Decision problem in group theory.* En: *Library of the Xth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, Vol. I, *Proceedings of the Congress*, Preprint 1948, pp. 373-376.
2. *Decision problem in group theory.* En: *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosphy (Amsterdam, August 11-18, 1948)*, pp. 763-766.

TARSKI (ALFRED).

1. *Sur les ensembles définissables de nombres réels.* Fundamenta Mathematicae, volumen 17, 1930, pp. 210-239.
2. *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I.* Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 37, 1930, pp. 361-404.
3. *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchfreiheit und der ω-Vollständigkeit.* Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 40, 1933, páginas 97-112.
4. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.* Leopoli, Studia Philosophica, vol. 1, 1935, pp. 261-405.
5. *Sur la méthode déductive.* En: *Travaux du IXème Congrès International de Philosophie*, VI, *Logique et Mathématiques*, pp. 95-103.
6. *On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth.* JSL, vol. 4, 1939, pp. 105-112.
7. *New investigations on the completeness of deductive theories.* Fifth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 4, 1939, p. 176.
8. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences.* Enlarged and revised edition, translated by OLAF HELMER. New-York, Oxford University Press, 1941, XVIII + 239 pp.
9. *The semantic conception of truth and the foundations of semantics.* Philosophy and Phenomenological Research, vol. 4, 1944, pp. 341-376.
10. *A decision method for elementary algebra and geometry.* U. S. Air Force Project Rand, R-109. Prepared for publication by J. C. C. MCKINSEY. Lithoprinted. The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1948, III + 60 pp.
11. *A problem concerning the notion of definability.* JSL, vol. 13, 1948, páginas 106-111.

12. *On essential undecidability.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol 14, 1949, pp. 75-76.
13. *Undecidability of group theory.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstrac. JSL, vol. 14, 1949, pp. 76-77.
14. *Undecidability of the theories of lattices and projective geometries.* Eleventh meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 14, pp. 77-78.
15. *The semantic conception of truth.* En: *Readings in philosophical analysis,* selected and edited by HERBERT FEIGL and WILFRID SELLARS, New-York, Appleton-Century Crofts, Inc., 1949, pp. 52-84.
16. *A decision method for elementary algebra and geometry.* Prepared for publication with the assistance of J. C. C. MCKINSEY. Second edition, revised. Lithoprinted. Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, III + 63 pp.
17. *Undecidable theories.* In collaboration with ANDRZEJ MOSTOWSKI and RAPHAEL M. ROBINSON. (Studies in Logic and the Foundation of Mathematics.) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1953, IX-98 pp.
18. V.: MOSTOWSKI (ANDRZEJ) and TARSKI (ALFRED), *Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings.*

THOMSON (MANLEY H., Jr.).

1. *The logical paradoxes and Peirce's semiotic.* The Journal of Philosophy, vol. 46, 1949, pp. 513-536.

THOMSON (J. F.).

1. *A note on truth.* Analysis, vol. 9, n. 5, 1949, pp. 67-72.
Corrections. Ibid., vol. 10, n. 1, 1949, pp. 23-24.

TRAHTÉNBROT (B. A.).

1. *Névozmožnost'algorifma dlá problémy razréšimosti na konéčnyh klassah.* (*Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 70, 1950, pp. 569-572. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 15, 1950, p. 229.

TRAVAUX *du IXème Congrès International de Philosophie.* VI, *Logique et Mathématiques.* (Actualités scientifiques et industrielles, nº 535.) Paris, Hermann et Compagnie, 1937, 226 pp.

TURING (A. M.).

1. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 42, 1936-1937, páginas 230-265.
2. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, a correction.* Proceedings of the London Mathematical Society, second series, vol. 43, 1937, pp. 544-546.

3. *Computability and λ-definability.* JSL, vol. 2, 1937, pp. 153-163.
4. *Systems of logic based on ordinals.* Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 45, 1939, pp. 161-228.
5. *The word problem in semi-groups with cancellation.* Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 52, 1950, pp. 491-505.
6. *Solvable and unsolvable problems.* En: *Science News* (Penguin Books, n° 31). Melbourne, London, Baltimore, Penguin Books, 1954, pp. 7-23.

TURQUETTE (ATWELL R.).

1. *Gödel and the synthetic a priori.* The Journal of Philosophy, vol. 47, 1950, pp. 125-129.
2. V.: ROSSER (J. BARKLEY) and TURQUETTE (ATWELL R.). *The Gödel completeness of m-valued functional calculi of first order.*
3. V.: ROSSER (J. BARKLEY) and TURQUETTE (ATWELL R.), *A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi.*

ULAM (S.)

1. Compte rendu de MOSTOWSKI (ANDRZEJ), *O zdaniach nicrozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki.* JSL, vol. 12, 1947, p. 60.

USHENKO (ANDREW PAUL).

1. *The problems of logic.* London, George Allen and Unwin; Princeton, Princeton University Press; 1941, 225 pp.
2. *Undecidable statements and metalanguage.* Mind, n.s., vol. 53, 1944, páginas 258-262.

USPÉNSKIJ (V. A.).

1. *Téoréma Gëdélá i téoriá algoritmov.* (*Theorem of Gödel and theory of algorithms.*) Doklady Akadémii Nauk SSSR, vol. 91, 1953, pp. 737-740. Recensión por MOSTOWSKI (ANDRZEJ), JSL, vol. 19, 1954, pp. 218-219.

VAIDYANATHASWAMI (R.).

1. *Inaugural address.* The Mathematical Student, vol. 6, 1938, pp. 33-42.

WAISMANN (FRIEDRICH).

1. *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik.* Introducción de KARL MENGER. Segunda edición. Viena, Gerold & Co., 1947, VII + 168 pp.

WANG (HAO).

1. *On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 35, 1949, pp. 150-155.
2. *A theory of constructive types.* Methodos, vol. 1, 1949, pp. 374-384.

3. *Possibilities of proving relative consistency.* Twelfth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 15, 1950, p. 77.
4. *Remark on the comparison of axiom systems.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 36, 1950, pp. 448-453.
5. *Arithmetic models for formal systems.* Methodos, vol, 3, 1951, pp. 217-232.
6. *Arithmetic translations of axiom systems.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 71, 1951, pp. 283-293.
7. *Truth definitions and consistency proofs.* Transactions of the American Matematical Society, vol. 73, 1952, pp. 243-275.
8. *Predicative foundations of mathematics.* Fifteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 18, 1953, pp. 191-192.
9. *Quelques notions d'axiomatique.* Revue Philosophique de Louvain, vol. 51, 1953, pp. 409-443.
10. *The formalization of mathematics.* Sixteenth meeting of the Association for Symbolic Logic. Abstract. JSL, vol. 19, 1954, pp. 159-160.
11. *The formalization of mathematics.* JSL, vol. 19, 1954, pp. 241-266.
12. *Undecidable sentences generated by semantic paradoxes.* JSL, vol. 20, 1955, pp. 31-43.
13. *On denumerable bases of formal systems.* En: *Mathematical interpretations of formal systems* (Sudies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1955, pp. 57-84.
14. V.: ROSSER (J. BARKLEY) and WANG (HAO), *Non standard models for formal logics.*

WANG (HAO) y MCNAUGHTON (ROBERT).

1. *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles.* (Collection de logique mathématique. Série A. IV.) Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1953, 54 pp.

WATSON (A. G. D.).

1. *Mathematics and its foundations.* Mind, n.s., vol. 47, 1938, pp. 440-451.

WEYL (HERMANN).

1. *Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis.* Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 28, 1919, pp. 85-92.
2. *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.* Mathematische Zeitschrift, vol. 10, 1921, pp. 39-79.
3. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Erster Teil: Mathematik.* En: *Handbuch der Philosophie.* Abt. II, Beitrag A. Berlin, Oldenburg, 1926, 64 pp.
4. *Philosophy of mathematics and natural science.* Revised and augmented english edition based on a translation by OLAF HELMER. Princeton, Princeton University Press, 1949, X + 311 pp.

WHITEHEAD (ALFRED NORTH).

1. V.: RUSSELL (BERTRAND) y WHITEHEAD (ALFRED NORTH), *Principia Mathematica.*

WRIGHT (GEORGE VON).

1. *Den logiska empirismen. En huvndriktning i modern filosofi.* (*Logical empiricism. A leading movement in modern philosophy.*) Helsingfors, 1943, 188 páginas. Reseña hecha por el autor, JSL, vol. 9, 1944, pp. 25-26.

ZERMELO (F.).

1. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* Mathematische Annalen, vol. 65, 1908, pp. 261-281.

ZICH (O. V.).

1. *O bezespornosti logistických systémů.* (*On the consistency of logistic systems.*) Ceská mysl, vol. 32, 1936, pp. 215-222. Recensión por REACH (K.), JSL, vol. 5, 1940, p. 39.

INDICE DE NOTACIONES

1. INDICACIONES GENERALES SOBRE LAS CATEGORIAS DE EXPRESIONES UTILIZADAS.

1.1. LENGUA BASE Y LENGUA FORMALIZADA.

Debemos considerar sistemas totalmente formalizados, cuyos elementos de base se presentan en forma de signos de los que debe darse la lista completa. Estos signos pueden agruparse según reglas explícitamente formuladas (*reglas de formación*) y las expresiones así formadas pueden encadenarse entre sí, a partir de algunas de ellas, según otras reglas igualmente formuladas de manera explícita y completa (*reglas de derivación*).

Pero las consideraciones que desarrollamos a propósito de estos sistemas no pueden tener lugar en el interior de estos sistemas mismos. Nos vemos precisados a servirnos de una *lengua base,* en la cual las expresiones no están definidas de manera rigurosa sino en su sentido intuitivo. Esta lengua base es el español, completado por un cierto número de notaciones que deben permitirnos hablar cómodamente de ciertos objetos matemáticos y de ciertos objetos formales (en particular, de los sistemas formalizados). Por oposición a esta lengua de base, denominaremos a los sistemas totalmente formalizados *lenguas formalizadas.*

Las expresiones, las propiedades y los razonamientos que conciernen a una lengua formalizada se denominan, respectivamente, *expresiones* y *razonamientos* y *propiedades metateóricas.*

En los razonamientos metateóricos, la Aritmética juega un importante papel. Se trata de la Aritmética en su forma ordinaria, que sólo en parte está formalizada. Esta no utiliza una notación simbólica sometida a reglas precisas de manipulación, salvo para designar los enteros, las operaciones con enteros, ciertas funciones y ciertos predicados de enteros. Las demostraciones descansan, en gran parte, sobre métodos de razonamiento intuitivos, apelando a ciertas propiedades intuitivas de enteros, así como a funciones y a predicados de enteros. A esta Aritmética parcialmente formalizada la denominaremos *Aritmética intuitiva.* Como sus razonamientos se expresan en español, podemos considerar que pertenecen a nuestra lengua base.

El conjunto de reglas y propiedades relativas a la estructura de una lengua formalizada, constituye lo que se denomina *sintaxis* de esta lengua. La sintaxis de una lengua formalizada contiene en particular las *reglas de formación* (que indican cómo se pueden construir las expresiones que se consideran *dotadas de sentido*) y las *reglas de derivación* (que indican cómo pueden efectuarse las derivaciones): éstas son las *reglas sintácticas.*

Para formularlas, se utilizan expresiones de la lengua española y símbolos apropiados, denominados *símbolos sintácticos.* Las expresiones que describen operaciones que se cumplen en la lengua formalizada de que se habla, se denominan *expresiones sintácticas.* Se puede considerar que la sintaxis de una lengua formalizada pertenece a la lengua de base de que nos servimos para describirla (o, más exactamente, se formula en esta lengua).

1.2. Variables y constantes.

Los símbolos que tendremos que considerar se dividen en dos especies: la de las *variables* y la de las *constantes.*

Las *variables* son símbolos que pueden ser reemplazados por constantes que pertenecen a la misma categoría (por ejemplo, la de los individuos, o la de los predicados). Una variable designa en cierto modo en vacío el lugar que puede ser ocupado, en una expresión, por una constante de una categoría determinada.

Las *constantes* son símbolos que designan objetos concretos perfectamente determinados (por ejemplo, un número entero o una clase de enteros). Por supuesto, en un sistema totalmente formalizado, las constantes se consideran independientemente de su significación intuitiva, y su sentido queda fijado exclusivamente por las reglas que indican cómo podemos servirnos de ellas.

1.3. Elementos pertenecientes a la lengua base.

En la lengua base, además de los elementos pertenecientes a la lengua española, debemos considerar las siguientes categorías de símbolos y expresiones:

1.31. *Símbolos de la Aritmética intuitiva.*

Son de varios tipos, correspondiendo a varias categorías de objetos: *individuos* (el símbolo *cero,* los enteros naturales, los ordinales), *operaciones, funciones, predicados* (o propiedades) referentes a *individuos.*

1.32. *Símbolos correspondientes a las operaciones lógicas elementales.*

Pueden considerarse (puesto que no nos encontramos aquí a un nivel totalmente formalizado) como notaciones abreviadas para las expresiones españolas correspondientes (tales como *y, o, si, ... entonces, ...*).

1.33. *Símbolos pertenecientes a la sintaxis de la Aritmética intuitiva.*

Permiten designar diferentes expresiones (o categorías de expresiones) de la Aritmética intuitiva y formular reglas relativas a algunas de estas expresiones (o categorías de expresiones).

Esta sintaxis incluirá variables y constantes.

Cada vez que podamos hacerlo sin introducir ambigüedad, recurriremos al *uso autónimo* de los símbolos de la Aritmética intuitiva. Utilizar un símbolo de manera *autónima* es utilizarlo como nombre que sirve para designarse a sí mismo.

1.34. *Símbolos que designan propiedades metateóricas.*

Las propiedades designadas por estos símbolos pueden adoptar la forma de funciones (es decir, de expresiones que adoptan un valor determinado cada vez que se especifica a qué objetos se aplican) o de predicados (es decir, de expresiones que pueden dar enunciados verdaderos o falsos, según la naturaleza de los objetos a los cuales se aplica).

Prácticamente, gracias al procedimiento de *aritmetización* [1], las propiedades metateóricas pueden expresarse por medio de funciones y de predicados aritméticos.

1.35. *Símbolos pertenecientes a la sintaxis de la lengua formalizada en estudio.*

Encontraremos cuatro especies de símbolos:

1.35.1. Símbolos utilizados para designar las diferentes categorías de objetos que pertenecen a la lengua formalizada que se está estudiando (*nombres* para estos objetos).

1.35.2. Variables, que sirven para formular *reglas* y ciertos *razonamientos metateóricos.*

1.35.3. Símbolos para designar ciertos objetos particulares de la lengua formalizada.

Cada vez que podamos hacerlo sin introducir ambigüedad, recurriremos al *uso autónimo* de los símbolos de la lengua formalizada en estudio.

1.35.4. Símbolos que representan *funciones* u *operaciones sintácticas.*

1.36. *Símbolos para designar ciertos objetos o ciertas categorías de objetos.*

Se trata de *nombres* para objetos determinados. Es necesario disponer de estos nombres para simplificar las exposiciones y evitar ambigüedades. Nos veremos llevados a utilizar tres especies de símbolos de este género.

1.36.1. Nombres para ciertos objetos formales definidos mediante consideraciones formuladas en la lengua de base.

[1] Véase § 68.

1.36.2. Nombres para ciertos objetos sintácticos pertenecientes a la sintaxis de la Aritmética intuitiva o a la sintaxis de la lengua formalizada estudiada.

1.36.3. Nombres para ciertos objetos de la lengua base, tales como las *operaciones lógicas.*

1.37. *Símbolos representativos de las funciones utilizadas en la interpretación de un sistema formal.*

Tendremos que considerar aquí dos categorías de funciones:

1.37.1. Funciones que sirven para asociar los objetos de un sistema formal con los elementos de un *campo de interpretación* (o de un *modelo*)[2]. Denominaremos a tales funciones: *funciones de interpretación.*

1.37.2. Funciones que forman parte de un *campo de interpretación* y con las cuales están asociados ciertos elementos del sistema.

1.38. *Símbolos que representan enunciados cualesquiera.*

1.39. *Símbolos que representan relaciones de la teoría de conjuntos.*

Observación.—Para designar una proposición de la lengua de base, nos serviremos del término *enunciado,* a fin de distinguirlas de las expresiones que constituyen las *proposiciones* de la lengua formalizada.

1.4. Elementos pertenecientes a las lenguas formalizadas.

1.41. *Observación general.*

Tenemos que considerar varias lenguas formalizadas diferentes.

Sin embargo, si se deja aparte el caso del formalismo de la *conversión-λ*[3], el de los *sistemas canónicos*[4] y el de las *lógicas combinatorias*[5], se encuentra en ellas los mismos tipos de expresiones. Esencialmente, sólo se diferencian entre sí por sus axiomas. Denominaremos a estas lenguas: *lenguas formalizadas de tipo clásico.* Podemos, por tanto, juzgar suficiente describir de manera general los tipos de expresiones que intervienen en las lenguas formalizadas que utilizamos, sin imponernos la obligación de considerar por separado cada una de ellas.

Introduciremos dos categorías de símbolos: *símbolos constructivos* y *símbolos abreviativos.* Sólo los primeros son indispensables, pues contituyen el material me-

[2] Véanse §§ 24 y 28.
[3] Véase 1.44 más adelante.
[4] Véase 1.45 más adelante.
[5] Véase 1.46 más adelante.

diante el cual es posible, sirviéndose de reglas de formación, construir todos los tipos de expresiones que constituyen la lengua formalizada.

Los segundos se introducen solamente con el objeto de abreviar la escritura, y constituyen expresiones que se podrían escribir explícitamente por medio de símbolos constructivos. Naturalmente, se les podría considerar como símbolos sintácticos que designan ciertas expresiones de la lengua formalizada. Pero esto llevaría a ciertas confusiones: es importante reconocer, en todo razonamiento metateórico, lo que pertenece a la lengua de base y lo que pertenece a la lengua formalizada.

Considerando estos símbolos abreviativos como si formasen parte de la lengua formalizada, nos autorizamos a efectuar sobre ellos las operaciones de la lengua formalizada.

1.42. *Símbolos constructivos.*

He aquí las diferentes categorías de símbolos constructivos que tendremos que utilizar (para las lenguas formalizadas de tipo clásico).

1.42.1. Símbolos para ***individuos.***

(Los ***individuos*** son los elementos primeros a los que se puede atribuir propiedades o entre los cuales se puede establecer relaciones funcionales, pero que no pueden jugar ellos mismos el papel de propiedades o relaciones funcionales).

1.42.2. Símbolos para *funciones.*

1.42.3. Símbolos para *predicados.*

1.42.4. Símbolos para *propiedades de un nivel cualquiera* (predicados, predicados de predicados, y así sucesivamente.)

1.42.5. Símbolos para *operaciones lógicas.*

1.43. *Categorías de expresiones.*

Las diferentes categorías de expresiones que se pueden contruir (en las lenguas formalizadas de tipo clásico) mediante símbolos constructivos, son las siguientes:

1.43.1. *Cifras.*

1.43.2. *Términos.*

1.43.3. *Expresiones de n-ésimo tipo* (siendo *n* cualquier valor).

1.43.4. *Proposiciones elementales.*

1.43.5. *Proposiciones.*

1.43.6. *Proposiciones cerradas.*

1.44. *El formalismo de la conversión-*λ.

Este formalismo posee una estructura bastante diferente de la de los formalismos tratados en los puntos 1.42 y 1.43.

Sus elementos constructivos se reducen a un operador y a una serie ilimitada de variables.

Incluye, por lo demás, dos categorías de reglas:

1) Reglas de formación, que indican cuáles son las combinaciones de elementos constructivos que están dotados de sentido (*fórmulas bien formadas*).

2) Reglas de operación, que indican cuáles son las transformaciones que pueden practicarse sobre las fórmulas bien formadas.

1.45. *Sistemas canónicos.*

Estos sistemas sólo llevan un número finito de elementos constructivos; no poseen sino un número finito de axiomas, y sus reglas de derivación son reglas de tipo combinatorio que se presentan bajo forma de esquemas.

1.46. *Lógicas combinatorias.*

Se pueden distinguir dos categorías de *variables formales* (variables que pueden pertenecer a un sistema formal): *indeterminadas* y *sustitutivas.*

Las *indeterminadas* son símbolos cuya significación no se ha fijado.

Las *variables sustitutivas* son elementos de un sistema formal que permite practicar (dentro de ciertas expresiones) operaciones de sustitución.

Las lógicas combinatorias son sistemas que no llevan variables sustitutivas, sino:

1) *Componentes primitivas* (que desempeñan el papel de constantes).

2) Otras *componentes* que pueden ser *introducidas por vía de definición* (y que desempeñan también el papel de constantes).

3) Una operación única, denominada *aplicación.*

Por otra parte, se puede añadir a estos elementos, para facilitar ciertas consideraciones metateóricas, símbolos que juegan el papel de indeterminados. A tales símbolos los denominaremos *adjuntos.*

2. INDICE COMPLETO DE LAS NOTACIONES UTILIZADAS.

Este índice proporciona la lista completa de las notaciones utilizadas, e indica, en cada caso, el objeto que designa o su significación intuitiva (cuando se trata, por ejemplo, de un símbolo de operación lógica). En el caso de notaciones que exigen explicaciones más detalladas, el índice indica el lugar de la obra donde estas notaciones están definidas.

2.1. LENGUAS UTILIZADAS.

2.11. *Lengua de base*: ... ... *LB.*
Partes de esta lengua: ... ... LB_0, LB_1, ...

2.12. *Aritmética intuitiva*: ... ... *LAI*,
LAI forma parte de *LB*[6].

2.13. *Lenguas formalizadas en general*: ... ... *LF*,
y este mismo símbolo acompañado de índices[7].

2.14. *Lenguas formalizadas particulares.*

2.14.1. *Formalismo de* SHEPHERDSON *para la teoría de conjuntos*: ... ... *LFE* (pág. 305).

2.14.2. *Formalismo de* GÖDEL ... ... *LFG*
(Sección 2-III, pág. 105).

2.14.3. *Formalismo de* ROSSER ... ... *LFG*$_0$ (pág. 169).
LFG$_1$ (pág. 170), *LFG*$_2$ (pág. 170), ..., *LFG*$_n$ (pág. 170), *LFG*$_\mu$ (pág. 169), *LFG*$_{\mu+1}$ (pág. 169), *LFG*$_{\mu\nu}$ (pág. 169), *LFG*$_\nu$ (pág. 169), *LFG*$_\xi$ (página 169), ..., *LFG*$_{\omega+n}$ (pág. 170), *LFG-R* (página 160), *FLG*-Ω (pág. 170).

2.14.4. *Formalismo de* HEYTING: ... ... *LFH* (pág. 186).

2.14.5. *Formalismo de* KLEENE: ... ... *LFK* (pág. 157).

2.14.6. *Formalismo de* MYHILL: ... ... *LFM* (pág. 323).

2.14.7. *Formalismos de la teoría de números clásica*:
LFN (pág. 181), *LFN** (pág. 186), *LFN-C* (página 197), *LFN-G* (pág. 188), *LFN-T* (página 195), *LFN-V* (pág. 262).

2.14.8. *Lógica aplicada de predicados de primer orden*:
LFP-A (págs. 220 y 392).

2.14.9. *Subsistema de LFP-A correspondiente a la teoría de números clásica*:
LFP-A$_m$ (pág. 393).

2.14.10. *Lógica de predicados aplicada de orden* ω:
LFP-ω (pág. 309).

2.14.11. *Formalismo de la teoría de números clásica obtenido a partir de LFP*-ω:
LFP-ω*N* (pág. 312).

2.14.12. *Formalismo de* KALMÁR: ... ... *LFR* (pág. 172).

2.14.13. *Formalismos de* TARSKI: ... ... *LFT* (pág. 267).
LFT$_1$ (pág. 275), *LFT*$_2$ (pág. 276), ..., *LFT*$_\nu$ (pág. 276), ..., *LFT*-Ω (pág. 274).

2.14.14. *Formalismo de la conversión*-λ... ... ... *LF*-λ
(§ 146, pág. 202).

2.2. SÍMBOLOS DE LB.

LB comprende todos los símbolos de la lengua española, y además los símbolos siguientes:

2.21. *Símbolos de LAI.*

[6] Véase 1.1 anteriormente.

[7] Estos índices pueden ser numéricos o literales.

2.21.1. *Individuos.*

2.21.1.1. *Constantes individuales* (o constantes pertenecientes a la categoría de individuos).

2.21.1.11. *Números enteros*:
0, 1, 2, ...

2.21.1.12. *Primer ordinal transfinito*: ... ... ω.

2.21.1.13. *Primer número-ε*: ... ... ε_0 (pág. 195).

2.21.1.14. Símbolos para designar *números enteros* perfectamente determinados (pero cuyo valor numérico no está dado explícitamente):
a, b, c, ...,
y estas mismas letras afectadas de índices:
(a_1, b_1, c_1, ..., a_i, b_i, c_i, ...).
(Estos símbolos podrían ser considerados como designaciones sintácticas para los números enteros.)

2.21.1.15. Símbolos para designar *números ordinales transfinitos* perfectamente determinados (pero cuyos valores no están dados explícitamente):
μ, ν, ξ, y estas mismas letras afectadas de índices.
(Puede aplicarse aquí la misma observación del 2.21.1.14.)

2.21.1.2. Variables individuales (estas variables pueden ser reemplazadas por constantes individuales):
X, Y, Z, y estas mismas letras afectadas de índices.
(X_1, Y_1, Z_1, ..., X_2, Y_2, Z_2, ...).

2.21.2. *Operaciones.*
Las operaciones aritméticas (adición, multiplicación, etc.) pueden considerarse como funciones de los números a que se aplican.

2.21.3. *Funciones.*

2.21.3.1. *Constantes funcionales.*

2.21.3.1.1. $+$: *adición* (pág. 85).

2.21.3.1.2. $\times$: *multiplicación* (pág. 85).

2.21.3.1.3. — : *sustracción.*

2.21.3.1.4. *Akn* : *función de* ACKERMANN (pág. 87).

2.21.3.1.5. Akn_a }
2.21.3.1.6. Akn_b } *funciones auxiliares de* ACKERMANN (pág. 87).
2.21.3.1.7. Akn_c }

2.21.3.1.8. *Cnt* : *función* constante (pág. 88).

2.21.3.1.9. *Exp* : *exponenciación* (pág. 85).
(Expresaremos la expresión habitual a^b en la forma: *Exp a b.*)

2.21.3.1.10. *Min* : *el mínimo número que* ... (pág. 92).

2.21.3.1.11. *Scc* : *función sucesor* (pág. 85).

2.21.3.1.12. $Sel^{(in)}$: *función de selección* que aísla la *i*-ésima variable en una sucesión de *n* variables (pág. 88).

2.21.3.2. *Variables funcionales*:
φ, χ, ψ, y estas mismas letras afectadas de índices.

2.21.4. *Predicados.*
2.21.4.1. *Constantes predicativas.*
2.21.4.1.1. $=$: *igual a.*
2.21.4.1.2. $\neq$: *diferente de.*
2.21.4.1.3. $>$: *mayor que.*
2.21.4.1.4. $<$: *menor que.*
2.21.4.1.5. $\geqq$: *mayor que o igual.*
2.21.4.1.6. $\leqq$: *menor que o igual.*
2.21.4.2. *Variables predicativas*:
Φ, X, Ψ.
2.21.5. *Signos de agrupación*:
los dos signos de paréntesis.
2.21.6. *Convenciones de escritura.*

Con el fin de reducir el uso de paréntesis y corchetes, adoptaremos las convenciones siguientes.

a) Cuando dos símbolos están escritos a continuación el uno del otro esto significa que el primero se aplica al segundo[8].

b) Cuando varios símbolos van escritos uno a continuación de otro, se utiliza la *regla de la asociación a izquierda*: el primero es aplicable al segundo, la expresión así obtenida es aplicable al tercero, y así sucesivamente.

c) Una expresión escrita entre paréntesis debe ser considerada, desde el punto de vista de las convenciones precedentes, como si desempeñase el papel de un símbolo único.

Estas convenciones serán utilizadas cada vez que sea posible sin perjudicar la claridad de las fórmulas. Se utilizarán especialmente cuando se trate de aplicar funciones o predicados a sus argumentos.

Cuando se aplica una función a varios argumentos, por ejemplo a las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, se la puede considerar como un operador que, aplicado al primer argumento X_1, da un nuevo operador que se aplica, a su vez, al segundo argumento X_2, y así sucesivamente.

Por ejemplo, si se aplica la función $Sel^{(in)}$ a las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en lugar de escribir $Sel^{(in)}\ (X_1, X_2, \ldots, X_n)$,
se podrá escribir $(\ldots ((Sel^{(in)})\ (X_1)\ (X_2)) \ldots (X_n))$,
o, utilizando nuestra convención, $Sel^{(in)}\ X_1\ X_2 \ldots X_n$.

2.22. *Símbolos de operaciones lógicas u operadores lógicos.*
2.22.1. *Operadores de un argumento.*
(Estos operadores se colocan delante de su argumento.)
2.22.1.1. $\sim$: *negación.*
2.22.1.2. $\hat{X}$: *operador de abstracción.*

[8] Las funciones y los predicados están representados por grupos de tres letras. Cada uno de estos grupos de tres letras debe considerarse que constituye un símbolo único.

2.22.1.3. (X) : *cuantificador de universalización.*
(*para todo X ...*).

2.22.1.4. (EX): *cuantificador de particularización.*
(*para un cierto X ...*).

2.22.1.5. *Observaciones sobre los dos cuantificadores.*

Los dos operadores de cuantificación se refieren a una variable[9]. Esta variable debe considerarse como parte integrante del operador.

Diremos de un cuantificador que menciona la variable *X* que es *a nombre de la variable X*[10].

Una expresión constituida por un cuantificador seguido de su argumento sólo se considera dotado de sentido si este argumento contiene la variable mencionada en el cuantificador y si no contiene ya un cuantificador a nombre de la misma variable. (Esta precaución está destinada a evitar toda ambigüedad).

Sea *A* un enunciado aritmético[11]. Para indicar que este enunciado comporta la variable *X* escribiremos: *A*(*X*). La expresión *A*(*X*) puede servir de argumento a un cuantificador a nombre de *X*.

Así, pues, podemos, partiendo de *A*(*X*), formar dos nuevos enunciados:

(*X*) *A*(*X*) : *para todo X, A*(*X*),
(o también:
cualquiera que sea X, X cumple el enunciado A),
(EX) *A*(*X*): *existe un X tal que A*(*X*),
(o también:
existe al menos un X que cumple el enunciado A).

En las expresiones (*X*) *A*(*X*) y (EX) *A*(*X*), la variable *X* que figure en *A*(*X*) se dice que está *ligada* por el cuantificador.

Una variable no ligada (cuya mención no figura en ningún cuantificador de la expresión a la que pertenece) se dice que es *libre.*

2.22.1.6. *Observaciones sobre el operador de abstracción.*

El operador de abstracción permite construir un predicado por medio de un enunciado. La expresión constituida por un operador de abstracción seguido de su argumento sólo se considera dotada de sentido cuando responde a las tres condiciones siguientes:

a) Este argumento constituye un enunciado.

b) Contiene la variable mencionada en el operador y esta variable figura en él como variable libre.

---

[9] Las variables que intervienen en *LB* son las de *LAI* (véase 2.21.1.2).

[10] Para designar un símbolo (en este caso la variable *X*) lo utilizaremos según el uso autónimo. Para designar una expresión de un cierto tipo, utilizaremos, según el uso autónimo, el símbolo que la representa.

[11] Véase el punto 2.23.2.3.

c) No contiene ya un operador de abstracción que mencione la misma variable.

Una expresión puede llevar un cierto número de operadores de abstracción.

Sea $A(X)$ un enunciado aritmético que contiene la variable X como variable libre.

La expresión $A(X)$ puede servir de argumento al operador de abstracción $\hat{X}$. Podemos así, partiendo del enunciado $A(X)$, formar la expresión: $\hat{X}\ A(X)$.

Esta expresión debe leerse: *la propiedad, para un X, debe ser tal que se dé* $A(X)$ (o, más sencillamente: *verificar el enunciado* $A(X)$).

Esta expresión constituye un predicado.

En la expresión $\hat{X}\ A(X)$, la variable X se dice *eliminada* por el operador $\hat{X}$.

Un predicado formado mediante operadores de abstracción puede ser tratado como cualquier predicado: por tanto, se pueden construir enunciados aplicándole a variables o a constantes individuales.

Para aplicar un predicado tal que $\hat{X}\ A(X)$ con una variable o una constante individual, basta con reemplazar, en $A(X)$, la variable X por la variable o por la constante individual en cuestión.

Así $[\hat{X}\ A(X)]\ Y$ da: $A(Y)$.

y $[\hat{X}\ A(X)]\ a$ da: $A(a)$.

Ejemplo: partamos del enunciado $(X = Y)$.

Podemos formar el predicado $\hat{X}\ (X = Y)$, que significa: *la propiedad de ser igual a Y.*

Aplicando este predicado a la constante 10, por ejemplo, obtenemos el enunciado: $10 = Y$.

Podemos eliminar igualmente la variable Y y formar el predicado $\hat{X}\ \hat{Y}\ (X = Y)$, que significa: *la propiedad, para un X y para un Y, de ser iguales.* Este es el predicado de igualdad.

Aplicando a las constantes 4 y 10, por ejemplo, obtendremos el enunciado (por lo demás falso): $4 = 10$.

2.22.2. *Operadores de dos argumentos.*
(Estos operadores se sitúan entre sus argumentos.)

2.22.2.1. & : *conjunción* (*y*).

2.22.2.2. $\vee$: *disyunción* (*o*).

2.22.2.3. $\rightarrow$: *implicación* (*si ...., entonces*).

2.22.2.4. $\leftrightarrow$: *equivalencia* (*es equivalente a*).

2.22.3. *Convenciones sobre los paréntesis.*

2.22.3.1. La acción de un operador acompañado de paréntesis se extiende hasta los paréntesis asociados.

Ejemplo: $(A \vee (B\ \&\ C)) \rightarrow ((A \vee B)\ \&\ (A \vee C))$:

la acción del operador de implicación se extiende hasta los paréntesis extremos.

2.22.3.2. La acción de un operador no acompañado de paréntesis se extiende hasta los paréntesis más próximos o hasta el operador más próximo de fuerza superior a la suya.

2.22.3.3. Los operadores se clasifican así:

a) operadores más fuertes: $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$,
b) operadores de fuerza media: & y $\vee$,
c) operadores más débiles: operadores de un argumento.

2.22.3.4. Cuando varios operadores de un argumento se suceden sin paréntesis, cada uno ejerce su acción hacia la derecha tan lejos como el último de entre ellos.

2.23. *Sintaxis de LAI.*

2.23.1. *Variables.*

Las *variables sintácticas* son utilizadas para la formulación de ciertas reglas y de ciertos esquemas. Pueden ser reemplazadas por los símbolos de *LAI* pertenecientes a la misma categoría. Así, una variable sintáctica individual puede ser reemplazada por un símbolo de individuo. El sentido intuitivo de una tal variable es el siguiente: *expresión de la categoría individuo.*

2.23.1.1. *Variables sintácticas individuales*:
α, β, γ, y estas mismas letras afectadas de índices.
Representan *enteros.*

2.23.1.2. *Variables sintácticas funcionales*:
F, G, H, y estas mismas letras afectadas de índices.
Representan *funciones.*

2.23.1.3. *Variables sintácticas predicativas*:
P, Q, R, y estas mismas letras afectadas de índices.
Representan *predicados.*

2.23.1.4. *Variables sintácticas para términos aritméticos*:
δ, y esta misma letra afectada de índices.

(*Término aritmético*:

a) Toda constante individual es un *término aritmético.*
b) Toda variable individual es un *término aritmético.*
c) Si *F* es un función de *n* argumentos, y si δ_1, δ_2, ..., δ_n son términos aritméticos, $F\delta_1\delta_2 \ldots . \delta_n$ es un *término aritmético.*)

2.23.1.5. *Observaciones.*

1. En un esquema relativo a *LAI,* una expresión tal que $F\ \alpha_1\ \alpha_2$ deba leerse: *expresión de la forma* $F\ \alpha_1\ \alpha_2$, *donde F representa una función y donde* α_1 *y* α_2 *representan números enteros.*

Una expresión de esta forma se convierte en un enunciado de *LAI* desde el momento en que se reemplaza *F* por una función determinada, por ejemplo, *suma de,* y α_1 y α_2 por números enteros.

2. Para evitar complicaciones inútiles, admitiremos expresiones tales que $F\ X_1\ X_2 \ldots, X_n$, donde figuren a la vez variables sintácticas y variables individua-

les de *LAI*. Una tal expresión debe leerse: *expresión de la forma* F X_1 X_2 ... X_n, *donde* F *representa una función y donde* X_1, X_2, ..., X_n *son variables individuales de LAI.*

Este uso puede justificarse perfectamente: basta con admitir la utilización de los símbolos X_1, X_2, ..., X_n como variables sintácticas para variables individuales o, más sencillamente, que se utilicen estos símbolos según el uso autónimo.

2.23.2. *Constantes.*
Las *constantes sintácticas* se utilizan para designar ciertos objetos de *LAI.*

2.23.2.1. *Individuos, operaciones, funciones, predicados*:
uso autónimo.

2.23.2.2. *Fracciones decimales.*
Fd, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.23.2.3. *Enunciados*:
A, B, C, y estas mismas letras afectadas de índices.

Para indicar que un enunciado *A* contiene las variables X_1, X_2, ..., X_n, escribiremos: *A* (X_1, X_2, ..., X_n).

Este uso puede justificarse: basta con admitir que se utilicen los símbolos X_1, X_2, ... y X_n según el uso autónimo

2.24. *Propiedades metateóricas.*

Estas propiedades se expresan mediante funciones y predicados aritméticos. Sin embargo, nosotros agruparemos éstos bajo una rúbrica especial, debido al papel que desempeñan en los razonamientos metateóricos.

2.24.1. *Funciones.*

2.24.1.1.	*Crd*	: *función de coordinación*	(pág. 158).
2.24.1.2.	*Dis*	: *disyunción*	(pág. 122).
2.24.1.3.	*Enm-K*	: *función de enumeración* (para *LFK*)	(pág. 158).
	Enm-L	: " "	(pág. 158).
	Enm-R	: " (para *LFG-R*)	(pág. 160).
	Enm-λ	: " (para *LF-λ*)	(pág. 213).
2.24.1.4.	*Fkl*	: *función de* KLEENE	(pág. 154).
2.24.1.5.	*Imp*	: *implicación*	(pág. 179).
2.24.1.6.	*Neg*	: *negación*	(pág. 121).
2.24.1.7.	*Nmc*	: *número de enteros que son los números-D de una máquina-T no-circular*	(pág. 217).
2.24.1.8.	*Sbs*	: *función especial de sustitución*	(pág. 126).
2.24.1.9.	*Seq-n*	: *función de selección sobre una serie M-definible*	(pág. 217).
2.24.1.10.	*Sim*	: *consecuencia inmediata*	(pág. 236).
2.24.1.11.	*Sub*	: *resultado de una sustitución*	(pág. 122).
2.24.1.12.	*Unv*	: *universalización*	(pág. 122).

2.24.1.13. *Val* : *valor de un término de LNF-V para la atribución de valores asociado a una serie Se* (pág. 264).

2.24.2. *Predicados.*

2.24.2.1. *Predicados explícitamente definidos.*

2.24.2.1.1. *Brn* : *Predicado de* BERNAYS (pág. 379).
2.24.2.1.2. *Bth* : *Predicado de* BETH (pág. 382).
2.24.2.1.3. *Can* : *ser una componente canónica* (pág. 328).
2.24.2.1.4. Can_n : *ser una componente canónica de nivel n* (pág. 328).
2.24.2.1.5. *Cnv* : *convertible* (pág. 204).
2.24.2.1.6. *Crt* : *coherente* (pág. 178).
2.24.2.1.7. *Dem* : *derivable* (pág. 123).
2.24.2.1.8. *Dem-R* : *derivable en el sentido de* ROSSER (pág. 161).
2.24.2.1.9. *Dem-Ω* : *derivable en LFG-Ω* (pág. 170).
2.24.2.1.10. *Fal* : *falso* (pág. 60).
2.24.2.1.11. *Fdr* : *ser una derivación* (pág. 123).
2.24.2.1.12. *Fdr-R* : *ser una derivación en el sentido de* ROSSER (pág. 161).
2.24.2.1.13. *Mem-Rp* : *miembro de la clase Cl-Rp* (pág. 268).
2.24.2.1.14. *Nen* : *ser un número entero* (pág. 52).
2.24.2.1.15. $Pkl^{(n)}$: *predicado de* KLEENE (n + 2) argumentos (pág. 155).
2.24.2.1.16. *Pkl* : *predicado de* KLEENE (de tres argumentos) (pág. 155).
2.24.2.1.17. *Prm* : *ser un número primo* (pág. 121).
2.24.2.1.18. *Pro* : *ser una proposición* (pág. 178).
2.24.2.1.19. *Pvr* : *ser una proposición verdadera* (pág. 185).
2.24.2.1.20. *Sts* : *satisfacer a una proposición de LNF-V* (pág. 266).
2.24.2.1.21. *Unm* : *predicado de* TURING (pág. 220).
2.24.2.1.22. *Var* : *ser una variable* (pág. 121).
2.24.2.1.23. *Vri* : *verdadero* (págs. 60, 262 y 264).

2.24.2.2. *Predicados no explícitamente definidos*:
*P**, *Q**, *R**, y estos mismos símbolos afectados de índices.

2.25. *Sintaxis de la lengua formalizada estudiada.*

2.25.1. *Nombres para las categorías de objetos de la lengua formalizada*[12].

2.25.1.1. *Constantes individuales*: ..... *Ct.*
2.25.1.2. *Variables individuales*: ..... *Va.*
2.25.1.3. *Funciones*: ..... *Fn.*
2.25.1.4. *Predicados*: ..... *Pd.*
2.25.1.5. *Términos*: ..... *Te.*
2.25.1.6. *Expresiones del n-ésimo tipo*: ..... $Ex^{(n)}$.
2.25.1.7. *Proposiciones*: ..... *Pr.*
2.25.1.8. *Proposiciones cerradas*: ..... *Pf.*
2.25.1.9. *Series de proposiciones*: ..... *Sp.*

[12] Para el sentido de las expresiones que siguen, véase posteriormente 2.31 y 2.32.

2.25.1.10. *Series de símbolos*: ..... *Sy.*

2.25.1.11. *Elementos cualesquiera*: ..... *Ec.*

Estos diferentes símbolos pueden eventualmente ir afectados de índices.

2.25.2. *Variables sintácticas*[13].

La misma observación que para 2.23.1., pero haciendo jugar a la lengua formalizada el papel de *LAI.*

2.25.2.1. *Variables para cifras*:

κ, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.2. *Variables para variables individuales*:

Θ, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.3. *Variables para variables del n-ésimo tipo*:

Θ^n, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.4. *Variables para términos*:

τ, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.5. *Variables para expresión del n-ésimo término y expresiones correspondientes a propiedades del n-ésimo tipo*:

Λ^n, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.6. *Variables para variables proposicionales*:

Π, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.7. *Variables para proposiciones*:

A, B, Γ (*alfa, beta* y *gamma* mayúsculas), y estos mismos símbolos afectados de índices.

2.25.2.8. *Variables para proposiciones cerradas*:

A*, B*, Γ*, y estos mismos símbolos afectados de índices.

2.25.2.9. *Variables para series de símbolos*:

Σ, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.10. *Variables para fórmulas bien formadas del formalismo de la conversión-λ*:

Υ (*úpsilon* mayúscula), y este mismo símbolo afectado de índices.

2.25.2.11. *Variables para componentes de una lógica combinatoria*[14]:

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_i, \Delta_n, \Delta_F, \Delta_F^*$.

2.25.2.12. *Observación*:

Para indicar que una proposición A contiene la variable Θ^n, escribiremos: $A(\Theta^n)$.

2.25.3. *Nombres para objetos particulares de la lengua formalizada.*

Uso autónimo.

(En particular en el caso de *expresiones funcionales y predicativas*[15] y de *proposiciones.*)

---

[13] Para el sentido de las expresiones que siguen (*cifras*, etc.), véanse posteriormente los puntos 2.31 y 2.32.

[14] Véase § 221.

[15] Expresiones complejas que juegan, respectivamente, el papel de funciones y de predicados. Véase después 2.31.2.3 y 2.21.224.

2.25.4. *Funciones y operaciones sintácticas.*

2.25.4.1. *Operaciones de sustitución.*

Designaremos por la notación

$[Ec_1/Ec_2]$ A

la expresión que se obtiene reemplazando el elemento Ec_1 por el elemento Ec_2 en la proposición A.

Ec_1 *y* Ec_2 pueden ser constantes o variables individuales de los términos, de las funciones, etc. La notación anterior es una forma de expresar, en el plano metateórico, una operación de sustitución que se produce en la lengua formalizada.

Extenderemos esta notación al caso de sustituciones simultáneas:

$[Ec_{i1}, Ec_{i2}, \ldots, Ec_{in}/Ec_{j1}, Ec_{j2}, \ldots, Ec_{jn}]$ A

designa la expresión que se obtiene reemplazando, en la proposición A, los elementos $Ec_{i1}, Ec_{i2}, \ldots, Ec_{in}$, respectivamente, por los elementos $Ec_{j1}, Ec_{j2}, \ldots, Ec_{jn}$.

2.25.4.2. *Funciones de Gödel*:

Designaremos así a la función metateórica que permite pasar de una expresión de la lengua formalizada a su *número de Gödel*[16] y la función inversa. Estas funciones permiten representar, de manera abreviada, operaciones metateóricas.

2.25.4.21. *Función directa*:

$Ngd\,(Ec)$: *número de Gödel* del elemento Ec (pág. 98).

2.25.4.22. *Función inversa*:

$Ngd^{-1}\,(a)$: elemento de la lengua formalizada cuyo *número de Gödel* es a[17] (pág. 98).

2.25.4.3. *Operador de difinición.*

El símbolo $\equiv$, situado entre dos expresiones, indica que la expresión de la izquierda está definida mediante la expresión de la derecha.

Este operador es considerado, desde el punto de vista de su campo de acción, como más fuerte que los operadores lógicos.

2.26. *Nombres para ciertos objetos metateóricos.*

2.26.1. *Nombres para ciertos objetos formales definidos en LB.*

2.26.1.1. *Expresiones algorítmicas*:

Al, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.2. *Bases*:

Ba, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.3. *Clases*:

Cl, y este mismo símbolo afectado de índices.

Clases particulares.

---

[16] Véase § 68.

[17] El símbolo *a* se utiliza aquí según el uso autónimo.

2.26.1.3.1.	*Cl-Ci*	(pág. 308).
2.26.1.3.2.	*Cl-Df*	(pág. 271).
2.26.1.3.3.	*Cl-Dr*	(pág. 267).
2.26.1.3.4.	*Cl-D* Ω	(pág. 274).
2.26.1.3.5.	*Cl-E* 0 *k*	(pág. 258).
2.26.1.3.6.	*Cl-E j* 1	(pág. 259).
2.26.1.3.7.	*Cl-E j k*	(pág. 258).
2.26.1.3.8.	*Cl-E n k*	(pág. 258).
2.26.1.3.9.	*Cl-E* $(n+1)$ *k*	(pág. 258).
2.26.1.3.10.	*Cl-Pr*	(pág. 267).
2.26.1.3.11.	*Cl-Rp*	(pág. 268).
2.26.1.3.12.	*Cl-U* 0 *k*	(pág. 258).
2.26.1.3.13.	*Cl-Ujk*	(pág. 259).
2.26.1.3.14.	*Cl-Unk*	(pág. 258).
2.26.1.3.15.	*Cl-Un* $(k+1)$	(pág. 258).
2.26.1.3.16.	*Cl-U* $(n+1)$ *k*	(pág. 258).
2.26.1.3.17.	*Cl-Vr*	(pág. 267).

2.26.1.4. *Conjuntos*:

En, y este mismo símbolo afectado de índices.

Conjuntos particulares.

2.26.1.4.1.	*En-C*	(pág. 228).
2.26.1.4.2.	*En-Cf*	(pág. 228).
2.26.1.4.3.	*En-Cv*	(pág. 228).
2.26.1.4.4.	*En-D*	(pág. 226).
2.26.1.4.5.	*En-Df* (1)	(pág. 297).
2.26.1.4.6.	*En-Df* (2)	(pág. 297).
2.26.1.4.7.	*En-Df* (3)	(pág. 297).
2.26.1.4.8.	*En-Df* (*k*)	(pág. 297).
2.26.1.4.9.	*En-Df* (*n*)	(pág. 297).
2.26.1.4.10.	*En-Df* $(n+1)$	(pág. 297).
2.26.1.4.11.	*En-Di*	(pág. 300).
2.26.1.4.12.	*En-Dip*	(pág. 301).
2.26.1.4.13.	*En-Dm*$_0$	(pág. 309).
2.26.1.4.14.	*En-Dm*$_1$	(pág. 309).
2.26.1.4.15.	*En-Dm*$_\alpha$	(pág. 309).
2.26.1.4.16.	*En-Dm*$_\beta$	(pág. 309).
2.26.1.4.17.	*En-Dm*$_\gamma$	(pág. 309).
2.26.1.4.18.	*En-Dm*$_{\beta\gamma}$	(pág. 309).
2.26.1.4.19.	*En-E*	(pág. 347).
2.26.1.4.20.	*En-F*	(pág. 83).
2.26.1.4.21.	*En-Fd*	(pág. 300).
2.26.1.4.22.	*En-H*	(pág. 239).

2.26.1.4.23. *En-K* (pág. 239).
2.26.1.4.24. *En-Kl*$_1$ (pág. 390).
2.26.1.4.25. *En-Kl*$_2$ (pág. 390).
2.26.1.4.26. *En-Kr* (pág. 394).
2.26.1.4.27. *En-LFT* (pág. 275).
2.26.1.4.28. *En-Ru* (pág. 297).
2.26.1.4.29. *En-S*1 (pág. 259).
2.26.1.4.30. *En-Sak* (pág. 258).
2.26.1.4.31. *En-Sbk* (pág. 258).
2.26.1.4.32. *En-Sb* ($k+1$) (pág. 258).
2.26.1.4.33. *En-Sk* (pág. 258).
2.26.1.4.34. *En-S* ($k+1$) (pág. 258).
2.26.1.4.35. *En-Spk* (pág. 258).

2.26.1.5. *Lenguas cualesquiera*:
Ln, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.6. *Máquinas*:
Ma, y este mismo símbolo afectado de índices.
Ma-m, y este mismo símbolo afectado de índices.
Máquinas particulares.
2.26.1.6.1. *Ma-D* (pág. 216).
2.26.1.6.2. *Ma-Em* (pág. 218).
2.26.1.6.3. *Ma-Fm* (pág. 219).
2.26.1.6.4. *Ma-G* (pág. 217).
2.26.1.6.5. *Ma-Hm* (pág. 219).
2.26.1.6.6. *Ma-U* (pág. 206).

2.26.1.7. *Modelos*:
Md, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.8. *Operadores*:
Op, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.9. *Problemas*:
Pb, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.1.10. *Series de enteros* (series infinitas con un número finito de términos diferentes de 1: *Se*, *Se**).

2.26.1.11. *Teorías*:
Th, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26,2. *Nombres para objetos sintácticos.*

2.26.2.1. *Reglas*:
Re, y este mismo símbolo afectado de índices.
Regla particular: *Re-C* (pág. 169).

2.26.2.2. *Operaciones*:
On, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.26.3. *Nombres para objetos de la lengua de base no mencionados en los números precedentes* (del 2.26.1. al 2.26.2.).
(En particular: *nombres para los operadores lógicos.*)
Regla general: uso autónimo.

2.27. *Funciones para interpretación.*

2.27.1. *Funciones de interpretación.*
Mdl, y este mismo símbolo afectado de índices [18].

2.27.2. *Funciones pertenecientes a un campo de interpretación* (o de un modelo):

Mdj (pág. 60).
Mip (pág. 60).

2.28. *Enunciados cualesquiera.*

2.28.1. Cuando esto pueda hacerse sin embigüedad, utilizaremos las letras *A*, *B*, *C* (y estas mismas letras afectadas de índices), introducidas en el punto 2.23.2.3., para designar enunciados cualesquiera pertenecientes a una lengua cualquiera *Ln*.

2.28.2. Utilizaremos los símbolos A^*, B^*, C^*, A_1^*, B_1^*, C_1^*, ..., para designar las expresiones que representan, en una lengua Ln_1 diferente de la lengua *Ln*, los enunciados *A*, *B*, *C*, A_1, B_1, C_1, ..., de *Ln*.
Y utilizaremos los símbolos A^{**}, B^{**}, C^{**}, A_1^{**}, B_1^{**}, C_1^{**}, ..., para designar las expresiones que representan, en una lengua Ln_2 diferente de la lengua Ln_1, las expresiones A^*, B^*, C^*, A_1^*, B_1^*, C_1^*, ..., de Ln_1.

2.29. *Relaciones de la teoría de conjuntos.*

2.29.1. *Relación de pertenencia* (indicando que un elemento pertenece a un conjunto): $\in$.

2.29.2. *Relación de inclusión* (indicando que un conjunto forma parte de otro conjunto): $\subset$.

2.30. *Objetos del n-ésimo tipo* $Ob^{(n)}$.

2.3. Lenguas formalizadas de tipo clásico.

2.31. *Lista de símbolos utilizados.*

2.31.1. *Símbolos constitutivos.*

2.31.1.1. *Variables y constantes.*

2.31.1.11. *Símbolos para individuos.*

2.31.1.11.1. *Constantes individuales*:

N_0, N_1, N_2, ...

[18] Véase § 26.

Estos son los símbolos de la lengua formalizada que corresponden a los números enteros. En rigor, sólo el símbolo N_0 es indispensable. En efecto, es posible formar, por medio de este símbolo y del símbolo σ (función *sucesor*), expresiones correspondientes a los enteros. Los símbolos N_1, N_2, ... pueden, por tanto, considerarse como abreviaciones para las expresiones σN_0, σ (σN_0), etc.

Consideraremos que igualmente forman parte de la lengua formalizada las constantes N_a, N_b, N_c, ..., que corresponden a las constantes *a, b, c,* ... de *LAI*[19].

En todo rigor, habría que utilizar aquí una notación sintáctica: el símbolo N_a sería entonces un símbolo sintáctico que designaría una cierta constante de la lengua formalizada, la que corresponde al entero *a.*

Pero es más cómodo, para evitar ciertas complicaciones, introducir estas expresiones como constantes de la lengua formalizada.

También utilizaremos las constantes *U, E* e *I*[20].

2.31.1.11.2. *Variables individuales*:
$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, y estas mismas letras afectadas de índices.
(Como se indica en el § 20, se podría utilizar también, para designar las variables individuales, los símbolos $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$. Véase pág. 56).

2.31.1.12. *Constante funcional.*
σ : *función* sucesor (págs. 106 y 108).

2.31.1.13. *Constantes predicativas.*

2.31.1.13.1.	$=$	:	*igualdad*	(pág. 110).
2.31.1.13.2.	$=_I$	:	*imagen*-HB *de* $=$	(pág. 399).
2.31.1.13.3.	$\in$	:	*predicado de pertenencia de LFP-A*	(pág. 392).
2.31.1.13.4.	$\in_I$	:	*imagen*-HB *de* $\in$	(pág. 394).

2.31.1.14. *Símbolos para propiedades de un nivel cualquiera.*
Esta categoría lleva únicamente variables:
variables de n-ésimo tipo (siendo *n* un valor cualquiera):
$\mathfrak{X}^n$, $\mathfrak{Y}^n$, $\mathfrak{Z}^n$, y estos mismos símbolos afectados de índices.

2.31.1.15. *Variables proposicionales.*
π, y esta misma letra afectada de índices.

2.31.1.2. *Signos de agrupamiento.*
Son los dos signos del paréntesis y los dos corchetes.
Las mismas convenciones de escritura que en el punto 2.21.6.

2.31.1.3. *Operadores proposicionales.*
Se trata de operadores que permiten obtener, a partir de proposiciones dadas, otras proposiciones.

Utilizaremos para estos operadores los mismos símbolos que en 2.22. Naturalmente, las variables que figuran en los cuantificadores

[19] Véase anteriormente 2.21.1.14.
[20] Para *U, véase* pág. 39. Para *E* e *I*, véanse págs. 56 y 64.

2.22.1.2., 2.22.1.3. y 2.22.1.4. deben ser reemplazadas por variables de la lengua formalizada.

Las mismas convenciones se utilizan para el uso de paréntesis que en el punto 2.22.3.

2.31.2. *Símbolos abreviativos.*

2.31.2.1. *Símbolos para proposiciones determinadas*[21]:
Proposiciones particulares.

2.31.2.1.1.	$\mathfrak{I}_C$	(pág. 387).
2.31.2.1.2.	$\mathfrak{I}_G$	(pág. 377).
2.31.2.1.3.	$\mathfrak{I}_K$	(pág. 379).
2.31.2.1.4.	$\mathfrak{I}_R$	(pág. 378).
2.31.2.1.5.	$\mathfrak{I}_T$	(pág. 273).
2.31.2.1.6.	$\mathfrak{I}_U$	(pág. 290).
2.31.2.1.7.	$\mathfrak{I}_{Um}$	(pág. 290).
2.31.2.1.8.	$\mathfrak{T}$	(pág. 268).
2.31.2.1.9.	$\mathfrak{T}_m$	(pág. 268).

2.31.2.2. *Símbolos para proposiciones cerradas determinadas*[22]:
$\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{E}^*$, y estos mismos símbolos afectados de índices.
Proposiciones cerradas particulares.

2.31.2.2.1.	$\mathfrak{I}^*$	(pág. 125).
2.31.2.2.2.	$\mathfrak{I}^*_K$	(pág. 253).
2.31.2.2.3.	$\mathfrak{I}^*_R$	(pág. 164).

2.31.2.3. *Símbolos para expresiones funcionales determinadas* (expresiones complejas que constituyen funciones):
$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$, y estos mismos símbolos afectados de índices.
Expresiones funcionales particulares.

2.31.2.3.1.	$\mathfrak{Dsn}$	(pág. 398).
2.31.2.3.2.	$\mathfrak{Dsn}_I$	(pág. 399).
2.31.2.3.3.	$\mathfrak{Enm}$-λ	(pág. 213).
2.31.2.3.4.	$\mathfrak{Ima}$	(pág. 394).
2.31.2.3.5.	$\mathfrak{Klm}$	(pág. 173).
2.31.2.3.6.	$\mathfrak{Sqh}$	(pág. 398).
2.31.2.3.7.	$\mathfrak{Sqn}_I$	(pág. 399).

2.31.2.4. *Símbolos para expresiones predicativas determinadas* (expresiones complejas que constituyen predicados):
$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, y estos mismos símbolos afectados de índices.
Expresiones predicativas particulares.

2.31.2.4.1.	$\mathfrak{Brn}$	(pág. 380).
2.31.2.4.2.	$\mathfrak{Bth}$	(pág. 382).
2.31.2.4.3.	$\mathfrak{Ean}$	(pág. 328).

[21] Sobre el sentido de la palabra *proposición*, véase más adelante 2.32.5.
[22] Sobre el sentido de la expresión *proposición cerrada*, véase más adelante el punto 2.32.6.

2.31.2.4.4. $\mathfrak{San}_n$ (pág. 328).
2.31.2.4.5. $\mathfrak{Inf}$ (pág. 173).
2.31.2.4.6. $\mathfrak{Ren}$ (pág. 289).
2.31.2.4.7. $\mathfrak{Pkl}$ (pág. 253).
2.31.2.4.8. $\mathfrak{Anm}$ (pág. 220).
2.31.2.4.9. $\mathfrak{Vri}$ (págs. 275 y 396).
2.31.2.4.10. $\mathfrak{Vri}_1$ (pág. 396).

2.31.2.5. *Expresiones representativas de conjuntos.*
2.31.2.5.1. $\mathfrak{Ekr}$ (pág. 394).
2.31.2.5.2. $\mathfrak{Ekr}_1$ (pág. 394).

2.31.2.6. *Observaciones.*

1. En general, utilizaremos letras góticas para designar las proposiciones, expresiones funcionales y expresiones predicativas que corresponden, respectivamente, a enunciados, funciones y predicados de la Aritmética intuitiva.

2. Para indicar que una proposición (cualquiera) A contiene las variables $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ escribiremos:
A $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n)$.
Esta expresión debe considerarse que forma parte de la sintaxis. En rigor, este uso sólo se justifica si se consideran los símbolos $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ como símbolos sintácticos correspondientes a las variables de la lengua formalizada.

3. Para indicar que una proposición determinada $\mathfrak{A}$ o una expresión funcional $\mathfrak{F}$ o una expresión predicativa $\mathfrak{P}$ contiene las variables $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$, escribiremos, respectivamente:

$\mathfrak{A}\ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n)$,
$\mathfrak{F}\ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n)$,
$\mathfrak{P}\ (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n)$.

Estas expresiones pertenecen a la lengua formalizada.

2.32. *Nomenclatura de las categorías de expresiones.*
Entre las expresiones que se pueden formar asociando entre sí los símbolos enumerados anteriormente en el punto 2.31, sólo se consideran *dotadas de sentido* y constituyentes de las expresiones de la lengua formalizada, aquellas que están construidas conforme a las siguientes reglas de formación (que se formulan en forma recurrente).

Estas reglas definen el sentido de las diferentes categorías de expresiones que pertenecen a la lengua formalizada.

2.32.1. *Cifras.*
2.32.1.1. N_0 es una *cifra.*
2.32.1.2. Si κ_i es una *cifra,* $\sigma\ \kappa_i$ es una *cifra.*
2.32.2. *Términos.*
2.32.2.1. Una constante individual es un *término.*

2.32.2.2. Una variable individual es un *término.*

2.32.2.3. Toda expresión constituida por medio de una constante funcional o por una expresión funcional cuyos argumentos son constantes o variables individuales es un *término.*

2.32.2.4. Toda expresión obtenida reemplazando, en una expresión de la forma 2.32.2.3, que contenga al menos una variable individual, esta variable por una expresión de la forma 2.32.2.3, es un *término.*

2.32.3. *Expresiones del n-ésimo tipo.*

2.32.3.1. *Un término es una expresión del primer tipo.*

2.32.3.2. Una variable del *n*-ésimo tipo es una *expresión del n-ésimo tipo.*

2.32.4. *Proposiciones elementales.*

2.32.4.1. Toda expresión constituida mediante una constante predicativa o por una expresión predicativa cuyos argumentos son términos es una *proposición elemental.*

2.32.4.2. Toda expresión de la forma $\Lambda^{n+1}\ \Lambda^{n}$, donde Λ^{n+1} es una expresión del tipo $(n + 1)$ y Λ^{n} una expresión del tipo n, es una *proposición elemental.*

2.32.5. *Proposiciones.*

2.32.5.1. Una proposición elemental es una *proposición.*

2.32.5.2. Si A es una *proposición,* $\sim$ A es una *proposición*:

2.32.5.3. Si A y B son *proposiciones,*

$A \ \& \ B$,

$A \ \vee \ B$,

$A \rightarrow B$,

$A \leftrightarrow B$,

son igualmente *proposiciones.*

2.32.5.4. Si A es una *proposición* que contiene la variable Θ^{n} [23], y si no contiene un cuantificador de nombre Θ^{n}, $(\Theta^{n})\ A\ (\Theta^{n})$

y $(E\Theta^{n})\ A\ (\Theta^{n})$

son igualmente *proposiciones.*

En las proposiciones $(\Theta^{n})\ A\ (\Theta^{n})$ y $(E\Theta^{n})\ A\ (\Theta^{n})$, la variable Θ^{n} que figura en $A\ (\Theta^{n})$ se dice que está *ligada* por el cuantificador.

Una variable no ligada se denomina *libre.*

2.32.6. *Proposiciones cerradas.*

Una proposición que no contiene variables libres es una proposición *cerrada.*

Se observa fácilmente que una proposición cualquiera se puede convertir en una

[23] Véase nota en 2.25.2.12.

proposición cerrada si se ligan por cuantificadores todas las variables libres que contiene.

Una proposición no cerrada se denomina *abierta.*

2.4. Formalismo de la conversión-λ [24].

2.41. *Lista de símbolos utilizados.*
2.41.1. *Operador de abstracción*: ... λ.
2.41.2. *Variables*:
$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, y estas mismas letras afectadas de índices.
2.41.3. *Signos de agrupamiento*: los dos signos del paréntesis.
2.41.4. *Signo de separación*: el punto.

2.41.5. *Observaciones.*

1. Para indicar que una fórmula bien formada [25] Y contiene las variables $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, escribiremos: Y ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$).

2. El operador λ debe ir acompañado de la variable a que se refiere la abstracción.

Denominaremos *armadura de una fórmula de una variable* a la serie de símbolos constituida por el operador λ, seguido de la variable sobre la que se ha practicado la abstracción. Para indicar que la armadura de una fórmula debe considerarse como un todo, se separa mediante un punto de la expresión a la que afecta.

Para la parte de la fórmula que sigue al punto separativo se sigue la regla de separación a la izquierda. Toda expresión situada entre los paréntesis debe considerarse que forma un todo.

Cuando varias abstracciones se practican sucesivamente sobre la misma expresión, se puede simplificar la notación aplicando la regla de la asociación a la derecha.

Así $\lambda\,\mathfrak{X}\,(\lambda\,\mathfrak{Y}\,(\lambda\,\mathfrak{Z}\,.\,Y\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})))$

se convierte en: $\lambda\,\mathfrak{X}\,\lambda\,\mathfrak{Y}\,\lambda\,\mathfrak{Z}\,.\,Y\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$,

fórmula en la que la expresión $\lambda\,Z\,.\,Y\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$ debe considerarse que forma un todo.

Convendremos en escribir la serie de símbolos $\lambda\,\mathfrak{X}\,\lambda\,\mathfrak{Y}\,\lambda\,\mathfrak{Z}$ en la forma $\lambda\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$.

Nuestra fórmula se convierte finalmente en: $\lambda\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}\,.\,Y\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$.

Mediante esta convención, denominaremos *armadura de una fórmula* a la serie de símbolos constituida por el operador λ seguido de la mención de las variables

[24] Véase § 146.
[25] Sobre el sentido de esta expresión, véase más adelante 2.42.1.

sobre las que se han practicado las abstracciones sucesivas. La armadura de una fórmula está separada por un punto de la expresión a la que afecta.

2.42. *Reglas.*

2.42.1. *Reglas de formación.*

Estas reglas indican, en forma recurrente, cuáles son las series de símbolos que se consideran como *fórmulas bien formadas.*

2.42.1.1. Toda fórmula constituida por una sola variable es una *fórmula bien formada.* Se dice que esta variable figura en la fórmula como *variable libre.*

2.42.1.2. Si las fórmulas Y_1 e Y_2 son bien formadas, la fórmula $Y_1\ Y_2$[26] es *bien formada.*

Se dice que una variable figura como *variable libre* o como *variable ligada* sea en Y_1 sea en Y_2.

2.42.1.3. Si la fórmula Y es *bien formada* y si la variable $\mathfrak{X}$ figura en ella como *variable libre,* la fórmula $\lambda\ \mathfrak{X} \cdot Y$ es *bien formada*[27].

Se dice que la variable $\mathfrak{X}$ figura en la fórmula $\lambda\ \mathfrak{X} \cdot Y$ como *variable ligada* y cualquier otra variable distinta de $\mathfrak{X}$ que figure en esta fórmula se dice que figura en ella como *variable libre* o como *variable ligada,* según que figure como *variable libre* o como *variable ligada* en Y.

2.42.2. *Reglas de operación.*

2.42.2.1. *Sustitución*:

Se puede reemplazar, en una fórmula bien formada Y_1, una variable ligada $\mathfrak{X}$ por otra variable $\mathfrak{Y}$, a condición de que esta variable sea diferente de cada una de las variables de Y_1.

2.42.2.2. *Reducción*:

Se puede reemplazar una fórmula del tipo $(\lambda\ \mathfrak{X}\ .\ Y_1)\ Y_2$ por la fórmula $[\mathfrak{X}/Y_2]\ Y_1$, a condición de que las variables ligadas de Y_1 sean distintas de $\mathfrak{X}$ y de las variables libres de Y_2.

2.5. SISTEMAS CANÓNICOS[28].

Símbolos utilizados:

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... ,

y estas mismas letras afectadas de índices.

2.6. LÓGICAS COMBINATORIAS[29].

2.61. *Símbolos utilizados.*

2.61.1. *Predicado de aserción*: ..... $\vdash$ (pág. 320).

2.61.2. *Predicado de igualdad*: ..... $=$ (pág. 319).

---

[26] Obtenida por aplicación de Y_1 a Y_2.

[27] También se puede escribir: $\lambda\ \mathfrak{X} \cdot Y\ (\mathfrak{X})$.

[28] Véase § 160.

[29] Véase § 221.

2.61.3. *Componentes correspondientes a operadores lógicos.*

2.61.3.1. *Componentes correspondientes al operador de implicación*: ..... $\mathfrak{R}$ (págs. 320 y 321).

2.61.3.2. *Componente correspondiente al operador de negación*: ... $\mathfrak{N}$ (pág. 321).

2.61.4. *Componentes particulares.*

2.61.4.1. $\mathfrak{L}$ (pág. 321).

2.61.4.2. $\mathfrak{M}$ (pág. 321).

2.61.5. *Símbolos adjuntos*:

$\mathfrak{B}$, y este mismo símbolo afectado de índices.

2.62. *Reglas de formación.*

2.62.1. *Formación de componentes no primitivas.*

Partiendo de componentes cualesquiera, se pueden formar otras componentes mediante la operación de *aplicación*. La expresión obtenida por aplicación de Δ_1 a Δ_2 se representa por $\Delta_1\ \Delta_2$[30].

Si Δ_1 y Δ_2 son *componentes* cualesquiera (primitivas o no) del sistema, $\Delta_1\ \Delta_2$ es también una componente del sistema.

2.62.2. *Formación de proposiciones.*

Partiendo de componentes es posible formar *proposiciones* mediante el predicado de aserción.

Si Δ_i es una *componente* del sistema,

$\vdash \Delta_i$ es una *proposición* del sistema.

2.63. *Observaciones.*

1. Sirviéndose de la operación de aplicación, es posible representar en el sistema cualquier otra operación mediante componentes apropiadas.

Así, el operador de implicación puede representarse por la componente $\mathfrak{R}$.

Sean Δ_1 y Δ_2 dos componentes del sistema.

Aplicando $\mathfrak{R}$ a Δ_1, y después la expresión obtenida a Δ_2, se obtiene la componente $\mathfrak{R}\ \Delta_1\ \Delta_2$.

(Esta componente significa desde el punto de vista intuitivo: Δ_1 *implica* Δ_2.)

2. El predicado de aserción es el único introducido a título de componente primitiva. Los demás predicados pueden definirse mediante componentes (primitivas o no) que no desempeñan el papel de predicados.

Sea *LF* una lógica combinatoria.

Si queremos expresar que se puede representar en este sistema una cierta función *F* de un argumento por medio de una componente Δ^*_F de este sistema, podemos proceder como sigue.

[30] Cuando se suceden varios componentes, se utiliza la regla de asociación por la izquierda.

Añadamos a *LF* el símbolo $\mathfrak{B}$ (que va a jugar el papel de una variable, pero en sentido indeterminado).

Sea *LF*-$\mathfrak{B}$ el sistema así obtenido.

Supongamos que sea posible construir una cierta expresión Δ_F de *LF*-$\mathfrak{B}$ tal que corresponda a la función *F*.

Y supongamos también que existe en *LF* una componente Δ^*_F tal que se pueda derivar en *LF*-$\mathfrak{B}$:

$$\Delta^*_F\, \mathfrak{B} = \Delta_F.$$

Esta componente Δ^*_F puede considerarse que representa la función *F* misma (sin la intervención de variables sustitutivas)[31].

Podemos designarla por la notación:

$$[\mathfrak{B}]\ \Delta_F.$$

La igualdad anterior se convierte en tal caso:

$$([\mathfrak{B}]\ \Delta_F)\ \mathfrak{B} = \Delta_F.$$

Como $\mathfrak{B}$ es un elemento indeterminado, podemos sustituir en $\mathfrak{B}$ una componente cualquiera. Si aplicamos la expresión $([\mathfrak{B}]\ \Delta_F)$ a una componente cualquiera de *LF*, por ejemplo Δ_i, obtendremos una componente nueva, formada reemplazando el símbolo $\mathfrak{B}$, en todos los lugares en donde figure en Δ_F, por la componente Δ_i.

3. INDICE DE NOTACIONES - RESUMEN.

1. INDICACIONES GENERALES SOBRE LAS CATEGORÍAS DE EXPRESIONES UTILIZADAS.

1.1. *Lengua de base y lengua formalizada.*
1.2. *Variables y constantes.*
1.3. *Elementos pertenecientes a la lengua de base.*
1.4. *Elementos pertenecientes a las lenguas formalizadas.*

2. TABLA COMPLETA DE NOTACIONES UTILIZADAS.

2.1. *Lenguas utilizadas.*
2.11. *Lengua de base*: ..... *LB.*
Partes de *LB*: ..... LB_0, LB_1.
2.12. *Aritmética intuitiva*: ..... *LAI.*
2.13. *Lenguas formalizadas en general*: ..... *LF.*
(o con índices).

[31] Sobre el sentido de esta expresión, véase § 221.

2.14. *Lenguas formalizadas particulares*:
LFE, LFG, LFG$_0$, LFG$_1$, LFG$_2$, ..., LFG$_n$, LFG$_\mu$, LFG$_{\mu+1}$, LFG$_{\mu\nu}$, LFG$_\nu$, LFG$_\xi$, ..., LFG$_{\omega+n}$, LFG-R, LFG-Ω, LFH, LFK, LFM, LFN, LFN, LFN-C, LFN-G, LFN-T, LNF-V, LFP-A, LFP-A$_m$, LFP-ω, LFP-ωN, LFR, LFT, LFT$_1$, LFT$_2$, ..., LFT$_\nu$, ..., LFT-Ω, LF-λ.*

2.2. *Símbolos de LB.*
2.21. *Símbolos de LAI.*
2.21.1. *Individuos.*
2.21.1.1. *Constantes individuales.*
2.21.1.11. *Números enteros*: ..... 0, 1, 2, ...
2.21.1.12. *Primero ordinal transfinito*: ..... ω.
2.21.1.13. *Primer número-ε*: ..... ε_0.
2.21.1.14. *Números enteros determinados*: ..... *a, b, c* (y con índices).
2.21.1.15. *Ordinales transfinitos determinados*: ... μ, ν, ξ (y con índices).
2.21.1.2. *Variables individuales*: ..... X, Y, Z (y con índices).

2.21.2. *Operaciones*: Véase *funciones.*

2.21.3. *Funciones.*
2.21.3.1. *Constantes funcionales*:
+, ×, —, *Akn, Akn$_a$, Akn$_b$, Akn$_c$, Cnt, Exp, Min, Scc, Sel$^{(in)}$.*
2.21.3.2. *Variables funcionales*: ..... φ, χ, ψ (y con índices).

2.21.4. *Predicados.*
2.21.4.1. *Constantes predicativas*:
=, ≠, >, <, ≧, ≦.
2.21.4.2. *Variables predicativas*: ..... Φ, X, Ψ (y con índices).

2.21.5. *Signos de agrupación.*

2.21.6. *Convenciones de escritura.*

2.22. *Operadores lógicos.*
2.22.1. *Operadores de un argumento.*
2.22.1.1. *Negación*: ..... ~.
2.22.1.2. *Abstracción*: ..... $\hat{X}$.
2.22.1.3. *Universalización*: ..... (X).
2.22.1.4. *Particularización*: ..... (EX).
2.22.1.5. *Observaciones sobre los dos cuantificadores.*
2.22.1.6. *Observaciones sobre el operador de abstracción.*

2.22.2. *Operadores de dos argumentos.*
2.22.2.1. *Conjunción*: ..... &.

2.22.2.2. *Disyunción*: ..... $\vee$.
2.22.2.3. *Implicación*: ..... $\rightarrow$.
2.22.2.4. *Equivalencia*: ..... $\leftrightarrow$.

2.22.3. *Convenciones relativas a los paréntesis.*

2.23. *Sintaxis de LAI.*
2.23.1. *Variables.*
2.23.1.1. Para *individuos*: ..... α, β, γ (y con índices).
2.23.1.2. Para *funciones*: ..... F, G, H (y con índices).
2.23.1.3. Para *predicados*: ..... P, Q, R (y con índices).
2.23.1.4. Para *términos aritméticos*: ..... δ (y con índices).
2.23.1.5. *Observaciones.*

2.23.2. *Constantes.*
2.23.2.1. *Individuos, operaciones, funciones, predicados.*
2.23.2.2. *Fracciones decimales*: ..... *Fd* (y con índices).
2.23.2.3. *Enunciados*: ..... *A, B, C* (y con índices).

2.24. *Propiedades metateóricas.*
2.24.1. *Funciones*:
Crd, Dis, Enm-K, Enm-L, Enm-R, Enm-λ, Fkl, Imp, Neg, Nmc, Sbs, Seq-n, Sim, Sub, Unv, Val.
2.24.2. *Predicados.*
2.24.2.1. *Predicados explícitamente definidos*:
Brn, Bth, Can, Can$_n$, Cnv, Crt, Dem, Dem-R, Dem-Ω, Fal, Fdr, Fdr-R, Mem-Rp, Nen, Pkl$^{(n)}$, Pkl, Prm, Pro, Pvr, Sts, Unm, Var, Vri.
2.24.2.2. *Predicados no-explícitamente definidos*: P^*, Q^*, R^* (y con índices).

2.25. *Sintaxis de la lengua formalizada estudiada.*
2.25.1. *Nombres para las categorías de objetos de la lengua formalizada*: *Ct, Va, Fn, Pd, Te, Ex$^{(n)}$, Pr, Pf, Sp, Sy, Ec.*

2.25.2. *Variables sintácticas.*
2.25.2.1. Para *cifras*: ..... κ (y con índices).
2.25.2.2. Para *variables individuales*: ..... Θ (y con índices).
2.25.2.3. Para *variables de n-ésimo tipo*: ..... Θ^n (y con índices).
2.25.2.4. Para *términos*: ..... τ (y con índices).
2.25.2.5. Para *expresiones de n-ésimo tipo y propiedades del n-ésimo tipo*: ..... Λ^n (y con índices).
2.25.2.6. Para *variables proposicionales*: ..... Π (y con índices).
2.25.2.7. Para *proposiciones*: ..... A, B, Γ (y con índices).
2.25.2.8. Para *proposiciones cerradas*: ..... A^*, B^*, Γ^* (y con índices).

2.25.2.9. Para *series de símbolos*: ..... Σ (y con índices).
2.25.2.10. Para *fórmulas bien formadas de LF-λ*: Y (y con índices).
2.25.2.11. Para *componentes de una lógica combinatoria*:
Δ_1, Δ_2, ... Δ_i, Δ_n, Δ_F, Δ^*_F.
2.25.2.12. *Observación.*

2.25.3. *Nombres para objetos particulares de la lengua formalizada.*
2.25.4. *Funciones y operaciones sintácticas.*
2.25.4.1. *Operación de sustitución*:
$[Ec_1/Ec_2]$ A,
$[Ec_{i1}, Ec_{i2}, \ldots, Ec_{in}/Ec_{j1}, Ec_{j2}, \ldots, Ec_{jn}]$ A.
2.25.4.2. *Funciones de Gödel*: ..... Ngd, Ngd^{-1}.
2.25.4.3. *Operador de definición*: ..... $\equiv$.

2.26. *Nombres para ciertos objetos metateóricos.*
2.26.1. *Nombres para ciertos objetos formales definidos en LB.*
2.26.1.1. *Expresiones algorítmicas*: ..... *Al* (y con índices).
2.26.1.2. *Bases*: ..... *Ba* (y con índices).
2.26.1.3. *Clases*: ..... *Cl* (y con índices).
Clases particulares:
Cl-Ci, Cl-Df, Cl-Dr, Cl-DΩ, Cl-E0k, Cl-Ej1, Cl-Ejk, Cl-Enk, Cl-E $(n+1)$ *k, Cl-Pr, Cl-U0k, Cl-Ujk, Cl-Unk, Cl-Un* $(k+1)$, *Cl-U* $(n+1)$ *k, Cl-Vr.*
2.26.1.4. *Conjuntos*: ..... *En* (y con índices).
Conjuntos particulares:
En-C, En-Cf, En-Cv, En-D, En-Df(1), *En-Df*(2), *En-Df*(3), *En-Df*(*k*), *En-Df*(*n*), *En-Df*(*n* + 1), *En-Di, En-Dip, En-Dm*$_0$, *En-Dm*$_1$, *En-Dm*$_\alpha$, *En-Dm*$_\beta$, *En-Dm*$_\gamma$, *En-Dm*$_{\beta\gamma}$, *En-E, En-F, En-Fd, En-H, En-K, En-Kl*$_1$, *En-Kl*$_2$, *En-Kr, En-LFT, En-Ru, En-S*1, *En-Sak, En-Sbk, En-Sb*(*k*+1), *En-Sk, En-S*(*k* + 1), *En-Spk.*
2.26.1.5. *Lenguas cualesquiera*: ..... *Ln* (y con índices).
2.26.1.6. *Máquinas*: ..... *Ma* (y con índices).

Máquinas particulares:
Ma-D, Ma-Em, Ma-Fm, Ma-G, Ma-Hm, Ma-U.
2.26.1.7. *Modelos*: ..... *Md* (y con índices).
2.26.1.8. *Operadores*: ..... *Op* (y con índices).
2.26.1.9. *Problemas*: ..... *Pb* (y con índices).
2.26.1.10. *Series de enteros*: ..... *Se, Se** (y con índices).
2.26.1.11. *Teorías*: ..... *Th* (y con índices).

2.26.2. *Nombres para objetos sintácticos.*
2.26.2.1. *Reglas*: ..... *Re* (y con índices).
Regla particular: ..... *Re-C.*

2.26.2.2. *Operaciones*: ..... *On* (y con índices).
2.26.3. *Nombres para objetos de la lengua de base no mencionados en los números precedentes.*

2.27. *Funciones para interpretación.*
2.27.1. *Funciones de interpretación*: ..... *Mdl* (y con índices).
2.27.2. *Funciones pertenecientes a un campo de interpretación (o a un modelo)*: ..... *Mdj, Mip.*

2.28. *Enunciados cualesquiera.*
2.28.1. Enunciados cualesquiera de una lengua cualquiera: *A, B, C* (y con índices).
2.28.2. Representación de estos enunciados en otra lengua: *A*, B*, C** (y con índices).
Representación de estas expresiones en otra lengua: *A**, B**, C*** (y con índices).

2.29. *Relaciones de la teoría de conjuntos.*
2.29.1. *Relación de pertenencia*: ..... $\in$.
2.29.2. *Relación de inclusión*: ..... $\subset$.
2.30. *Objetos del n-ésimo tipo*: ..... $Ob^{(n)}$.

2.3. *Lenguas formalizadas de tipo clásico.*
2.31. *Lista de símbolos utilizados.*
2.31.1. *Símbolos constitutivos.*
2.31.1.1. *Variables y constantes.*
2.31.1.11. *Símbolos para individuos.*
2.31.1.11.1. *Constantes individuales*:
$N_0, N_1, N_2, \ldots,$
$N_a, N_b, N_c, \ldots,$
E, I, U.
2.31.1.11.2. *Variables individuales*: ..... $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ (y con índices).
(O también: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$.)
2.31.1.12. *Constante funcional*: ..... σ.
2.31.1.13. *Constantes predicativas*: ..... $=, =_I, \in, \in_I$.
2.31.1.14. *Variables del n-ésimo tipo*: ..... $\mathfrak{X}^n, \mathfrak{Y}^n, \mathfrak{Z}^n$ (y con índices).
2.31.1.15. *Variables proposicionales*: ..... π (y con índices).
2.31.1.2. *Signos de agrupamiento.*
2.31.1.3. *Operadores proposicionales.*

2.31.2. *Símbolos abreviativos.*
2.31.2.1. Para *proposiciones determinadas*: ..... $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{S}$ (y con índices).
Proposiciones particulares:
$\mathfrak{I}_C, \mathfrak{I}_G, \mathfrak{I}_K, \mathfrak{I}_R, \mathfrak{I}_T, \mathfrak{I}_U, \mathfrak{I}_{Um}, \mathfrak{T}, \mathfrak{T}_m$.

2.31.2.2. Para *proposiciones cerradas determinadas*: ..... $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{S}^*$ (y con índices).
Proposiciones cerradas particulares:
$\mathfrak{I}^*$, $\mathfrak{I}^*_K$ $\mathfrak{I}^*_R$.

2.31.2.3. *Para expresiones funcionales determinadas*: ..... $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ (y con índices)
Expresiones funcionales particulares:
$\mathfrak{Dsn}$, $\mathfrak{Dsn}_I$, $\mathfrak{Enm}$-λ, $\mathfrak{Imo}$, $\mathfrak{Klm}$, $\mathfrak{Sqn}$, $\mathfrak{Sqn}_I$.

2.31.2.4. Para *expresiones predicativas determinadas*: ..... $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ (y con índices).
Expresiones predicativas particulares:
$\mathfrak{Vrn}$, $\mathfrak{Vkn}$, $\mathfrak{Can}$, $\mathfrak{Can}_n$, $\mathfrak{Inf}$, $\mathfrak{Ren}$, $\mathfrak{Pfl}$, $\mathfrak{Anm}$, $\mathfrak{Vri}$, $\mathfrak{Vri}_I$.

2.31.2.5. *Expresiones representativas de conjuntos*: ..... $\mathfrak{Skr}$, $\mathfrak{Skr}_I$.

2.31.2.6. *Observaciones.*

2.32. *Nomenclatura de las categorías de expresiones.*
2.32.1. *Cifras.*
2.32.2. *Términos.*
2.32.3. *Expresiones de n-ésimo tipo.*
2.32.4. *Proposiciones elementales.*
2.32.5. *Proposiciones.*
2.32.6. *Proposiciones cerradas.*

2.4. *Formalismo de la conversión-λ.*
2.41. *Lista de los símbolos utilizados.*
2.41.1. *Operador de abstracción*: ..... λ.
2.41.2. *Variables*: ..... $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ (y con índices).
2.41.3. *Signos de agrupamiento.*
2.41.4. *Signos de separación.*
2.41.5. *Observaciones.*

2.42. *Reglas.*
2.42.1. *Reglas de formación.*
2.42.2. *Reglas de operación.*

2.5. *Sistemas canónicos.*
Símbolos utilizados: ..... a, b, c (y con índices).

2.6. *Lógicas combinatorias.*
2.61. *Símbolos utilizados.*
2.61.1. *Predicado de aserción*: ..... $\vdash$.

2.61.2. *Predicado de igualdad*: ..... $=$.
2.61.3. *Componentes correspondientes a operadores lógicos*: ..... $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}$.
2.61.4. *Componentes particulares*: ..... $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$.
2.61.5. *Símbolos adjuntos*: ..... $\mathfrak{B}$ (y con índices).

2.62. *Reglas de formación.*

2.63. *Observaciones.*

INDICE DE EXPRESIONES UTILIZADAS

NOTA EXPLICATIVA.

Este índice contiene todos los términos y expresiones empleados en esta obra en sentido técnico, bien sea porque pertenezcan por derecho propio al vocabulario de las teorías de que se trata explícitamente (en cuyo caso damos una definición precisa del término en cuestión), bien sea porque se los utiliza en el transcurso de la exposición, aunque no pertenezcan estrictamente al vocabulario técnico de las teorías (en cuyo caso se los emplea en su significación corriente y no constituyen el objeto de una definición: así ocurre, por ejemplo, con ciertos conceptos matemáticos, como *conjunto, función, número,* etc. ..., que figuran en la exposición).

También cito en este índice ciertos términos que, sin tener un sentido propiamente técnico, se emplean con cierto significado peculiar (como los términos *horizonte, abierto, trascendental,* etcétera).

Al elaborar este índice he tenido en cuenta las bases siguientes:

1. PRINCIPIOS DE CLASIFICACIÓN.

He utilizado dos sistemas de clasificación, superponiéndolos: un sistema *exterior* y un sistema *interior.*

El sistema *exterior* afecta a las expresiones que se reducen a una sola palabra y a las expresiones que difieren entre sí por su primera palabra. (Así, pues, desde el punto de vista de este sistema se consideran como equivalentes las expresiones que comienzan por una misma palabra).

El sistema interior afecta a las expresiones que comienzan por una misma palabra.

En el sistema exterior sigo sencillamente el orden alfabético. (Así todas las expresiones que comienzan por la palabra *axioma* ocupan en el índice el sitio que corresponde por orden alfabético a la palabra *axioma*).

En el sistema *interior* utilizo un principio de clasificación algo más complicado; principio que he adoptado para asegurar que queden agrupadas todas las expresiones de cualquier categoría determinada que se refieran a un mismo sistema. (Así, según este principio de clasificación, resultarán agrupadas todas las especies de *constantes* que intervienen en el *sistema LFG*).

Las expresiones que comienzan por una misma palabra (o por una misma expresión compleja) se distribuyen en tres grupos.

El primer grupo comprende las expresiones que se forman añadiendo a la palabra inicial (o a la expresión compleja inicial) una aposición o un complemento determinativo (introducido por un artículo partitivo-indefinido, *uno, una,* por una de las preposiciones, *a, en, de, para, sobre,* por una de las locuciones prepositivas *en el sentido de, con relación a, por vía de*) o por la conjunción *como*. Ejemplos: *axioma de determinación, conjunto reunión.*

Estas mismas aposiciones o complementos pueden estar formados por una sola palabra o por una expresión compleja encabezada por un sustantivo.

Las partes de expresiones introducidas por una de las locuciones *en sentido* (así: *en sentido absoluto*) *o formando parte,* se consideran como aposiciones y se clasifican respectivamente bajo la palabra *sentido* o bajo la palabra *parte.*

Los complementos determinativos constituidos por una notación simbólica que designa un sistema (como, por ejemplo, en la expresión *proposición de LFG*) se los sitúa después de todos los demás. Cuando una misma palabra (o una misma expresión compleja) recibe, dentro de expresiones diferentes, varios complementos determinativos de este género, sigo el orden de los símbolos tal como se determina en el Indice de Símbolos.

Cuando una misma palabra (o una misma expresión compleja) recibe, dentro de expresiones diferentes, varios complementos determinativos constituidos por expresiones que comienzan por una misma palabra (o por una misma expresión compleja) disponemos estos mismos elementos de acuerdo con los principios aquí descritos.

Cuando dos complementos determinativos (relacionados ambos con la palabra inicial o con la expresión compleja inicial) se suceden dentro de la misma expresión, y uno de estos dos complementos designa un sistema, se da la precedencia a este complemento. (Así, en la expresión *operador de abstracción de LF-*λ, el segundo elemento determinativo, que designa un sistema, tiene la precedencia). (Cuando ninguno de los dos complementos designa un sistema, nos atenemos a la regla de la prioridad alfabética).

El segundo grupo comprende las expresiones formadas a base de añadir a la palabra inicial (o a la expresión compleja inicial) un adjetivo o una expresión encabezada por un adjetivo (por ejemplo, la expresión *absoluto relativamente a un modelo*), o un adverbio (por ejemplo, la expresión *relativamente a una interpretación*) o un participio (como en las expresiones que empiezan por *perteneciente a, correspondinte a, introducido por*).

Las proposiciones relativas, que hacen oficio de adjetivos, se equiparan a éstos; y ocupan el sitio que ocuparía su verbo correspondiente si éste se emplease en el participio o en el gerundio. (Así, la expresión *conjuntos que se contienen ellos mismos como elementos* se equipara a la expresión *conjuntos conteniéndose ellos mismos como elementos,* y se sitúa en el segundo grupo bajo la palabra *conteniendo*).

La expresión *que sirve para designar* se equipara al participio *designante.*

Las expresiones que se forman modificando un adjetivo mediante un adverbio (por ejemplo, las expresiones *bien ordenado, no-coherente,* se las ordena inmediatamente después de dicho adjetivo).

Cuando se obtienen varias expresiones a partir de una expresión dada a base de modificar un mismo adjetivo (contenido en la expresión dada) mediante adverbios diferentes, se colocan estas expresiones siguiendo el orden alfabético de los adverbios.

Las expresiones formadas por medio de un adjetivo precedido de una letra griega (como en la expresión ω-*coherente*) se colocan inmediatamente después de las expresiones que comienzan con ese adjetivo (o después de dicho adjetivo cuando no hay otras expresiones formadas a base de ese adjetivo).

Cuando intervienen varias expresiones que comienzan por el mismo adjetivo, por el mismo adverbio o por el mismo participio, esas mismas expresiones se ordenan conforme a los principios aquí descritos.

El tercer grupo comprende las expresiones formadas a base de añadir a la palabra inicial (o a la expresión compleja inicial) un símbolo (lo mismo si se trata de un símbolo constituido por medio de una, de dos o tres letras, que si se trata de un símbolo de otra especie) o un sustantivo que represente una designación singular (como en la expresión: *función* sucesor).

Dentro de los dos primeros grupos se sigue la clasificación alfabética (salvo las particularidades que hemos señalado). Dentro del tercer grupo seguimos el orden del Indice de Símbolos.

Los nombres propios siguen las mismas reglas que los sustantivos comunes.

Cuando un adjetivo y un complemento determinativo afectan a la vez (dentro de una misma expresión) a una misma palabra (o a una misma expresión compleja), el complemento determinativo tiene siempre precedencia sobre el adjetivo, incluso cuando éste precede al complemento. Efectivamente, la expresión formada por la palabra inicial (o por la expresión

compleja inicial) y por el complemento determinativo debe considerarse como si formase parte del primer grupo; y dentro de este grupo debe considerarse que la expresión completa (formada a base de añadir a la palabra inicial —o a la expresión compleja inicial— el complemento y el adjetivo al mismo tiempo) forma parte del segundo grupo. (El adjetivo califica el todo formado por la palabra inicial (o por la expresión compleja inicial) y por su complemento determinativo). (Así, la expresión *clase completa de proposiciones,* debe tratarse como si estuviera redactada en la forma: *clase de proposiciones completa*).

De acuerdo con estos principios, una expresión como *clase de las proposiciones derivables de LFG* deberá figurar bajo la palabra *clase* en el primer grupo. Entre las expresiones de este primer grupo ocupará el sitio correspondiente alfabéticamente a la palabra *proposición.* Entre las expresiones que comienzan con las palabras *clase de las proposiciones,* deberá colocarse en el primer grupo en el lugar correspondiente al símbolo *LFG* (siguiendo los principios de clasificación previstos para el primer grupo). Y entre las expresiones que comienzan por las palabras *clase de las proposiciones de LFG* deberá aparecer en el segundo grupo en el lugar correspondiente por orden alfabético a la palabra *derivable* (como si se tratase exactamente de la expresión *clase de las proposiciones de LFG derivables*).

Algunas expresiones contienen una parte encerrada entre paréntesis. Ponemos entre paréntesis las determinaciones que no figuran explícitamente en el texto (o que no figuran expresamente en todas las páginas citadas), pero que, sin embargo, contribuyen a fijar el sentido de la expresión de que se trata. (En el texto pueden sobrentenderse estas determinaciones porque se deducen claramente del contexto.)

En la clasificación no se tienen en cuenta los paréntesis. En efecto, debe considerarse que toda expresión encerrada entre paréntesis forma parte integrante de la expresión en que figura.

Las expresiones formadas por medio del verbo *ser* (en el infinitivo) seguido de un sustantivo o de una expresión encabezada por un sustantivo se colocan inmediatamente después de dicho sustantivo.

Las palabras o expresiones que forman parte de expresiones complejas se citan y clasifican además aparte como si figurasen por sí solas, sólo que remitiendo al lector a la expresión compleja en que figuran.

Al citarlos así aparte, pongo los adjetivos en su forma masculina, y los participios de presente en el modo infinitivo. (Así, la expresión *correspondiente al axioma de reductibilidad,* que figura en la frase *esquema correspondiente al axioma de reductibilidad,* la vuelvo a citar bajo la letra C en esta forma: *corresponder al axioma de reductibilidad*). Los participios pasados se citan en la misma forma en que se presentan.

2. Referencias al texto.

Este índice remite a las palabras y expresiones que figuran en el Prefacio, en uno de los capítulos I a X o en una de las Notas I a IV, con indicación de la página o páginas en que aparecen.

También remite a las palabras y expresiones que figuran en el Indice de Notaciones, con indicación de la sigla IN (INDICE DE NOTACIONES) seguido del número (o de los números) bajo el cual (o bajo los cuales) figuran.

Este Indice no indica *todos* los sitios en que figura una expresión dada, sino solamente aquellos que presentan alguna importancia, sea porque en ellos se defina esa expresión, sea porque intervienen en un contexto que contribuye a precisar su sentido en una u otra forma, o porque se los emplea de una manera significativa (por ejemplo, en el enunciado de un teorema).

Cuando una expresión es objeto de una definición explícita, señalamos el sitio en que se la define poniendo la referencia en cursiva.

Cuando dos textos atribuyen al tema de una misma expresión unas indicaciones que pueden considerarse como igualmente esenciales (y por lo mismo como mutuamente complementarias) indicamos ambos textos poniendo las referencias en cursiva.

Este Indice remite igualmente mediante unas cifras en cursiva a aquellos textos que aportan al tema de una expresión dada una precisión importante o que señalan alguna propiedad característica suya, e igualmente a aquellos textos en los que aparece una expresión empleada en su sentido principal (con relación a los temas tratados en la presente obra).

Sin embargo, no se indican con cursiva las referencias al Indice de Notaciones, ni siquiera en el caso en que el número de dicho Indice al que se remite al lector constituya una definición o pueda considerarse como el equivalente de una definición. Como todas las indicaciones que figuran en el Indice de Notaciones desempeñan el papel de definiciones, por lo menos implícitas, no me ha parecido necesario adoptar una notación especial para las referencias a dicho Indice.

Las referencias a las notas que figuran al pie de la página indican el número de la página en que se encuentra la parte de la nota correspondiente a dicha referencia, seguido del número de la misma nota (colocado entre paréntesis).

Las expresiones constituidas por una notación simbólica precedida de algún término por el estilo de *constante, sistema, variable*, etc. ... (como, por ejemplo, en la expresión *sistema LFG*) únicamente se citan en el presente Indice en la medida en que se las emplea efectivamente bajo esa forma o en la medida en que figuran dentro de expresiones más complejas.

Por lo que se refiere a las expresiones que se reducen a una notación simbólica (utilizada como tal, escuetamente, sin el acompañamiento de términos complementarios o determinantes, como *constante, sistema, variable,* etc. ...), remitiremos al Indice de Símbolos y al Indice de Notaciones.

Por lo que se refiere a los teoremas, lemas y corolarios, sólo señalamos en el presente Indice aquellos que llevan un nombre. En cuanto a los demás, nos remitimos a la Lista de Teoremas, Lemas y Corolarios.

3. Referencias internas.

Cuando una expresión forma parte de otra más compleja, el Indice remite a esta última, señalándola explícitamente si consta tan sólo de una palabra, e indicando su primera palabra si consta de varias.

Cuando una expresión es sinónima de otra, el Indice remite a ésta, indicándola de manera completa.

Para remitir a una expresión constituida por el verbo *ser* seguido de un complemento, el Indice indica solamente este complemento. (Así, para remitir a *ser una componente* indica sencillamente: *v. componente*).

En todo lo que atañe a las referencias internas no se tienen en cuenta para nada los paréntesis. (Así, el Indice remite de la expresión *sistema LFG* a la expresión *constante individual (de LFG)* indicando por lo demás simplemente: *v. constante*).

Abeliano, *v.* grupo.
Abierto, *196 (n. 48). V.* dominio, proposición.
Abreviación, abreviatura, *v.* introducido.
Abreviado, *v.* función.
Abreviativo, *v.* símbolo.
Absoluto, *v.* categoricidad, grado, elemento, saturación, sentido.
— con relación a una familia de modelos, *v.* concepto.
— con relación a un modelo, *v.* concepto.
— con relación a un modelo interno, *v.* elemento.
Abstracción, *v.* operador.
— funcional, *202, 319.*
Abstracto, *v.* axiomático, geometría.
Actitud empirista, *47.*
— platónica, *47.*
Acto, *v.* infinito.
Actual, *v.* infinito.
Adición, *85-86,* 119. *V.* esquema.
— (en la aritmética recursiva), *100.*
— (en *LAI*), IN* 2.21.3.1.1.
Adjunto, *v.* símbolo.
Alef, *406.*
Agregado, *v.* número.
Agrupación, 75. *V.* signo, símbolo.
Algebra de BOOLE, *v.* teoría.
— elemental, 237.
Algébrico, *v.* cuerpo.
Algebrización, *v.* método.
Algorítmico, *v.* expresión, teoría.
Algoritmo (en el sentido de CHURCH), *208.*
Allgemeingültig, 62 (n. 41).
Análisis, 72.
Analíticamente, *v.* verdadero.
Anillo, *v.* teoría.
— de los números reales, *v.* teoría.
— conmutativo, *v.* teoría.
Antecedente, *v.* proposición.
Antidiagonal, *v.* continuación.
Antinomia, 133, 137, 146, 318.
— de BERRY, 298 (n. 5).
— de RICHARD 84. *V.* paradoja.
Aplicación, 75, 319, *319 (n. 66).*
— (en una lógica combinatoria), IN 1.46, 2.62.1.
Aplicación de una función a una serie de argumentos, *88,* 202.
— de la regla de la consecuencia, *v.* cerrado.
— de las reglas de derivación de un sistema *LF, v.* cerrado.
— de la regla Re_1, *v.* cerrado.
— de la regla Re_2, *v.* cerrado.
— de la regla *Re-C, v.* cerrado.
Aplicado, *v.* lógica.
Arbitrario, *v.* "lattice".
Argumento, *v.* operador, predicado, relación, consecuencia.
Argumento de la diagonal, 305, 356. *V.* procedimiento de la diagonal.
Aritmética, 75, 173, 177, 267, 302. *V.* enunciado, función, formalización, predicado, proposición, relación, término.
— de los enteros, 232, 248.
— de los números racionales, 232.
— clásica, *44,* 79, 181, 195, 262. *V.* coherencia.
— intuicionista, 44, 186.
— intuitiva, 185, IN 1.1, 2.12, 2.21. *V.* función, individuo, operación, predicado.
— recursiva, 76, *88-89,* 99, 100, 149, 151, 152, 182, 389. *V.* adición, conjunción, constante, disyunción, enunciado, equivalencia, exponenciación, función, implicación, multiplicación, negación, número, operación, particularización, predicado, universalización, variable.
Aritmetización del cálculo *LF*-λ, 210, 211.
— (de un sistema formal), 84, *96-97. V.* método, principio, procedimiento.
— (del sistema P), 367, *369.*
— del sistema *LFG, 117,* 136.
— del sistema *LFK, 157.*
— (del sistema *LFR*), *173.*
Aritmetizar (un sistema formal), 97.
Armadura de una fórmula (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.41.5.
— de una fórmula (de *LF*-λ), *204.*
— de una fórmula de una variable (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.41.5.
Aserto, aserción, *v.* predicado.
Asociación a derecha, *v.* regla.
Asociación a izquierda, *v.* regla.
Asociado por una correspondencia cualquiera, *v.* elemento.

* Indice de Notaciones.

Asociado a una función, *v.* proposición.
— a una función recursiva general, *v.* entero.
— a un sistema de ecuaciones, *v.* función.
Automorfismo, 66-67.
Autónimo, *v.* uso, utilizar.
Auxiliar, *v.* cuadro.
Axioma, *v.* esquema, sistema.
— s (de un cálculo), 57.
— de la elección, 43, *182,* 200 (n. 54), *300 (n. 12),* 302, 370-371.
— de determinación, 267. *V.* corresponder.
— s de un semigrupo, 234.
— de inducción, 312, 313, 354. *V.* principio de inducción.
— de infinidad, *43-44.*
— s (de la lógica de los predicados de primer orden), *263.*
— s (de la lógica de las proposiciones), *37-38,* 263, 267.
— s de PEANO, 104-105, 181, 189, 263, 312, 313. *V.* corresponder, sistema.
— s para los cuantificadores 263, 267.
— de rentabilidad, 43, 112, *113,* 267. *V.* corresponder.
— de selección, 112, 113, *114.*
— s (del sistema de PEANO), *35, 36.*
— s (del sistema de los *Principia Mathematica*), *43.*
— s (de un sistema canónico), *221,* 223.
— s (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *40-41.*
— (de un sistema formal), *53,* 54, 74, 150, 278.
— s (del sistema P), *390. V.* clase
— s (de un sistema de tipo *LFG-R*), *v.* clase.
— s (del sistema *LFK*), *v.* clase.
— s (de una teoría deductiva-intuitiva), *55.*
— s de *LFG, 110.*
— s de *LFN, 181.*
— s (de *LFN-G*), *189.*
— s (de *LFN-V*), *262.*
— s (de *LFP-*ω), *311.*
— s (de *LFP-*ω*N*), 312.
— s (de *LFT*), *267,* 268.
— no-lógico, *232 (n. 74).*
Axiomática, *v.* método, parte.
— de contenido, *34.*
— de los conjuntos, *43.*
— de la teoría de los conjuntos, *74,* 182. *V.* sistema.
— abstracta, *51.*
— formal, *52.*
— intuitiva, *51.*
Axiomatizado, *v.* teoría.

Base, *v.* cláusula, lengua, nombre.
— de un sistema normal, 225.
Basic Logic, *323 (n. 77).*
Básico, *v.* lógico.
Bernays model, 393 (n. 32).
Bien formado, *v.* fórmula.
— ordenado, *v.* conjunto.
Binormal, *v.* conjunto.
Binormalidad, *225.*

Calculable, *207 (n. 9).*
Cálculo, *57,* 58. *V.* axioma, fórmula, procedimiento, regla, símbolo.
— de la conversión-λ, *76,* 170-171, 201, *202. V.* cálculo *LF-*λ, formalismo de la conversión-λ.
— restringido de las funciones, 372. *V.* problema. *V.* cálculo funcional restringido.
— de los predicados de primer orden, 77.
— restringido de los predicados, 77 *(n. 43).*
— de un valor (en la teoría de las funciones recursivas generales de KLEENE), *89.*
— funcional de primer orden, *77-78,* 172.
— funcional restringido, 171, *172. V.* constante, predicado, proposición, variable.
— *LF-*λ, *202. V.* abstracción, aritmetización, armadura, expansión, fórmula, invariante, paréntesis, reducción, regulado, sustitución, símbolo, variable. *V.* formalismo de la conversión-λ.
Calculus, *v.* predicate.
Campo de interpretación, *61, 299,* 307, 308, 332, 354-355, 402 (n. 57), 403 (n. 60). *V.* distribución, función, parte, realizable, saturado, sistema, válido, verdadero.
— — numerable de *LFP-*ω, *310,* 311. *V.* realizable.
— — numerable, *299,* 302, 303.
— — no numerable, *299.*
— — equivalente, *402,* 403-404.
— — finito, *299.*
— — general, *309,* 310, 311, 312, 355. *V.* clase, proposición, realizable, válido.
— — natural, 401, 402, 403, 403 (n. 58 y n. 60).
— — no natural, *402.*
— — regular, 308, *309,* 355, 403 (n. 58). *V.* clase, proposición, realizable, válido.
— — vacío, *299.*
— — no vacío, *299.*
Cifra, *v.* consecuencia, variable.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.1.
— (de *LFG*), 102, *105,* 106, *108,* 367-368 (n. 5).
— (de *LFN*), 184.
— (de *LFN-G*), *188,* 190, 191, 192.
— (de *LFP-A* y de *LFP-*A_m), *394,* 394 (n. 38), 396. *V.* imagen-HB.
Canonicidad, 328, 330. *V.* nivel.
Canónico, *v.* componente, sistema, término.
Carácter circular (de la proposición $\mathfrak{Z}^*$), 144.
Cardinal, 307. *V.* número.
Categoría de expresiones (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.

Categoría de expresiones (del sistema P), *367*.
— de objetos de la lengua formalizada (estudiada), *v.* nombre.
Categoricidad (de un sistema), *71*, 312, 332.
— absoluta (de un sistema), *71*.
— relativa (de un sistema), *71-72*.
Categórico, *v.* sistema.
— relativamente a una clase de objetos, *v.* sistema.
— en sentido absoluto, *v.* sistema.
"Categórico" en un sentido absoluto, *v.* sistema.
Cero, IN 1.31.
Cerrado, 196 (n. 48). *V.* clase, cuerpo, dominio, proposición.
— con relación a la aplicación de la regla de la consecuencia, *v.* clase.
— con relación a la aplicación de las reglas de derivación de un sistema *LF*, *v.* clase.
— con relación a la aplicación de las reglas Re_1 y Re_2, *v.* clase.
— con relación a la aplicación de la regla *Re-C*, *v.* clase.
— con relación a una operación, *v.* clase.
— con respecto a una relación, *v.* clase.
Cinta (de una máquina-T), *205*.
Circular, *v.* carácter, enunciado, máquina-T, propiedad, razonamiento.
Clase, 307. *V.* pertenecer, conjunción, función, lógica, nombre, relativo, reunión, signo, teoría.
— de los axiomas (del sistema P), 370-371.
— de los axiomas (de un sistema de tipo *LFG-R*), *160*.
— de los axiomas (del sistema *LFK*), *157*.
— de las componentes (de un sistema formal), *55*.
— de enunciados, *v.* lógica.
— de conjuntos, *v.* conjunto.
— numerable de conjuntos, 330.
— de los conjuntos recursivamente enumerables, *227*. *V.* problema.
— recursivamente enumerable de enteros, *92*, 324.
— de enteros recursivamente enumerable (de manera primitiva o general), *91*.
— recursiva de enteros (primitiva o general), *90*.
— de las funciones recursivas, *156*.
— de las fórmulas (del sistema P), *369*.
— no-contradictoria (de fórmulas del sisma P), 372.
— ω-no-contradictoria (de fórmulas del sistema P), *370*, 371, 372.
— de las fórmulas demostrables (del sistema P), *368-369*.
— de objetos, *v.* categórico.
— de objetos definida de manera inductiva, *203 (n. 4)*.
— de ordinales, *406*.
— de ordinales del orden $\nu + 1$, *406*.
Clase de proposiciones, *v.* definible, conjunto, proposición.
— coherente de proposiciones, *267*, 274.
— completa de proposiciones, *267*, 274.
— definible de proposiciones, 280.
— de proposiciones cerrada con relación a la aplicación de la regla de la consecuencia, *270*.
— de proposiciones cerrada con relación a la aplicación de las reglas de derivación de un sistema *LF*, 273, *274 (n. 34)*, 278.
— de proposiciones cerrada con relación a la aplicación de las reglas Re_1 y Re_2, *169*, 273-274.
— de proposiciones cerrada con relación a la aplicación de la regla *Re-C*, *170*, 273-274.
— de proposiciones realizable en un campo de interpretación, *299*, 302-303.
— recursiva de proposiciones, 279, 281.
— de proposiciones representable en un formalismo, *268*.
— de proposiciones representable en *LFT*, *268-269*.
— de proposiciones de un formalismo, *v.* definible, indecidible.
— numerable de proposiciones de la lógica de los predicados de primer orden, *299*.
— de las proposiciones derivables de una lógica aplicada de los predicados de primer orden, 302.
— de las proposiciones (de un sistema formal), *54*.
— ω-coherente de proposiciones de un sistema, *278*, 279.
— cerrada de proposiciones de un sistema, *278*.
— incompleta de proposiciones de un sistema, *269*, 276-277.
— de las proposiciones derivables de un sistema, 376. *V.* indecidible.
— de las proposiciones verdaderas de un sistema, *66*.
— de las proposiciones verdaderas de un sistema *LF* (relativamente al predicado *Vri* de este sistema), 274.
— de proposiciones de *LFG*, *v.* indecidible.
— de las proposiciones de *LFG*, *278*.
— coherente de proposiciones de *LFG*, 278.
— ω-coherente de proposiciones de *LFG*, 279.
— completa de proposiciones de *LFG*, *278*, 279.
— cerrada de proposiciones de *LFG*, 279. *V.* derivable, proposición.
— recursiva de proposiciones de *LFG*, 279.
— de las proposiciones derivables de *LFG*, *115*, *278*, 279.
— de las proposiciones no derivables de *LFG*, *104-105*.

Clase de las proposiciones verdaderas de *LFG*, *278*.
— coherente de proposiciones de *LFP-ω*, *311*.
— de proposiciones realizable de *LFP-ω*, *311*, 312.
— de proposiciones de *LFP-ω* realizable en un campo de interpretación numerable, 311-312.
— de proposiciones de *LFP-ω* realizable en un campo de interpretación (regular o general), *310*, 311, 312.
— de proposiciones de *FLP-ω* realizable en un modelo de *LFP-ω*, 310.
— de proposiciones de *LFT*, *v.* indecidible.
— de las proposiciones de *LFT*, *268*.
— coherente de proposiciones de *LFT*, *267*, 281-282, 284, 285 (n. 72), 286 (n. 74).
— ω-coherente de proposiciones de *LFT*, 279, 280, 284, 285, 285 (n. 68 y n. 69), 286 (n. 74).
— completa de proposiciones de *LFT*, *267*, 279, 280, 281, 284, 285.
— definible de proposiciones de *LFT*, 281, 284, 285 (n. 68 y n. 71).
— recursivamente enumerable de proposiciones de *LFT*, 284, 285 (n. 68, n. 71 y n. 72), 286 (n. 74).
— cerrada de proposiciones de *LFT*, 279, 280, 281, 282, 284, 285, 385 (n. 69, n. 71 y 72), 386 (n. 74).
— incompleta de proposiciones de *LFT*, 270, 272-273, 284.
— recursiva de proposiciones de *LFT*, 279-280, 284, 285 (n. 68).
— de las proposiciones de *LFT* pertenecientes a la clase *Cl-Vr*, 285 (n. 69, n. 71 y n. 72).
— de las proposiciones derivables de *LFT*, *268*, 270, 289.
— de las proposiciones verdaderas de *LFT*, *268*, 276-277.
— de las proposiciones de *LFT-Ω*, *v.* indecidible.
— de las proposiciones verdaderas de *LFT-Ω*, *274*.
— de las proposiciones decidibles (en un sistema de tipo *LFG-R*), *168*.
— de las proposiciones derivables (en un sistema de tipo *LFG-R*), 159-160, *168*.
— de las proposiciones indecidibles (en un sistema tipo *LFG-R*), *168*.
— de las proposiciones inderivables (en un sistema tipo *LFG-R*), *168*.
— de los sistemas canónicos, *v.* problema.
— de los sistemas normales, *v.* problema.
— de los sistemas normales numerales, *v.* problema.
— de los teoremas (de un sistema formal), *55*.
Clase definible en una clase de proposiciones, *270-271*, 281-282.
— definible en un formalismo, *270-271*.
— definible en *LFT*, *270-271*.
— definible recursivamente (en el sentido de GÖDEL), *371 (n. 21)*, 371, 372.
— (cualquiera) recursivamente enumerable (de manera primitiva o general), *91*, 159, 168, 215, 216, 226-227.
— cerrada con relación a una operación, *114*.
— cerrada con respecto a una relación, *114*, 169.
— recursiva (en el sentido de GÖDEL), 370, *370 (n. 18)*, 372.
— recursiva (cualquiera), 90, 91, 157, 168, 203 (n. 4), 215-216, 226-227, 237.
— parcialmente recursiva, 93.
— *Cl-Rp*, *v.* miembro.
— *Cl-Vr*, *267-268*, 270, 271, 285. *V.* pertenecer, definible, conjunto.
Clásico, *v.* lógica, teoría, tipo.
Cláusula básica de una definición inductiva, *203 (n. 4)*.
— inductiva de una definición inductiva, *203 (n. 4)*.
Cociente exacto de α por β, 93.
Coherencia de la aritmética clásica, 199.
— (de un sistema), *67*, 78, 79, 255, 316, 329, 332, 332 (n. 23), 379, 401. *V.* demostración.
— (de un sistema de tipo *LFG-R*), *179*.
— (para el sistema *LFK*), *158*.
— de *LFG*, *178*, 179.
— de LFG_1, 180.
— de LFG_n, *180*.
— de LFG_ν, *180*.
— de $LFG_{\omega+n}$, *180*.
— de *LFG-Ω*, *180*.
— de *LFH*, *186-187*.
— de *LFN*, *181*, 183-184, *185*, *186*.
— de *LFN-G*, *190*, 195.
— relativa, *v.* demostración.
— semántica (de un sistema), *68*, 302.
— sintáctica (de un sistema), *67*, 302.
— (ω-coherencia de un sistema), 67, 68, 254, 314, 379.
— (de un sistema) en el sentido fuerte, *212*.
Coherente, 370 (n. 15), IN 2.14.2.1.6. *V.* clase, sistema.
— en el sentido semántico, *v.* sistema.
— en el sentido sintáctico, *v.* sistema.
— en el sentido fuerte, *v.* sistema.
— Ω-coherente, *v.* sistema.
Combinador, 318, *318 (n. 65)*.
— primitivo, *318 (n. 65)*.
Combinatorio, *v.* lógica, saturación.
Compleción, plenitud, *70 (n. 9 y n. 11)*.
Complejo, *v.* proposición.
Complemento, *v.* "lattice".
Completo, *v.* clase, descripción, conjunto, inducción, modelo, sistema, teoría.

Completo en el sentido sintáctico, *v.* sistema.
Componente de una lógica combinatoria, *v.* variable.
— (de una lógica combinatoria) introducida por vía de definición, IN 1.46.
— (de una lógica combinatoria) correspondiente al operador de implicación, IN 2. 61.3.1.
— (de una lógica combinatoria) correspondiente al operador de negación, IN 2. 61.3.2.
— (de una lógica combinatoria) correspondiente a operadores lógicos, IN 2.61.3.
— particular (de una lógica combinatoria), IN 2.61.4.
— primitiva (de una lógica combinatoria), IN 1.46.
— no primitiva (de una lógica combinatoria), IN 2.62.1.
— primitiva (de un sistema canónico), *221.*
— de un sistema formal, *53,* 320, 345, 345 (n. 29). *V.* clase, regla.
— primitiva (de un sistema formal), *53,* 55, 345 (n. 29), 346.
— (de *LFG*) introducida por vía de definición, *109.*
— primitiva (de *LFG*), *107,* 117.
— primitiva (de *LFN-V*), *262.*
— canónica, 322 (n. 73), *328,* 328 (n. 91).
Computable, *207 (n. 9).*
Común, *v.* divisor, múltiplo.
Concepto de *verdad* relativamente a un sistema formal *LF, 186,* 323. *V.* formalizar. *V.* teoría de la verdad.
— absoluto relativamente a un modelo, 306.
— absoluto con relación a una familia de modelos, 305.
Condición de tipo semántico, *152.*
Configuración de conjunto (de una máquina-T), *206.*
Conjunción, IN 2.22.2.1.
— (en la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *101.*
— de clases, *38.*
— (en la lógica de las proposiciones), 39.
— (de *LFG*), *109-110.*
Conjunto, *42,* 43, 44, 307, 312, 317-318, 330, 392, 393. *V.* axiomático, clase, configuración, expresión, nombre, número, representar, separabilidad, no separabilidad, separar, teoría.
— de elementos, *v.* enumerar.
— de elementos de un sistema, *v.* definir.
— de elementos definible en un formalismo, *296,* 297.
— de todos los conjuntos, *34.*
— de los conjuntos de enteros, *347,* 348.
— de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, *34.*
— de enteros, 347, 348, 353, 354, 358. *V.* problema.
Conjunto de los enteros, *v.* tipo.
— de enteros definible (en el sentido de MOSTOWSKI), *257.*
— de enteros efectivamente enumerable, 349.
— recursivamente enumerable de enteros, *92-93,* 225-226, 227, 238-239. *V.* problema.
— de enteros recursivamente enumerable (de manera primitiva o general) *92-93. V.* más arriba.
— recursivo de enteros, 226-227.
— de enteros positivos, *304,* 357.
— ω-no contradictorio de fórmulas (del sistema P), *370.*
— de KREISEL, *394.*
— de todos los números cardinales, *34.*
— de todos los números ordinales (transfinitos) ordenados por orden de magnitud, *34.*
— reunión de dos conjuntamente En_1 y En_2, 391, *391 (n. 21).*
— de series de enteros, *356-357.*
— perteneciente a cierta clase *Cl, v.* separado.
— binormal (relativamente a un grupo de letras), *225.*
— completo, *239.*
— s que no se contienen a sí mismos como elementos, *v.* más arriba.
— definible en una clase de proposiciones, *270-271.*
— definible en un formalismo (mediante la clase *Cl-Vr*), *270-271.*
— numerable, *83 (n. 71),* 297-298, 301, 347.
— no numerable, 297-298, 303, 353-354, 357, 362.
— disyunto (de otro conjunto), 390, *390 (n. 20).*
— recursivamente engendrado, *230.*
— recursivamente enumerable (de manera primitiva o general), *93,* 214, 220-221, 225, 226-227, 229, 230, 240, 349, 390, 391. *V.* clase.
— hiper-simple, *238-239.*
— normal (relativamente a un grupo de letras), *225.*
— ordenado, 405. *V.* tipo.
— bien ordenado, *405.*
— recursivo (primitivo o general), *91.*
— recursivo (general), 221, 225, 390-391.
— resoluble, *226-227.*
— s separables, *390.*
— s no separables (en el sentido de USPÉNSKIJ), *390-391,* 392.
— s efectivamente no separables, *390-391,* 392.
— s separados por un conjunto, *390.*
— s separados por un conjunto perteneciente a cierta clase, *390-391.*
— *En-Cv, v.* lógica.
Conmutativo, *v.* anillo.

Consecuencia, *v.* regla.
— inmediata, *114,* 150, IN 2.24.1.10. *V.* relación.
— inmediata (en el sistema P), 369. *V.* relación.
— inmediata (en un sistema de tipo *LFG-R*), *v.* relación.
— inmediata (en el sistema *LFK*), *v.* relación.
— inmediata en el *LFG, v.* proposición, relación.
Consecuente, *v.* proposición.
Consistency, *68 (n. 4).*
Constante, 76, 181, IN 1.2. *V.* función.
— individual (de la aritmética recursiva), *100.*
— sintáctica (para la aritmética recursiva), *101.*
— predicativa (del cálculo funcional restringido), 171-172.
— individual (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.1.
— funcional (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.12.
— individual (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.11.1.
— predicativa (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.13.
— individual (en un esquema de recursión), *86.*
— (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.32.2.
— sintáctica (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.23.2.
— lógica (de un sistema), *402.*
— extralógica (de un sistema), *402,* 403.
— individual (del sistema de PEANO), *35.*
— individual (en un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39.*
— (del sistema P), *367.*
— funcional de *LAI,* IN 2.21.3.1.
— individual de *LAI,* IN 2.21.1.1.
— predicativa (de *LAI*), IN 2.21.4.1.
— de *LFG, 104-105, 108.*
— funcional (de *LFG*), *108.*
— funcional σ (de *LFG*), 106.
— individual (de *LFG*), 106, 107, *108.*
— individual (de *LFG*) introducida por vía de definición, *109.*
— predicativa (de *LFG*), *106.*
— predicativa (de *LFG*) introducida por vía de definición, *109.*
— N_0 (de *LFG*), *111.*
— σ (de *LFG*), *111.*
— funcional (de *LFN*), *181,* 392.
— individual (de *LFN*), *181,* 392.
— predicativa (de *LFN*), *181,* 184.
— funcional (de *LFN-G*), *188.*
— funcional σ (de *LFN-G*), *189.*
— individual (de *LFN-G*), *188.*
Constante predicativa (de *LFN-G*), *188,* 189, 190, 191.
— N_0 (de *LFN-G*), 189.
— funcional (de *LFN-V*), *263.*
— individual (de *LFN-V*), *262.*
— predicativa (de *LFN-V*), *263.*
— N_0 (de *LFN-V*), *262.*
— σ (de *LFN-V*), *263.*
— funcional (de *LFP-A*), 392.
— individual (de *LFP-A*), 392.
— N_0 (de *LFP-*ω*N*), *312.*
— σ (de *LFP-*ω*N*), *312.*
— predicativa (de *LFR*), *172-173.*
— funcional, *105 (n. 23).*
— individual, 89, *105 (n. 23).*
— predicativa, *105 (n. 23).*
Constitutivo, *v.* símbolo.
Construcción, *v.* ley, regla.
Constructibilidad, *44.*
Constructividad, *65,* 181, 183, 196, 343, 361.
Constructivo, 357, 358, 361, 362, 363, 364. *V.* definir, demostración, interpretación, ordinal, parte, punto de vista, procedimiento, propiedad, regla.
Contenido, *v.* axiomático.
Continuo, 44. *V.* hipótesis, problema.
Convención de escritura (para *LAI*), IN 2.21.6.
— relativa a los paréntesis, IN 2.22.3.
Conversión, *204. V.* invariante.
Conversión-λ, 325. *V.* cálculo, formalismo.
Convertible, IN 2.24.2.1.5. *V.* fórmula.
Coordinación, *v.* función.
Corolario (de CHURCH), *212,* 348.
— de Gödel, *177,* 179, 180, 181-182, 183, 184, 195, 196, 199, 200, 331, 356, 387.
— del teorema de TURING, *218.*
Correspondencia de GÖDEL, *98,* 119 (n. 36), 137.
— cualquiera, *v.* asociado.
Corresponder al axioma de determinación, *v.* esquema.
— a los axiomas de PEANO, *v.* esquema.
— al axioma de reductibilidad, *v.* esquema.
— al operador de negación, *v.* componente.
— a operadores lógicos, *v.* componente.
— a propiedades del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), *v.* expresión.
— a una teoría elemental de los grupos, *v.* sistema.
— a la teoría clásica de los números, *v.* sistema.
Crisis de los fundamentos, *27.*
Criterio de decisión (para constante predicativa de *LFN-G*), 191.
— de verdad (en la interpretación de *LFN-C*), *197, 198.*
— de verdad para los enunciados aritméticos (de la aritmética recursiva), *101.*
Cruzado, *v.* recursión.

Cuadro auxiliar (para máquina-T), *206.*
— semántico, *v.* método.
Cualquiera, *v.* corresponder, elemento, enunciado, expresión, lengua, nivel, propiedad.
Cuantificador, *40,* 77-78, 245, 247-248 (n. 15), 258-259. *V.* axioma, variable.
— en el nombre de una variable, *40,* IN 2.22.1.5.
— de particularización, *40,* 258-259, IN 2.22.1.4.
— de universalización (del sistema P), *368 (n. 4).*
— de universalización, *40, 151,* 171, 172, 258-259, 323, 325, 325 (n. 82), IN 2.22.1.13. *V.* interpretación, esquema.
— de particularización (de *LFG*), *110.*
— de universalización (en *LFG*), *108,* 121-122. *V.* regla.
— (Θ), *v.* regla.
— (EΘ), *v.* regla.
Cuarto, *v.* tipo.
— tipo, *v.* variable.
Cuerpo, *v.* teoría.
— algebraico, *v.* teoría.
— algebraico cerrado, *v.* teoría.
— real cerrado, *v.* teoría.

Débil, *v.* sentido.
Decidible, 337, 353, 354, 357. *V.* proposición.
— en una lógica recursiblemente engendrada relativamente a *En-Cv, v.* proposición.
— en un sistema formal, *v.* proposición.
— en un sistema de tipo *LFG-R, v.* proposición.
Decimal, *v.* fracción.
Decisión, *v.* criterio, máquina, método, problema.
Decision problem, *71 (n. 13).*
Deducción, *v.* ley, teorema.
Deducible, *v.* ecuación.
Deductivo, *v.* saturación, teoría.
Definible, 80, 280, 295, *296,* 331, 352, *V.* clase, elemento, conjunto, función, predicado.
— en una clase de proposiciones, *v.* clase, predicado.
— en una clase de proposiciones de un formalismo, *v.* función.
— en un formalismo, *v.* clase, elemento, conjunto, predicado, relación.
— en un formalismo (mediante la clase *Cl-Vr*), *v.* conjunto.
— mediante una máquina de TURING, *v.* función.
— en el sistema P, *v.* relación.
— recursivamente, *v.* clase, relación.
Definición, *82,* 96. *V.* cláusula, introducido, operador, esquema.
Definición inductiva de una clase de objetos, *203 (n. 4).*
— no predicativa, *112.*
— recursiva, *88.*
Definido por un conjunto de objetos, *v.* predicado.
— en *LB, v.* objeto.
— de manera constructiva, *v.* modelo.
— de manera inductiva, *v.* clase, propiedad.
Definir un elemento de un sistema, *296.*
— un conjunto de elementos de un sistema, *296.*
Demostrabilidad, *401.*
Demostrable, 385. *V.* enunciado, fórmula.
Demostración, *v.* figura, teoría.
— de coherencia, 78, 79.
— de coherencia relativa, *200.*
— de no contradicción, *184,* 200, 367, 373.
— (de no contradicción) de ACKERMANN, *47,* 181, 182, 185.
— de no contradicción de la aritmética, 184, 188.
— (de no contradicción) de GENTZEN, *47, 188,* 190, 195, 198.
— (de no contradicción) de HERBRAND, *46,* 181, 182, 185.
— (de no contradicción) de VON NEUMANN, *47,* 181, 182, 185.
— de no contradicción (del sistema P), *373.*
— de FINSLER, *96.*
— de GÖDEL, 99, *102,* 133, 137, 152, 160, 346, 370, 375, 388, 389, 390.
— de MOSTOWSKI (del teorema de GÖDEL), *388.*
— por modelo directo, 188.
— por modelo indirecto, 188.
— (en una teoría deductiva intuitiva), *55.*
— metateórica, *65.*
— metateórica constructiva, *65.*
— metateórica no constructiva, *65.*
Derivabilidad, *150,* 151, 153, 158, 175, 257, 259.
— (de la proposición de GÖDEL), 134.
— en *LFG,* 114.
Derivable, IN 2.24.4.1.7. *V.* predicado, proposición.
— en LFG_1, *v.* proposición.
— en LFG_n, *v.* proposición.
— en LFG_{n+1}, *v.* proposición.
— en $LFG_{\omega+n}$, *v.* proposición.
— en *LFG*-Ω, *170,* IN 2.24.2.1.9. *V.* proposición.
— en *LFP-A, v.* proposición.
— en $LFP\text{-}A_m$, *v.* proposición.
— en *LFP*-ω, *v.* proposición.
— en *LFR, v.* proposición.
— en *LFT, v.* proposición.
— en LFT_1, *v.* proposición.
— en LFT_2, *v.* proposición.

Derivable en una clase cerrada de proposiciones de *LFG*, *v.* proposición.
— en un sistema, *v.* proposición.
— en un sistema de tipo *LFG-R*, *v.* proposición.
— en el sentido de ROSSER, IN 2.24.2.1.8.
— en *LFG*, 102. *V.* proposición.
Derivación, 96, 114, 123 (n. 46), 127, 128. *V.* reducción, reducida, regla.
— (en un sistema formal), *53-54*, 55, 346, 400. *V.* esquema.
— de *LFG*, 114.
— reductible (de *LFN-G*), *190*, *191*.
— diagonal (en *LFR*), *173*. *V.* índice.
— reducible, *185*.
— de $\mathfrak{V}^*$, *131*.
— I hasta *v*, *195*. *V.* número.
Descomposición en factores primos, *v.* teoría.
Descripción completa, *383*.
— incompleta, *383*.
Designación, *v.* noción.
Designar las expresiones de una lengua, *v.* nombre.
Desigualdad, *v.* teoría.
— funcional, *173*, *389*. *V.* predicado.
Detenerse en lo finito, *v.* razonamiento, recurrencia.
Determinación, *v.* axioma.
Determinado, *v.* expresión, predicado, proposición.
Diagonal, *v.* procedimiento.
Diferente de, *120 (n. 38)*.
Diferente de (en *LAI*), IN 2.21.4.1.2.
Directo, *v.* función, generalización, modelo.
Distribución, *v.* cuadro.
— (de los elementos de una serie seguida de enteros), *239*.
— de las variables (relativa a un campo de interpretación), *309*, 310.
Divisible por, *121 (n. 41)*.
— por 2, *90*.
— por *r*, *120 (n. 38)*.
— por *q*, *120 (n. 38)*.
— por *r* o por *q*, *120 (n. 38)*.
— por β_1 y por β_2, 93.
División, *v.* teoría.
— por 2, *v.* resta.
Disyunción, IN 2.22.2.2 y 2.24.1.2.
— (en la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *100*.
— (de la lógica de las proposiciones), 37.
— (en *LFG*), *108*, 122.
Disyunto, *v.* conjunto.
Doble negación, *v.* principio.
Dominio de individuos, *58*, 299, 305, 308, 309, 313, 356, 402.
— de individuos numerable, 299, 303.
— de individuos no numerable, 299.
— de individuos finito, 299.
— de individuos parcial, 301.
— de individuos vacío, 299.
Dominio de individuos no vacío, 299.
— de objetos, *v.* definido.
— de validez, *v.* predicado.
— cerrado, *196 (n. 48)*.
— funcional, *58*, 299, 308, 309.
— abierto, *196*, *196 (n. 48)*.
Doble, *v.* negación.
Dotado de sentido, *v.* expresión.
Derecha, *v.* asociación.
Dual, *v.* serie.

Ecuación, *v.* sistema.
Ecuación (en el sentido de KLEENE), 88, *89*, 90, 154-155.
Ecuación deducible de un sistema de ecuaciones, *89*, 90, 154-155.
Ecuación en G_1, G_2 ..., G_r, *89*.
Efectivamente, *v.* calculable, numerable, no saturable, no separable.
— calculable, 350. *V.* función.
— enumerable, *v.* conjunto.
— no saturable, *v.* sistema.
— no separable, *v.* conjunto.
Efectivo, *v.* procedimiento, no separabilidad.
Ejecución, *v.* órgano.
Elección, *v.* axioma.
Elemental, *v.* álgebra, función, fórmula, geometría, lógica, operación, predicado, proposición, teoría.
Elemento, *v.* asociar, conjunto.
— de un formalismo *LF*, *v.* relación.
— cualquiera (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— de una serie de enteros, *v.* distribución.
— de un sistema, *v.* definir, conjunto.
— (de un sistema *LF* y de una lengua LB_n) asociados por una interpretación, *73*.
— cualquiera de un sistema *LF*, *v.* interpretación, interpretar.
— de la teoría de los conjuntos absolutos relativamente a un modelo interno, *306*, 307.
— de *LFP-A*, *v.* imagen-HB.
— s asociados (por una correspondencia cualquiera), *73*.
— definible en un formalismo, *296*, 297, 332-333.
— unidad (de un grupo), *39*.
Eliminado por un operador de abstracción, *v.* variable.
Empirista, *48*. *V.* actitud.
Enésimo tipo, *v.* expresión, propiedad, signo variable.
Engendrado recursivamente, *v.* conjunto, lógica.
Enger, *v.* Engere Prädikatenkalkül.
Engere Prädikatenkalkül, *77 (n. 43)*.
Entero, 171-172, 173, 188, 314, 376, 392, IN 2.23.1.1. *V.* aritmética, clase, conjunto, función, número, predicado, propiedad, serie, teoría.

Entero asociado a una función recursiva general, 378.
Entscheidungsproblem, *71 (n. 13)*.
Enumerabilidad recursiva, *91*, 92, 168, 225.
— recursiva general sin repeticiones, *91*, 92.
— recursiva primitiva sin repeticiones, 92.
Enumerable, *v.* clase.
Enumeración, *v.* función.
Enumerar recursivamente (de manera primitiva o general) un conjunto de elementos, *91*.
Enunciado, *55*, 375-376, 383 (n. 26), 399-400, IN 1.3, Observación. *V.* clase, falsedad, representación, traducción, traducir, verdad.
— aritmético (de la aritmética recursiva), *101*, 171-172.
— aritmético falso (de la aritmética recursiva), *100*, *101*, *102*, 185.
— aritmético verdadero (de la aritmética recursiva), *100*, *101*, *102*, 185.
— de hecho, *383*, 383 (n. 26), 384.
— (de una lengua LB_n) representable (en un sistema *LF*), 73.
— de *LAI*, 262-263, IN 2.23.2.3.
— aritmético, *262-263*.
— circular, 147.
— demostrable, 385.
— falso, *55*, 229-230, 327.
— indecidible, 382-383.
— indemostrable, 383-384, 385.
— metamatemático, *137*.
— cualquiera, IN 2.28.
— verdadero, *55*, 229-230, 332, 355, 403-404.
Enunciativo, *v.* forma.
Equivalencia, IN 2.22.2.4.
— (en la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *100*.
— (de *LFG*), *109-110*.
Equivalente, *v.* campo, modelo, predicado, serie.
Erfülbar, 62 (n. 42).
Escritura, *v.* convención.
Esencial, *v.* no resolubilidad.
Esencialmente, *v.* no resoluble.
— no resoluble, *v.* teoría.
Especial, *v.* función.
Especie, *v.* número.
Estrictamente, *v.* constructivo.
— constructivo, *v.* metateoría, punto de vista.
Estudio semántico de un sistema, 261 (n. 2).
Esquema, *v.* lógica, método.
— para la adición, 263 (n. 11).
— de inducción, 185.
— de derivación (de la lógica de los predicados del primer orden), *263*.
— para la multiplicación, 263 (n. 11).
— para el cuantificador de universalización, 263, 267.
Esquema de axiomas (para un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *41*.
— de derivación (de un sistema formal), *53*. *V.* proposición.
— de axiomas (de *LFG*), *110*.
— de inducción (de *LFG*), *111*.
— de la lógica de las proposiciones (para *LFG*), *111*.
— (de *LFG*) para el cuantificador de universalización, *111*.
— (de *LFG*) correspondiente al axioma de determinación, *113*.
— (de *LFG*) correspondiente a los axiomas de PEANO, *111*.
— (de *LFG*) correspondiente al axioma de reductibilidad, *111*.
— de definición (de *LFN*), *181*
— de axiomas de *LFN-G*, *189*. *V.* proposición.
— recursivo de definición (de *LFN-G*), *189*.
— de recursión, *84*, 262. *V.* constante, función, variable.
— de recursión cruzada, *86*, *87*.
— de recursión indirecta, *86*.
— de recursión primitiva, *85*, *86*, 88, 152, 181, 182-183, 263 (n. 11), 369.
— de recursión simultánea, *86*, *87*.
— de sustitución, *88*, 369.
Etapa de reducción, *184*.
— de reducción (para *LFN-G*), *192*.
Exacto, *v.* cociente.
Exclusión, *v.* tercero.
Expansión (en el formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.2.3.
— (en *LF*-λ), *204*.
Explícitamente, *v.* definir.
— definido, *v.* predicado.
Exponenciación, *85*, 119.
— (en la aritmética recursiva), *100*.
— (en *LAI*), IN 2.21.3.1.9.
Expresar una propiedad metateórica, *v.* función, predicado.
Expresión, *v.* categoría, número, prefijo, sustitución, valor.
— (de una lengua), *383*, 383 (n. 25). *V.* designar, nombre.
— del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), *v.* nombre, variable.
— correspondiente a propiedades del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), *v.* variable.
— del primer tipo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.3.1.
— del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.3.
— dotada de sentido (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.3.
— funcional determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.

Expresión predicativa determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.
— representante de los conjuntos (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.5.
— de un sistema formal, *v.* significación.
— (del sistema *LFG*), *136.*
— del primer tipo (de *LFG*), *109.*
— del segundo tipo (de *LFG*), 116.
— del *n*-ésimo tipo (de *LFG*), *109,* 368 (n. 7).
— cualquiera de *LFG, 117-118.*
— funcional (de *LFN*), 392.
— funcional (de *LFP-A*), 392.
— algorítmica, *v.* nombre.
— dotada de sentido, IN 1.1.
— funcional, *115,* IN 2.25.3.
— metateórica, IN 1.1.
— predicativa, *116, 133,* 151, IN 2.25.3.
— sintáctica, IN 1.1.
Extensible, *v.* lógica.
Extensión, *v.* principio.
— de una teoría, *232. V.* más abajo.
— de un sistema, 391. *V.* más arriba.
Extensivo, *v.* infinito.
Externo, *v.* significación, estratificación.
Extra-lógico, *v.* constante.

Factor primo, *v.* descomposición.
Falsedad (de un enunciado), 400.
Falso, 59, 249, IN 2.24.2.1.10. *V.* enunciado, proposición.
— relativamente a un modelo de *LFP-A, v.* proposición.
Familia de modelos, *v.* absoluto.
Figura de demostración, *123 (n. 46).*
Finitista, *v.* procedimiento, razonamiento.
Finito, *v.* detenerse, campo.
Folgerungsmenge (*Flg*), *370.*
Forma, *v.* statement, teorema.
— de KALMÁR del teorema de GÖDEL, *389.*
— de KLEENE del teorema de GÖDEL, *251,* 255, 256, 257, 260, 351 (n. 50), 376, *378.*
— de KLEENE del teorema de CHURCH, *250,* 255, 256.
— de MOSTOWSKI del teorema de GÖDEL, 277-278, 280, 282, 284-285.
— de ROSSER del teorema de GÖDEL, 376, *378.*
— semántica del teorema de GÖDEL, *277.*
— de TARSKI del teorema de GÖDEL, *273,* 274, 284-285, 286-287, 288, 289.
— de WANG del teorema de KREISEL, 394, 395, 395 (n. 40).
— (de la lógica de las proposiciones), *38.*
— enunciativa, *383.*
— normal, 214, 224, 226-227. *V.* fórmula.
Formación, *v.* regla.
Formal, 341, 361, 364-365. *V.* axiomático, objeto, proposición, sistema, variable.
"Formal Beweis", *96 (n. 5).*
Formar parte de un campo de interpretación (o de un modelo), *v.* función.
Formalismo, *39 (n. 10), 47,* 48, 362, 363, 363 (n. 75). *V.* definible, elemento, proposición, relación, representable.
— de la conversión-λ, 318 (n. 65), IN 1.44, 2.14.15, 2.4. *V.* armadura, expansión, fórmula, operador, reducción, regla, signo, sustitución, símbolo, variable. *V.* cálculo *LF*-λ.
— de GÖDEL, IN 2.14.2.
— de HEYTING, *187,* IN 2.14.4.
— de KALMÁR, IN 2.14.13.
— de KLEENE, IN 2.14.5.
— de MYHILL, IN 2.14.6.
— de ROSSER, IN 2.14.3.
— de SHEPHERDSON para la teoría de los conjuntos, IN 2.14.1.
— de TARSKI, IN 2.14.14.
— s de la teoría clásica de los números, *181,* 392, IN 2.14.7.
— s de la teoría clásica de los números obtenidos a partir de *LFP*-ω, IN 2.14.12.
— *LFG, 104-105,* 171, 296. *V.* cifra, componente, conjunción, consecuencia, constante, derivabilidad, derivable, no derivable, derivación, disyunción, igualdad, equivalencia, expresión, implicación, indecidible, inderivable, irrefutable, morfología, negación, operador, operación, predicado, proposición, propiedad, cuantificador, refutable, esquema, signo, sustitución, serie, sistema, variable.
— *LFT, 313,* 268, 269, 270, 272, 274, 275, 276, 284, 289, 296. *V.* axioma, derivable, derivación, predicado, proposición, refutable.
— *LFT*-Ω, *274. V.* predicado, proposición.
— resoluble, *236,* 237. *V.* sistema resoluble en el sentido sintáctico.
Formalista, *49,* 334 (n. 24).
Formalizable en un sistema, *v.* lengua, teoría.
Formalización, *51,* 337, 339, 363, 404.
— de la aritmética, *68.*
— de las matemáticas, 74.
Formalizado, *v.* lengua, lógica, teoría.
Formalizar, *39 (n. 10).*
— en un sistema *LF* el concepto de *verdad* con relación a ese sistema, *186.*
— en un sistema *LF* la teoría de la verdad relativa a ese sistema, 329.
— en *LFP-A* la noción de *verdad* relativa a *LFP-A*$_m$, *396,* 397.
— en *LFP-A* la noción de *designación* relativa a *LFP-A*$_m$, *398,* 400.
Fórmula bien formada de un cálculo, *57.*

Fórmula bien formada (del cálculo *LF*-λ), *203*, 210 (n. 19), 214, 224, 226-227, 348.
— (del formalismo de la conversión-λ), *210 (n. 19)*. *V.* armadura.
— de una variable (del formalismo de la conversión-λ), *v.* armadura.
— bien formada (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.1. *V.* variable.
— (del sistema P), 368 (n. 7). *V.* clase, demostración, conjunto.
— demostrable (del sistema P), *v.* clase.
— elemental (del sistema P), *368*.
— (de *LF*-λ) en forma normal, *204*.
— (de *LF*-λ) convertible en otra, *204*.
Fracción decimal, IN 2.23.2.2.
Fuerte, *v.* sentido.
Función, 202, 319, 320. *V.* aplicación, argumento, asociado, lógica, proposición, representación.
— de ACKERMANN, *87*, 90, IN 2.21.3.1.4.
— s auxiliares de ACKERMANN, *87*, IN 2.21.3.1.5, 2.21.3.1.6, 2.21.3.1.7.
— de *adición*, 171, 172, 231, 232, 233, 371.
— de *n* argumentos, 90.
— elemental de la aritmética, 88. *V.* más abajo.
— (de la aritmética intuitiva), IN 1.31.
— elemental (de la aritmética recursiva), *100*.
— de BERRY, relativa a un sistema, *298 (n. 5)*.
— de BERRY, relativa a un sistema *LF*, *298 (n. 5)*, 332 (n. 23), 352 (n. 55).
— de coordinación, *158*, IN 2.24.1.1.
— de enteros, 325, 326, 350.
— de enumeración, IN 2.24.1.3.
— de GÖDEL, *98*, IN 2.25.4.21.
— directa de GÖDEL, *98*, IN 2.25.4.21.
— inversa de GÖDEL, *98*, IN 2.25.4.22.
— de interpretación, *60*, 300, 309, IN 1.37.1, 2.27.1.
— para interpretación, IN 2.27.
— de KALMÁR, 350, *389 (n. 11)*.
— de KLEENE, *154*, IN 2.24.1.4.
— (de una lengua LB_n) representable (en un sistema *LF*), *73*, 262.
— (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— *sucesor* (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.11.1, 2.31.1.12.
— de *multiplicación*, 171, 172, 232, 233, 371.
— recursiva de números enteros, *369*.
— formando parte de un campo de interpretación (o de un modelo), IN 2.27.2.
— (en un esquema de recursión), *86*.
— de selección, *88*, 124.
— de selección sobre una serie (de cifras) M-definible, 217 (n. 52), IN 2.24.1.9.
— abreviada de sustitución, *125*, 268-269, 376, 380, 396.
Función especial de sustitución, IN 2.24.1.8.
— (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39*.
— *sucesor* (del sistema P), *368 (n. 4)*.
— de *LAI*, IN 2.21.3, 2.23.1.2, 2.23.2.1.
— de selección (en *LAI*), IN 2.21.3.1.12.
— *constante* (de *LAI*), IN 2.21.3.1.8.
— *sucesor* (en *LAI*), IN 2.21.3.1.11.
— (perteneciente a una lengua formalizada), IN 1.42.2.
— aritmética elemental, 85. *V.* más arriba.
— asociada a un sistema de ecuaciones, *155-156*.
— efectivamente calculable, 207 (n. 9), 208, 348, 348 (n. 35).
— (expresando una propiedad metateórica), IN 2.24.1.
— definible en una clase de proposiciones de un formalismo, *280*, 281.
— definible mediante una máquina de TURING, *207 (n. 9)*.
— M-definible, 201, 202, 205, *207*, 208, 215, 216 (n. 49), 221.
— λ-definible, 201, 202, 204, *205*, 207, 208, 214.
— proposicional, *40*.
— recursiva, *84*, 119, 120, 124, 155, 210, 215, 216, 224, 226, 227, 263 (n. 11), 369 (n. 12). *V.* clase, nivel, teoría.
— recursiva general, *89*, 90, 92-93, 182, 207, 208, 209, 210, 215, 221, 378. *V.* asociado, teoría.
— parcialmente recursiva, *93*, 207, 208, 243-244, 390-391, 392.
— recursiva primitiva, *88*, 100, 207, 263, 369 (n. 12).
— representativa de una clase, *90*.
— representativa de un predicado, *90*, 249.
— sintáctica, IN 2.25.4.
— *constante*, *88*, 124, 369.
— *sucesor*, *85*, 88, 124, 202, 313, 369, 398. *V.* sucesor de.
— σ, 263 (n. 11).
— *Min*, *100*, 180 (n. 22). *V.* operador.
— +, 263, 263 (n. 11).
— ×, 263, 263 (n. 11).
Funcional, *v.* abstracción, cálculo, cálculus, constante, dominio, expresión, desigualdad, variable.
Funcionalidad, *v.* teoría.
Functional calculus of first order, 77 (n. 43).
Fundamental, *v.* hipótesis, lema, signo.
Fundamento, *v.* crisis, problema, investigación.
Fundamentos de las matemáticas, *34*.

Generador (de un semigrupo), *235*.
General, *v.* campo, conjunto, enumerable, enumerar, hipótesis, lengua, modelo, principio, recursivo, sentido.
Generalización, *v.* operación.

Generalización de CHAUVIN (del teorema de GÖDEL), *388*.
— de KALMÁR (del teorema de GÖDEL), *388*.
— directa del teorema de GÖDEL, *149*.
— semántica del teorema de GÖDEL, 270, *271*, *272*, 276, 332.
— del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM, *311*.
Geometría elemental, 237.
— proyectiva abstracta, *v.* teoría.
— proyectiva real, *v.* teoría.
Given, *v.* given domain.
— domain, *v.* valid.
Gödeliano, *v.* lógica, sistema.
Grado de insolubilidad, 236, 237-238. *V.* problema.
— de insolubilidad de un problema insoluble, 237, 238, 239.
— de insolubilidad de un problema insoluble inferior al de otro problema insoluble, *v.* problema.
— maximum de insolubilidad en el sentido absoluto, *240*.
Grande, *v.* divisor.
Gültig, *62 (n. 10)*.

Hecho, *v.* enunciado.
Hipersimple, *v.* conjunto.
Hipótesis general del continuo, *200 (n. 54)*. *V.* más abajo.
— generalizada del continuo, 270-271. *V.* más arriba.
— fundamentales del teorema de GÖDEL, *149*.
Homomorfismo, *67*.
Horizonte (del pensamiento matemático), *362*, 364, 365.

Idea primitiva (de un sistema formal), *54*.
Igual (en la aritmética recursiva), *100*. *V.* grande.
— a, *120 (n. 38)*.
— a (en *LAI*), IN 2.21.4.1.1. *V.* grande, pequeño.
Igualdad, 314-315. *V.* predicado, relación.
— (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.3.1.
— (en *LFG*), 109.
Imagen-HB de una cifra de *LFP-A*, 396.
— de un elemento de *LFP-A*, *393*.
— de $=$, IN 2.31.1.13.2.
— de $\in$, IN 2.31.1.13.4.
Inclusión, *v.* relación.
Incompleto, *v.* clase, descripción, lógica, teoría.
Incorrecto, *v.* teoría.
Indecidible, *v.* enunciado, problema.
— en una clase de proposiciones (de un formalismo dado), *v.* proposición.
— en la clase de las proposiciones derivables de un sistema, *v.* proposición.
— en una clase de proposiciones de *LFG*, *v.* proposición.
Indecidible en una clase de proposiciones de *LFT*, *v.* proposición.
— en una clase de proposiciones de *LFT*-Ω, *v.* proposición.
— en una lógica recursivamente engendrada relativamente a *En-Cv*, *v.* proposición.
— en un sistema de tipo *LFG-R*, *v.* proposición.
— (en un sistema formal), *v.* proposición.
— en *LFG*, *v.* proposición.
— en LFG_1, *v.* proposición.
— en LFG_n, *v.* proposición.
— en $LFG_{\omega+n}$, *v.* proposición.
— en *LFG-R*, *v.* proposición.
— en *LFG*-Ω, *v.* proposición.
— en *LFK*, *v.* proposición.
— en *LFP-A*, *v.* proposición.
— en *LFR*, *v.* proposición.
— en *LFT*, *v.* proposición.
— en LFT_1, *v.* proposición.
Indemostrable, *v.* enunciado.
Inderivabilidad (de una proposición), *96*, 104, 346-347.
— (de la proposición $\mathfrak{V}^*$), *129*.
Inderivable, *v.* predicado.
— en un sistema de tipo *LFG-R*, *v.* proposición.
— en *LFG*, *v.* proposición.
— en *LFG-R*, *v.* proposición.
Indeterminada, IN 1.46.
— (en el sentido de CURRY), *318*.
Indice de una derivación diagonal (en *LFR*), 173-174.
Indirecto, *v.* modelo, recursión.
Individuo, *v.* dominio, representar, símbolo.
— (de la aritmética intuitiva), IN 1.31.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.
— de *LAI*, IN 2.21.1, 2.23.2.1.
— (perteneciente a una lengua formalizada), IN 1.42.1.
Individual, *v.* constante, función, variable.
Inducción, *v.* principio, razonamiento, regla, esquema.
— completa, *182*.
— estructural, *v.* razonamiento.
— transfinita, 169, 194, *405*. *V.* principio.
Inductivo, *v.* cláusula, definición, definir.
Inextensible, *v.* sistema.
Inferior, *v.* grado.
Infinito en acto, *196*.
— actual, *44*, 364-365. *V.* punto de vista.
— extensivo, *v.* principio.
— potencial, *44*, *196*, 357, 364-365.
Inmediato, *v.* consecuencia.
Implicación, 328, 330, IN 2.22.2.3, 2.24.1.5. *V.* operador, operación.
— (en la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *100*.
— (de la lógica de las proposiciones), *37*.
— (de *LFG*), *110*.

Impredicable, *322 (n. 73)*.
Insolubilidad, *v.* grado.
Insoluble, *v.* problema.
Interno, *v.* limitación, modelo, significación, estratificación.
Interpretación (en el sentido de KEMENY), *402 (n. 57)*.
Interpretación, *v.* campo, elemento, función, relativo, relativamente, saturado.
— (en una lengua LB_n de un elemento cualquiera de un sistema *LF*), *73*.
— (del cuantificador de universalización de un sistema), *151*.
— (del operador de implicación de un sistema), *150-151*.
— (del operador de negación de un sistema), *150*.
— (del operador de negación de un sistema *LFK*), 157.
— de un sistema, 57, 58, 73, 342, 343.
— del sistema *LFN, 185, 186*.
— de *LFH, 186*.
— constructiva (de *LFN-C*), 197. *V.* criterio.
— isomórfica, *57*.
Interpretar (un elemento cualquiera de un sistema *LF* en una lengua LB_n), *73*.
— una teoría en otra (en el sentido de TARSKI), *231*.
Introducido como abreviatura, *v.* signo.
— por vía de definición, *v.* componente, constante, operador.
Intuición, 44, 337, 339, 340 (n. 26 bis), 361, 362, 363 (n. 75).
Intuicionismo, *44*, 48.
Intuicionista, *44*, 334 (n. 24). *V.* lógica, razonamiento.
Intuitivo, 341, 361, 364-365. *V.* aritmética, axiomática, teoría.
Invariante de conversión (de *FL*-λ), *v.* problema, sistema.
Inverso, *v.* función.
Inversión, *75*.
Investigaciones sobre los fundamentos, *33*.
Irrefutable en *LFG*, *v.* proposición.
— en *LFG-R*, *v.* proposición.
Isomorfo, *v.* modelo.
Isomórfico, *v.* interpretación.
Isomorfismo, *67*.
Izquierda, *v.* asociación.

Konsistent, *68 (n. 4)*.

Lattice arbitraria, *v.* teoría.
— modular, *v.* teoría.
— modular de complemento, *v.* teoría.
Lectura, *v.* órgano.
Lema de GÖDEL, *123*, 143, 152, 271-272, 280-281, 370.
— de KLEENE, *155*, 156, 214, 348, 351 (n. 49).
— de KREISEL, 391, 392.
Lema de ROSSER, *376*.
— de TARSKI, *268*, 269, 270, 281, 286, 289, 333, 350, 351 (n. 50).
— fundamental de la teoría de los predicados de KLEENE, *242*.
— de WANG (relativo al sistema de *LFP-A*), 392, *393*.
Lengua, 81-82, 84. *V.* expresión, traducción, traducir.
— de base, *64*, 72, 99, IN 1.1, 2.11.2.2. *V.* operación.
— objeto, *63*.
— formalizable (en un sistema), *73*.
— formalizada, *39 (n. 10)*, 376, IN 1.1. *V.* pertenecer, constante, elemento, función, individuo, nombre, objeto, operación, predicado, proposición, propiedad, serie, sintaxis, término, variable.
— formalizada de tipo clásico, IN 1.41, 2.3. *V.* categoría, cifra, constante, igualdad, expresión, función, individuo, proposición, propiedad, representar, signo, símbolo, término, variable.
— formalizada en general, IN 2.13.
— formalizada particular, IN 2.14.
— cualquiera, *v.* nombre.
— *LB*, *v.* definir, objeto, operador, símbolo, variable.
— LB_n, *v.* enunciado, función, interpretación, interpretar, operación, predicado, representación, representar.
Lenguaje no formalizado, 337-338, 400-401.
— objetividad, *344-345*, 356-357, 359.
— vivido, 358, 361.
Letra, *v.* grupo.
Lexicográfico, *v.* orden.
Ley de construcción, *53*.
— de deducción, *53*.
Libre, *v.* variable.
Ligado, *v.* variable.
Limitación de tipo semántico, 277.
— interna, *31*.
Límite de una serie de ordinales, *v.* número, ordinal.
Lógica, *v.* constante, operador, operación, sistema, teoría.
— de las clases, *38*.
— de los predicados, *39*, 74. *V.* proposición.
— de los predicados de primer orden, 77, 78, 79, 106, 152, 181, 189, 213, 214, 219, 220-221, 237, 299, 302, 303, 307, 308, 310-311, 313, 367. *V.* axioma, proposición, esquema, variable.
— aplicada de los predicados de primer orden, *302*, 303, 304, 305-306, 392, 395-396. *V.* proposición.
— de los predicados de segundo orden, *78*. *V.* más abajo.
— de los predicados de segundo orden, 307, 308, 309. *V.* proposición, variable. *V.* más arriba.

Lógica de los predicados de tercer orden, *78*.
— de los predicados de orden ω, *78*, 307, 308-309, 311-312.
— de los predicados aplicada de orden ω, 311, 354, IN 2.14.11.
— de los predicados aplicada, 220, IN 2.14.9.
— elemental de los predicados, 75.
— de las proposiciones, *37*, 39, 74, 75, 77, 78, 189, 317, 328. *V.* axioma, implicación, disyunción, modelo, operador, proposiciones, regla, esquema, teorema, variable.
— de las relaciones, 43.
— no constructiva de ROSSER, *168*. *V.* sistema no constructivo de ROSSER.
— de esquemas, *74*.
— clásica, *75*.
— combinatoria, 74, *75*, 295, 318, 321, 328, 332-333, 356, IN 1.46, 2.6. *V.* aplicación, componente, predicado, proposición, regla, símbolo.
— combinatoria pura *318 (n. 65)*.
— no constructiva, *168*, 256, 257, 258, 273, 276. *V.* sistema no constructivo.
— recursivamente engendrada (relativamente al conjunto *En-Cv)*, *229*, 230. *V.* decidible, indecidible.
— extensible (relativamente a una clase de enunciados), *230*.
— formalizada, *34*.
— gödeliana relativamente a (una función) *F*, *388*.
— incompleta, *230*.
— intuicionista, 74, 75.
— ordinal, *170*, 237-238, 256, 257, IN 2.41.8.
— simbólica, 230.
Logicismo, *43*.
Logicista, *47*.
Logística, 36.

Magnitud, *v.* conjunto.
— abeliana, *v.* teoría.
Mando, *v.* órgano.
Máquina, *216 (n. 50)*, 218. *V.* nombre, número-D, cinta.
— de decisión, *216*, 217.
— de TURING, *205*, 239. *V.* definible.
— universal, *206*.
Máquina-T, *205*, 216, 348-349. *V.* configuración, órgano, programa, cinta, situación, cuadro.
— circular, *206*.
— no circular, *206*. *V.* número-D.
Matemática, 28. *V.* fundamento, formalización, pensamiento, proposición, teoría.
Mathematica, v. Principia.
Máximo común divisor, *v.* teoría.
Maximum, *v.* grado.
Mayor que (en la aritmética recursiva), *100*.
— — (en *LAI*), IN 2.21.4.1.3.
Mayor o igual que (en la aritmética recursiva), *100*.
— o igual que (en *LAI*), IN 2.21.4.1.5.
M-definible, *v.* función, continuación.
Memoria, 205. *V.* órgano.
Menor que (en la aritmética recursiva), *100*.
— — (en *LAI*), 232, IN 2.21.4.1.4.
— o igual que (en *LAI*), IN 2.21.4.1.6.
Mentiroso, *v.* paradoja.
Meta I, v. sistema.
Metalengua, *63*, 81-82, 84, 96-97, 98, 375-376.
Metamatemática, 28, *45*, 334-335. *V.* enunciado.
Metateorema, *64*.
Metateoría, *64*, 336, 344.
— estrictamente constructiva, *99*.
Metateórica, *v.* demostración, expresión, objeto, operación, propiedad, razonamiento, resultado.
Método de algebrización, 387-388.
— de aritmetización, *97*, 376. *V.* más abajo.
— de la aritmetización, *84*, 388. *Véase* más arriba.
— de cuadros semánticos (de BETH), 75.
— de esquemas, 75.
— de decisión, 314-315.
— de POST, *221*, 231-232.
— axiomático, *34*, 51.
— semántico, 152, 261, 267, 271-272, 288, 289, 332-333, 350-351, 392-393.
— sintáctico, *153*, 271-272, 350-351.
Miembro de la clase *Cl-Rp*, IN 2.24.2.1.13.
Mínimo común múltiplo de β_1 y β_2, *93*.
Modelo, *58*, 59, 61, 62, 184, 299, 302-303, 304-305, 306, 308, 314 (n. 46 bis), 332, 333, 342-343, 390, 392, 401, 402 (n. 57). *V.* absoluto, clase, conjunto, familia, función, miembro, nombre, parte, relativamente, restricción.
— (en el sentido de KEMENY), *402 (n. 57)*.
— no normal de la lógica de las proposiciones (en el sentido de CARNAP), 318, *325*.
— de *LFN*, *392*, 396, 397, 398, 399-400.
— de *LFN-V*, *266*.
— de *LFP-A*, *v.* relativamente.
— de *LFP-ω*, *v.* realizable.
— (regular o general) de *LFP-ω*, *v.* realizable.
— general de *LFP-ω*, *310*. *V.* clase, proposición.
— regular de *LFP-ω*, *310*.
— ω-coherente, *393*, 395, 396, 397, 398, 399-400.
— completo, *306*, 307.
— definido de manera constructiva, *200*, *(n. 54)*.
— numerable, *303*, 304, 315, 353.
— directo, *184*. *V.* demostración.
— s equivalentes, *402*, 403-404.
— general, *v.* realizable.

Modelo indirecto, *183-184*, 188. *V.* demostración.
— interno, *305*, 307. *V.* relativamente.
— s isomorfos, *61*.
— natural, 401, 402 (n. 57).
— no natural, 401, *402*, 402 (n. 57).
— regular, 308, 315, 316, 317, 318, 332, 332 (n. 23), 355. *V.* realizable.
— no regular (en el sentido de HENKIN), 307, 308, *312*, 313, 314 (n. 46 bis), 314, 317 (n. 58 bis), 333, 344, 353, 354, 355, 356, 400-401, 402 (n. 57), 404.
— no regular (en el sentido de ROSSER y de WANG), *314*, 315, 316, 317, 318, 333-334, 402 (n. 57).
Modular, *v. lattice*.
Morfología (de un sistema formal), *53*.
— (del sistema P), *367*.
— de *LFG*, *107*, *108*.
Morfológico, *v.* parte.
Multiplicación, *85*, 119. *V.* función, esquema.
— (en la aritmética recursiva), *100*.
— (en *LAI*), IN 2.21.3.1.2.

Natural, *v.* campo, modelo, razonamiento.
Negación, IN 2.22.1.1, 2.24.1.6. *V.* operador, operación.
— (en la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *100-101*.
— (en *LFG*), *108*, 121-122.
Negativo, *v.* resultado.
New, v. *New Foundations*.
— *Foundations*, *v.* sistema.
Nicht gabelbar, *70 (n. 10)*.
Nicht-konsistent, *68 (n. 4)*.
Nivel de canonicidad, *328*, *329*.
— de una función recursiva, *124*.
— de una proposición, *238*.
— de un símbolo, *237-238*.
— (en la teoría ramificada de los tipos), *112*.
— cualquiera, *v.* propiedad.
— 1, *v.* proposición.
— 2, *v.* proposición.
— 3, *v.* proposición.
— *n*, *v.* componente.
Noción de *definible*, 296. *V.* definible.
— de *designación*, 399. *V.* relativo.
— de *designación* relativa a *LFP-A_m*, *398*. *V.* formalizar.
— de la teoría de los conjuntos, 306, 307.
— de *verdad* relativa a un sistema formal, 261, *262*, 277-278, 332-333, 395-396.
— de *verdad* relativa a *LFP-A_m*, *396*. *V.* formalizar.
No circular, *v.* máquina-T.
No coherente, *v.* sistema.
No constructivo, *v.* demostración, lógica, procedimiento, razonamiento.
No contenerse a sí mismo como elemento, *v.* conjunto.
No-contradicción, *45*, 46, *68 (n. 4)*, 76, 177, 335. *V.* demostración.
No-contradicción de la aritmética, *46-47*, 180, 181. *V.* demostración.
— (del sistema P), *372*. *V.* demostración.
— de la teoría de los números, 181.
No-contradictorio, *370 (n. 15)*. *V.* clase, sistema.
No demostrable, *v.* predicado.
No derivabilidad (de la proposición de GÖDEL), 134.
No derivable en *LFG*, 104-105.
No derivable en un sistema, *v.* proposición.
No efectivo, *v.* propiedad.
No explícitamente, *v.* definir.
No explícitamente definido, *v.* predicado.
No formalizado, *v.* lenguaje.
No-gödeliano, *v.* sistema.
No-lógico, *v.* axioma.
Nombre para base, IN 2.26.1.2.
— s para las categorías de objetos de la lengua formalizada (estudiada), IN 2.25.1.
— para clase, IN 2.26.1.3.
— para constante individual (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.11.
— para conjunto, IN 2.26.1.4.
— para expresión del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.6.
— para expresión algorítmica, IN 2.26.1.1.
— para función (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.3.
— para cualquier lengua, IN 2.26.1.5.
— para máquina, IN 2.26.1.6.
— para modelo, IN 2.26.1.7.
— s para objetos particulares de la lengua formalizada (estudiada), IN 2.25.3.
— s para ciertos objetos formales definidos en *LB*, IN 2.26.1.
— s para ciertos objetos metateóricos, IN 2.26.
— para objeto sintáctico, IN 2.26.2.
— para operador, IN 2.26.1.8.
— s para los operadores lógicos, IN 2.26.3.
— para operación (sintáctica), IN 2.26.2.2.
— para predicado (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.4.
— para problema, IN 2.26.1.9.
— para proposición (de una lengua formalizada) IN, 2.25.1.7.
— para proposición cerrada (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.8.
— para regla, IN 2.26.2.1.
— para serie de proposiciones (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.9.
— para serie de símbolos (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.10.
— para término (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.5.
— para teoría, IN 2.26.1.10.
— para variable individual (de una lengua formalizada), IN 2.25.1.2.

Nombres (que sirven para designar las expresiones de una lengua), *382-383 (n. 25).*
No natural, *v.* campo, modelo.
No numerable, 354. *V.* campo, conjunto.
No predicativo, *v.* definición.
No primitivo, *v.* componente.
No regular, *v.* modelo, sistema.
No resolubilidad esencial, 391-392.
No resoluble, *v.* sistema, teoría.
No normal, *v.* modelo.
Normal, *v.* conjunto, forma, sistema.
Normalidad, *225.*
No saturabilidad, *391.*
No saturación, *323,* 325, 328-329, 330.
— semántica, 308.
— sintáctica, 308.
No saturable, *v.* sistema.
No separabilidad de dos conjuntos (en el sentido de USPÉNSKIJ), *390-391.*
— efectiva de dos conjuntos, *390-391.*
No separable, *v.* conjunto.
No verdadero, *v.* predicado.
— en un campo de interpretación, *v.* proposición.
— analíticamente verdadero, *v.* proposición.
Numerable, *303,* 304, 357, 361. *V.* campo, clase, conjunto, modelo.
Numeral, *v.* sistema.
Numérico, *v.* proposición.
Número, *317. V.* signo, sistema, teoría.
— entero (en la aritmética recursiva), *99.*
— cardinal de un conjunto, *406.*
— de BERRY, *298 (n. 5).*
— de BERRY relativo a un sistema *LF, 298 (n. 5).*
— de enteros que son los números-D de una máquina-T no circular, IN 2.24.1.7.
— de una expresión, 385 (n. 30).
— de GÖDEL, *98. V.* número-G.
— sintáctico de una proposición matemática formal, *136.*
— cardinal *43,* 406. *V.* conjunto.
— entero, 35, 86, 105-106, 151, 204, 313, 324, IN 2.21.1.11, 2.21.1.14. *V.* función, predicado, relación, sustitución.
— ordinal, *43,* 194, *405.*
— ordinal límite (de una serie de ordinales), 405-406. *V.* ordinal.
— ordinal vinculado a la derivación-I hasta *v, 195.*
— ordinal constructivo (en el sentido de CHURCH y de KLEENE), *257.*
— ordinal transfinito, 195, *498,* IN 2.21.1. 15. *V.* conjunto.
— más pequeño que realiza una propiedad, *92.*
(El) número más pequeño tal que... (en *LAI*), IN 2.31.3.1.10.
Número-D (de una máquina-T), *216.*
— de una máquina-T no circular, *v.* número.
— de una serie (de cifras) M-definible, *217.*
Número-G, *98, 154, 155. V.* número de GÖDEL, satisfecho.
Número-G (de una expresión de *LFG*), 136.
Número racional, 324. *V.* aritmética.
— real, 324, 389. *V.* anillo, teoría.

Objetividad, *v.* lenguaje.
Objeto, *v.* dominio.
— de la lengua formalizada (estudiada), *v.* categoría.
— particular de la lengua formalizada (estudiada), *v.* nombre.
— formal, *v.* definir.
— formal definido en *LB, v.* nombre.
— metateórico, *v.* nombre.
— sintáctico, *v.* nombre.
— ω-indecidible en *LFR, v.* proposición.
Operación, *v.* cerrado, regla, representación, representado.
— (de la aritmética intuitiva), IN 1.31.
— s lógicas elementales (de la aritmética recursiva), 88 (n. 78), *100,* 181-182.
— de generalización, *39,* 181-182.
— *producto* (de un grupo), *39.*
— de implicación, *319, 320,* 327.
— lógica (de la lengua de base), IN 1.36.3.
— lógica (de la lengua formalizada), IN 1.42.5.
— (de una lengua LB_n) representable (en un sistema *LF*), *73,* 262.
— de negación, *320-321.*
— lógica de negación, 159, 375-376.
— de sustitución, *151,* IN 2.25.4.1.
— (de un sistema formal), *53,* 54-55.
— de la teoría de los conjuntos, 306, 307.
— de *LAI,* IN 2.21.2, 2.23.2.1.
— (de *LFG*) recursivamente representable, *121.*
— lógica, *v.* símbolo.
— metateórica (relativa al sistema P), 367-368.
— metateórica (relativa a *LFG*) recursivamente representable, 119.
— representable recursivamente, *94. V.* siguiente.
— recursivamente representable, *98,* 250, 251. *V.* anterior.
—. sintáctica, IN 2.25.4. *V.* nombre.
— On_1 (de KLEENE), *89.*
— On_2 (de KLEENE), *89.*
Operador, *v.* nombre.
— de abstracción, *v.* eliminar, variable.
— de definición, IN 2.25.4.3.
— de disyunción, *150-151,* 171, 178-179, 318.
— de abstracción (del formalismo de la conversión-λ), *202,* IN 2.41.1.
— de implicación, *150,* 178-179, 320-321, 325, 325 (n. 82), 327, 329, 376. *V.* corresponder, interpretación.

Operador proposicional (de la lógica de las proposiciones), *37*, *317*.
— de negación, *150*, 171, 178-179, 247 (n. 15), 318-318, 323, 323 (n. 77), 375-376. *V.* corresponder, interpretación.
— proposicional (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39*.
— de negación (del sistema *LFK*), *157*. *V.* interpretación.
— de abstracción (de *LB*), IN 2.22.1.2, 2.22.1.6. *V.* eliminado.
— proposicional (de *LFG*), *108*.
— proposicional (de *LFG*) de un argumento, *108*.
— proposicional (de *LFG*) de un argumento introducido por vía de definición, *109*.
— proposicional (de *LFG*) de dos argumentos, *108*.
— proposicional (de *LFG*) de dos argumentos introducidos por vía de definición, *109*.
— proposicional (de *LFG*) introducido por vía de definición, *109*.
— proposicional (de *LFG*) recursivamente representable, *122*.
— proposicional $\sim$ (de *LFG*), *111*.
— proposicional V (de *LFG*), *111*.
— V (de *LFG*), *111*.
— $\rightarrow$ (de *LFG*), *111*.
— proposicional (de *LFN-G*), *188*.
— proposicional & (de *LFN-G*), 190.
— proposicional $\rightarrow$ (de *LFN-G*), 190.
— sintáctico de sustitución, *111*.
— lógico, 233, IN 2.22. *V.* corresponder, nombre.
— lógico de un argumento, IN 2.22.1.
— lógico de dos argumentos, IN 2.22.2.
— proposicional, *53*, 150, 262-263, 307-308, IN 2.31.1.3.
— *Min*, *92*, 215, 398.
Orden, *v.* tipo.
— lexicográfico, *83 (n. 72)*.
— 1, *v.* variable.
— 2, *v.* variable.
— ω, *v.* lógica.
Ordenación, *v.* relación.
Ordenado, *v.* conjunto.
Ordinal, 307, 315, 317-318. *V.* clase, lógica, número, sucesor, serie.
— de la primera clase, 256, 357.
— de la segunda clase, 256, 356, 357, 358, 361. *V.* clase.
— de primera especie, 256, *405*.
— de segunda especie, 256, *405*.
— límite (de una serie de ordinales), 169, 256, 358, *405*.
— constructivo (en el sentido de CHURCH y de KLEENE), *v.* número, teoría.
— constructivo (en el sentido de WANG), 329, *329 (n. 98)*, *357*.
Ordinal, transfinito, *194*. *V.* número, teoría.
Organo de mando (de una máquina-T), 205, *206*.
— de ejecución (de una máquina-T), 205, *206*.
— de lectura (de una máquina-T), 205, *206*.
— de memoria (de una máquina-T), 205, *206*.
ω-coherente, 370 (n. 15). *V.* clase, modelo, sistema.
ω-no-contradictorio, *370 (n. 15)*. *V.* clase, conjunto.

Palabra, *234*. *V.* problema, serie.
Paradoja, 3, 34, *80*, 139, 328, 329, 341.
— de BURALI-FORTI, 34, 81, *112*.
— de EPIMÉNIDES, *81*, 147, 241-242, 246 (n. 13), 351, 353, 356-357, 397-398.
— del mentiroso, *81*, 229-230, 288-289.
— de RICHARD, 81, *82*, 112, 153, 297, 299, 322, *325*, 327, 398, 399. *V.* antinomia.
— de RUSSELL, 34, 81, 322, *232 (n. 70)*, 328 (n. 91).
— de SKOLEM, *303*.
— semántica, *80*, 81.
— sintáctica, *80*.
Parcial, *v.* dominio, recursividad.
Parcialmente, *v.* recursivo.
— recursivo, *v.* clase, función, predicado.
Paréntesis, *v.* convención.
— (del cálculo *LF-*λ), *202-203*.
Particularización, *v.* cuantificador.
— (en la aritmética recursiva), *100*.
Particular, *v.* componente, lengua, objeto.
Parte axiomática (de un sistema formal), 53, *54*.
— morfológica (de un sistema formal), *53*.
— constructiva (de *LFN*), *198*.
Pensamiento matemático, *v.* horizonte.
Pequeño, *v.* número.
Permutación, 234 (n. 83).
Pertenecer a cierta clase *Cl*, *v.* conjunto.
— a la clase *Cl-Vr*, *284*, 285. *V.* clase.
— a una lengua formalizada, *v.* función, individuo, predicado.
Pertenencia, *v.* predicado, relación.
Platónico, *47*. *V.* actitud.
Platonismo, 364.
Polinomio, 233 (n. 81).
Positivo, *v.* resultado.
Potencial, *v.* infinito.
Pragmático, *72*.
Predicado, 106-107, 196-197, 245, 248-249, 250, 251, 257, 349, 350, 353-354. *V.* función, lógica, relativo, representación, teoría.
— (de la aritmética intuitiva), IN 1.31.
— elemental (de la aritmética recursiva), *100*.
— de aserción, *320*, IN 2.61.1.

Predicado de BERNAYS *(Brn)*, *379 (n. 11)*, IN 2.24.2.1.1.
Predicado de BETH (*Bth*), *382* (n. 21), IN 2.24.2.1.2.
— de igualdad (del cálculo funcional restringido), *172*.
— de igualdad, 152, 171, 172, 173, 181, 182, 233, 314-315, 319, IN 2.21.4.1.1.
— de enteros de dos argumentos, *107*.
— de enteros de *k* argumentos, 258.
— de enteros de *n* argumentos, *107*.
— de KLEENE (*Pkl*$^{(1)}$ y *Pkl*), *154*, 241-242, 244, IN 2.24.2.1.15, 2.24.2.1.16.
— (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— (de una lengua LB_n) representable (en un sistema *LF*), *73*, 152, 262.
— de igualdad (de una lógica combinatoria), IN 2.61.2.
— de números enteros, 324.
— de un argumento (del sistema de PEANO), *35*.
— de dos argumentos (del sistema de PEANO), *35*.
— (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39*.
— de igualdad (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39*.
— de igualdad (del sistema *LFP-A*), *394 (n. 39)*.
— de TURING (*Unm*), IN 2.24.2.1.20.
— (de *LAI*), IN 2.21.4, 2.23.1.3, 2.23.2.1.
— *Vri* (para *LFG*), 278.
— (de *LFN*), *392*, 393.
— *verdadero* (para *LFN-V*) *263*.
— *Vri* (para *LFN-V*), *262*, 263-265, 266.
— (de *LFP-A*), 392, 393, 394.
— de pertenencia de *LFP-A*, *392*, 394, IN 2.31.1.13.3.
— $\in$ (de *LFP-A*), *392*, 394, 394 (n. 38).
— (de *LFP-A*$_m$), 393, 394.
— $\in_1$ (de *LFP-A*$_m$), *394*, *394 (n. 38)*.
— *Vri* (relativo a *LFT*), 267, *268*, 274. *V.* teoría.
— *Vri* (para *LFT-*Ω), *274*.
— (perteneciente a una lengua formalizada), IN 1.42.3.
— aritmético, *171*.
— definido para un dominio de objetos, *112-113*.
— definible en una clase de proposiciones, *270*, 281.
— definible en un formalismo, *270*, *296*. *V.* más abajo.
— definible en *LFT*, 281.
— determinado, *v.* relativo.
— s equivalentes, *245-246*.
— equivalente a una proposición A (en cuanto a su dominio de validez), *112*.
— (expresando una propiedad metateórica), IN 2.24.2.
Predicado (expresando una propiedad metateórica) explícitamente definido, IN 2.24.2.2.
— (expresando una propiedad metateórica) no explícitamente definido, IN 2.24.2.2.
— expresando una relación entre elementos de un formalismo *LF* definible en ese formalismo, 296. *V.* más arriba.
— recursivo (primitivo o general), *90*, 119, 120, 123, 151, 160, 171-172, 241-242, 245, 369 (n. 13).
— parcialmente recursivo, *93*.
— representable en *LFG*, 119.
— *no demostrable*, *147*.
— *derivable*, *140*, 200.
— *inderivable*, 147.
— *verdadero*, *200*, 262.
— *verdadero* (relativo a un sistema *LF*), 262.
— *no verdadero*, 147.
— *Vri* de un sistema, *v.* relativamente.
— *Vri* (relativo a un sistema), *262*, 274, 275, 288. *V.* proposición, teoría.
— *Vri* relativo a *LFM*, 323 (n. 77). *V.* teoría.
— *Vri* relativo a *LFM* representable en *LFM* (en el sentido de MYHILL), 323 (n. 77).
— *Vri* =, 263.
Predicativo, *v.* constante, expresión, variable.
Prefijo (de una proposición de la lógica de los predicados), *237*.
— de una expresión, *242 (n. 2)*.
Presentación de un sistema, 55, 56.
Primer lema de MOSTOWSKI, *281*.
— número-ϵ, 188, 194-195, *407*, IN 2.21.1.13.
— orden, *v.* calculus, lógica.
— ordinal transfinito, IN 2.21.1.12.
— teorema de HENKIN, *311*.
— teorema de ROSSER, *159*, 160, 351 (n. 48).
— tipo, *v.* expresión, signo, variable.
Primera clase de ordinales, *406*.
— especie, *v.* ordinal.
Primitivo, *v.* combinador, componente, conjunto, enumerable, enumerar, idea, recursión, teorema.
Primo, primero, *v.* factor, lema, número, ordinal, orden, teorema, tipo.
Principia Mathematica, *74*, 75, 78, 102, 105, 316, 324 (n. 78). *V.* sistema.
Problema, *v.* decisión.
Principio de aritmetización, *84*.
— de inducción, 65, 88-89, 181, 182, 189, 190, 194, 262-263. *V.* axioma de inducción.
— de inducción extendido hasta ϵ_0, *195*.
— de inducción transfinita, *406*.
— de inducción transfinita (utilizado por GENTZEN), 188, 194, *195*, 198-199, *407*.
— del infinito extensivo, *182*.
— de la doble negación, 44, 198.

Principio de "exclusión de tercero", *44*, 198, 323 (n. 77), 328-329.
— simple de "exclusión de tercero", *183 (n. 27)*.
Problema, *v.* decisión, nombre.
— indecidible del cálculo restringido de las funciones, *372*.
— del continuo, *335*.
— de decisión (de POST), *234*.
— de decisión (de SKOLEM), *233*.
— de decisión (en general), *201*, 221-222, 231, 236, 241, 332-333.
— de decisión insoluble, 238, 335-336.
— de decisión reducible a otro en el sentido elemental, *239*.
— de decisión reducible a otro en el sentido general, *240*.
— de decisión reducible a otro por tablas de distribución, *239*.
— de la decisión para la clase de los conjuntos recursivamente enumerables, *227*, 229-230.
— general de la decisión para la clase de los sistemas canónicos, *223*, *224*, 225, 227.
— general de la decisión para la clase de los sistemas normales, *223*, *224*, 225, 227.
— de la decisión para la clase de los sistemas normales numerales, *227*.
— de la decisión para un conjunto de enteros, *226*, 353.
— de la decisión para un conjunto de enteros recursivamente enumerable, 240.
— de la decisión para un sistema canónico, *223*, 224.
— de la decisión (para un sistema formal), *71*, 79, 201, 209-210, 212, 219, 221-222, 224, 235, 237, 295, 331, 333, 335-336, 342.
— de la decisión para un sistema normal, *223*.
— de FERMAT, 231, *231 (n. 71)*.
— de fundamento, 334, (n. 24).
— de las invariantes de conversión (de LF-λ), 209, *210*.
— de las palabras para los grupos, *235 (n. 90)*.
— de las palabras para los semigrupos, 234, 235, *236*.
— insoluble de SKOLEM, 232, *233*.
— de THUE, *234*, 235, 236.
— insoluble, *231*, 235, 237-238, 295, 332-333. *V.* grado.
— insoluble de un grado de insolubilidad inferior al de otro problema insoluble, *237*.
— s del mismo grado de insolubilidad, *237*.
— reducible a otro, *237*.
Procedimiento de aritmetización, 226-227, 346, IN 1.32. *V.* método de aritmetización. *V.* el siguiente.
— de aritmetización, 379, 380, 382, 387. *V.* el anterior.
Procedimiento efectivo de cálculo (en el sentido de CHURCH), *208*, *209*.
— efectivo de decisión, *207-208*, *221*.
— efectivo de decisión (en el sentido de TURING), *216 (n. 49)*.
— de la diagonal, *82 (n. 70)*, 153-154, 155, 210-211, 226,-227, 244, 246-247, 351, 351 (n. 49), 352, 356-357, 392-393. *V.* argumento de la diagonal.
— de KALMÁR, *172*.
— de la reducción, *184*.
— efectivo, *201*, 210, 216, 220, 223, 224, 225, 226, 227, 250, 251.
— constructivo, 65, *181*.
— no constructivo, *182*, *196*.
— efectivo (en el sentido de TURING), *216*.
— finitista, *181*.
Producto (de un grupo), *v.* operación.
— (de un semigrupo), *234*.
Programa (de una máquina-T), *206*, 216.
Propiedad, *v.* realizar, representación, representar.
— de enteros, *36*.
— del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), *v.* corresponder.
— de cualquier nivel (en una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.
— de cualquier nivel (perteneciente a una lengua formalizada), IN 1.42.4.
— semántica de un sistema, 79, 261, 262.
— metateórica (del sistema P), 367, *369*.
— metateórica (de *LFG*), *118*.
— metateórica (de *LFG*) recursivamente representable, 119, 122.
— (de *LFG*) recursivamente representable, *122*.
— circular, *175*.
— constructiva, *357*.
— definida de manera inductiva, *203 (n. 4)*.
— no efectiva, *218*.
— metateórica, 332, 346, 358, IN 1.1, 2.24. *V.* expresar.
— recursiva, 230.
— representable recursivamente, *94*, 98.
Potencia de un sistema, 76, 149-150, 323.
— relativa de un sistema, 76.
Proposición, *53*, 55, 319-320, 322 (n. 73), 345, 383 (n. 26), 399-400, IN 1.3, Observación. *V.* clase, inderivabilidad, lógica, nivel, predicado, regla, restricción, serie, variable.
— (del sistema P), *369*.
— falsa (de un sistema *LF*), *262*.
— (de un sistema *LF*) válida en el sentido general, *403*, 404.
— verdadera (de un sistema *LF*), *262*.
— (de un sistema *LF*) analíticamente verdadera, *403*, 403 (n. 58), 404.
— verdadera de un sistema *LF* (relativamente al predicado *Vri* de ese sistema), 271-272. *V.* clase.

Proposición abierta de tipo 1, *112.*
— abierta de tipo 2, *113.*
— indecidible de WANG, *396, 397.*
— de *LFE, v.* restricción.
— (de *LFG*), *109,* 368 (n. 8). *V.* clase.
— aritmética de *LFG, 171.*
— derivable de *LFG, v.* clase.
— no derivable de *LFG, v.* clase.
— elemental (de *LFG*), *109,* 368 (n. 7).
— cerrada (de *LFG*), *109,* 171, 368 (n. 9).
— abierta (de *LFG*), *109.*
— verdadera de *LFG, v.* clase.
— de *LFN,* 592.
— falsa de *LFN, 185.*
— numérica (de *LFN*), *183-184.*
— numérica falsa (de *LFN*), *184.*
— numérica verdadera (de *LFN*), *184.*
— verdadera de *LFN, 184.*
— (de *LFN-G*), *189.*
— semánticamente indecidible (del cálculo funcional restringido), *172,* 173.
— realizable (del cálculo funcional restringido), 172-173.
— no realizable (del cálculo funcional restringido), 171-172.
— válido (del cálculo funcional restringido), 171-172.
— de un formalismo, *v.* clase.
— de GÖDEL, *v.* derivabilidad, refutabilidad.
— indecidible de GÖDEL, 355, 356, 382-383, 383 (n. 27), 384, 389, 400-401. *V.* proposición $\mathfrak{V}^*$.
— indecidible de KREISEL, *392.*
— de una lengua formalizada, 375-376. *V.* nombre.
— cerrada (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.5.
— determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.
— elemental (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.4.
— cerrada (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.6.
— cerrada determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* símbolo.
— abierta (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.6.
— de la lógica de los predicados, *v.* prefijo.
— de la lógica de los predicados de primer orden, *v.* clase.
— derivable de la lógica de los predicados de primer orden, *303,* 307, 308.
— cerrada de la lógica de los predicados de primer orden, *299 (n. 9),* 299-300.
— válida de la lógica de los predicados de primer orden, *303,* 307-308.
— derivable de una lógica aplicada de los predicados de primer orden, *v.* clase.
Proposición válida de la lógica de los predicados de segundo orden, *307, 308.*
— (de la lógica de los predicados de segundo orden) válida (en el sentido de HENKIN), *308.*
— (de la lógica de las proposiciones), *37.*
— (de una lógica combinatoria), IN 2.62.2.
— indecidible de MOSTOWSKI, *389.*
— abierta de nivel 1, *112.*
— abierta de nivel 2, *113.*
— abierta de nivel 3, 113.
— antecedente (de un esquema de derivación), *53-54.*
— consecuente (de un esquema de derivación), *53-54.*
— (de un sistema), *v.* clase.
— derivable de un sistema, *v.* clase.
— verdadera de un sistema, *66. V.* clase.
— (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *40.*
— elemental (de *LFN-G*), *191.*
— numérica (de *LFN-G*), *190,* 191, 192.
— numérica falsa (de *LFN-G*), *190, 191.*
— numérica verdadera (de *LFN-G*), *190, 191.*
— derivable de *LFN-V, 266.*
— elemental (de *LFN-V*), *263-265.*
— verdadera de *LFN-V, 263-265, 266.*
— de *LFP-A,* 392, 393.
— de *LFP-A* falsa relativamente a un modelo de *LFP-A, 394.*
— de *LFP-A* verdadera relativamente a un modelo de *LFP-A, 394,* 395.
— de *LFP-*A_m, 393, 394.
— de *LFP-*ω, 309. *V.* clase.
— realizable de *LFP-*ω, *310.*
— de *LFP-*ω realizable en un campo de interpretación (regular o general), *310.*
— de *LFP-*ω realizable en un modelo (regular o general) de *LFP-*ω, *310.*
— de *LFP-*ω, válida en el sentido general, *310,* 311-312.
— de *LFP-*ω válida en el sentido regular, *309.*
— de *LFP-*ω válida relativamente a un campo de interpretación general, *310.*
— de *LFP-*ω válida relativamente a un campo de interpretación regular, *309.*
— diagonal (de *LFR*), *173.*
— de *LFT,* 274. *V.* clase.
— derivable de *LFT, v.* clase.
— verdadera de *LFT,* 281-282. *V.* clase.
— verdadera de *LFT-*Ω, *v.* clase.
— asociada a una función, *327.*
— aritmética (en el sentido de GÖDEL), 367, *371.*
— aritmética indecidible, *172,* 372.
— compleja, *53.*
— elemental, *53.*
— equivalente (a otra proposición), 238.
— cerrada, 383 (n. 26). *V.* variable.

Proposición decidible (en una lógica recursivamente engendrada relativamente en *En-Cv*), *230*.
— decidible (en un sistema formal), 224, 276, 403-404.
— decidible (en un sistema de tipo *LFG-R*), *168*. *V*. clase.
— κ-demostrable, 372, *377 (n. 27)*.
— derivable en una clase cerrada de proposiciones de *LFG*, *279-280*. *V*. derivable.
— derivable (en un sistema), *54*, 55, 237, 262, 271-272, 274-275, 307-308, 326, 376, 377-378, 380, 382-383, 391.
— no derivable (en un sistema), 262.
— derivable (en un sistema de tipo *LFG-R*), 160, 161, *168*, 179. *V*. clase.
— derivable en *LFG*, *115*, 124, 125, 173, 178, 179.
— derivable en LFG_1, *180*.
— derivable en LFG_n, *180*.
— derivable en LFG_{n+1}, *180*.
— derivable en $LFG_{\omega+n}$, *180*.
— derivable en *LFG*-Ω, *170-171*, *180*.
— derivable en *LFP-A*, *220*.
— derivable en $LFP\text{-}A_m$, 399.
— derivable en *LFP*-ω, *311*.
— derivable en *LFR*, *173*, 174, 175.
— derivable en *LFT*, *268*, 273, *274*.
— derivable en LFT_1, 275, *276*.
— derivable en LFT_2, *276*.
— indecidible en una clase de proposiciones (de un formalismo dado), *269*.
— indecidible en la clase de las proposiciones derivables de un sistema, *278*.
— indecidible en una clase de proposiciones de *LFG*, 278.
— indecidible en una clase de proposiciones de *LFT*, *270*, 272, 284.
— indecidible en una clase de proposiciones de *LFT*-Ω, *274*.
— indecidible (en una lógica recursivamente engendrada relativamente a *En-Cv*), *230*.
— indecidible (en un sistema de tipo *LFG-R*), *167*. *V*. clase.
— indecidible (en un sistema formal), *54*, 79, 95, 142, 149, 152, 171, 172-173, 224, 229-230, 238-239, 241, 252-253, 254-255, 278, 295, 307-308, 325, 329, 332, 333, 341, 354, 355, 367, 372, 378, 379, 382, 387, 388, 389, 390, 391, 396, 399, 400-401, 403, 404.
— indecidible (en *LFG*), 125-126, 131, 133, 134, 278.
— indecidible (en LFG_1), 170.
— indecidible (en LFG_n), 170.
— indecidible (en $LFG_{\omega+n}$), 170.
— indecidible (en *LFG-R*), 166, 167.
— indecidible (en *LFG*-Ω), 170.
— indecible (en *LFK*), *158*.
Proposición indecidible en *LFP-A*, *392*, 394, 395, 396, 397, 399-400.
— indecidible (en *LFR*), *173*, 175.
— indecible (en *LFT*), *289*, 290, 292.
— indecidible (en *LFT*), *276*.
— ω-indecidible en *LFR*, *174*.
— inderivable (en un sistema de tipo *LFG-R*), *168*. *V*. clase.
— inderivable (en *LFG*), 125, *131*, 132-133.
— inderivable (en *LFG-R*), *166*.
— irrefutable (en *LFG*), *132*.
— irrefutable (en *LFG-R*), *167*.
— matemáticamente formal, *136*. *V*. número.
— abierta, *112*.
— realizable, *62*.
— no realizable, *62*.
— realizable en un campo de interpretación, *62*, 299-300.
— refutable (en un sistema de tipo *LFG-R*), *167*.
— refutable (en un sistema formal), *53*, 55, 391-392.
— refutable en *LFG*, 124.
— refutable en *LFT*, *273*.
— válida, *62*, 308.
— válida en sentido regular, 403 (n. 58).
— válida relativamente a un campo de interpretación, *62*, 299, 403 (n. 60).
— verdadera *66-67*. *V*. clase, número-G.
— verdadera en un campo de interpretación, *62*, 261
— $\mathfrak{V}_C$, *387*.
— $\mathfrak{V}_G$, *377*.
— $\mathfrak{V}_K$, *379*.
— $\mathfrak{V}_T$, *273*, 274, 275, 276.
— $\mathfrak{V}_U$, 289, *290*, 292, 293.
— $\mathfrak{V}^*$, 125, 127, *129*, 143, 178, 179, 278, 335, *381*. *V*. carácter, inderivabilidad.
— $\mathfrak{V}^*_K$, *253*, 254.
— $\mathfrak{V}^*_R$, *164*.
Proposicional, *v*. función, operador, variable.
Proyectivo, *v*. geometría.
Punto de vista del infinito actual, *196*, 357-358, 362.
—— constructivo, *196*, 357-358.
—— estrictamente constructivo, *98*.
—— finitista, *181*, 184.
—— finitista clásico, *181*.
Puramente combinatorio, *v*. sistema.
Puro, *v*. lógica, sistema.

Racional, *v*. número.
Ramificado, *v*. teoría, tipo.
Razonamiento por inducción, *181-182*.
— por inducción estructural, *65*, 94.
— por recurrencia, *181-182*.
— que se detienen en lo finito, 182.
— circular, 143, 146.
— no constructivo, *182*.

Razonamiento finitista, *181.*
— intuicionista (en el sentido de HERBRAND), *46.*
— metateórico, IN 1.1.
— natural, *75.*
Real, *v.* cuerpo, geometría, número.
Realizable, *v.* clase, proposición, sistema.
— en un campo de interpretación, *v.* clase, proposición.
— en un campo de interpretación numerable, *v.* clase.
— en un campo de interpretación (regular o general), *v.* clase, proposición.
— en un modelo de *LFP-ω*, *v.* clase.
— en un modelo (regular o general) de *LFP-ω*, *v.* proposición.
Realizar una propiedad, *v.* número.
Recurrencia, *v.* razonamiento.
Recurrencia que se detiene en lo finito, *46.*
Recursión, 335-336. *V.* esquema.
— cruzada, *v.* esquema.
— indirecta, *v.* esquema.
— primitiva, *v.* esquema.
— simultánea, *v.* esquema.
— transfinita, 335-336.
Recursivamente, *v.* definible, enumerable, enumerar, representable, representar.
— enumerable (de manera primitiva o general), *v.* clase, conjunto.
Recursividad, *84,* 156-157, 201, 353.
— general, *92,* 225.
— parcial, 242-243.
Recursivo, 203 (n. 4), 280. *V.* aritmética, clase, definición, enumerabilidad, función, predicado, propiedad, relación, representación, esquema, serie, teoría.
— general, *v.* función, predicado, serie.
— primitivo *v.* función, predicado, serie.
Reducción, *v.* etapa, procedimiento.
— (de una derivación), *184.*
— (en el formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.2.2.
— (en *LF-λ*), *204.*
— (para *LFN-G*), 191, *192.*
Reducible, *v.* derivación, problema.
— en el sentido elemental, *v.* problema.
— en el sentido general, *v.* problema.
— por tablas de distribución, *v.* problema.
Reducida (de una derivación), *184-185.*
Reductibilidad, *v.* axioma.
Refutabilidad (de la proposición de GÖDEL), *137.*
Refutable en un sistema de tipo *LFG-R*, *v.* proposición.
— (en un sistema formal), *v.* proposición.
— en *LFG*, *v.* proposición.
— en *LFT*, *v.* proposición.
Regla, *v.* nombre.
— de la asociación a la derecha, *203-204.*
— de la asociación a la izquierda, *203-204*, IN 2.21.6.
Regla de CARNAP *(Re-C)*, *169*, *257*, 274, 358-359. *V.* aplicación.
— de construcción (de un cálculo), *57.*
— de transformación (de un cálculo), *57.*
— de construcción (del cálculo *LF-λ*), *202.*
— de transformación (del cálculo *LF-λ*), 204.
— de la consecuencia, *150*, 262-263, 267, 320-321, 328, 329. *V.* aplicación.
— de derivación, IN 1.1.
— (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.
— de formación (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.2.
— de operación (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.2.
— de formación, 345, 346, 400-401, IN 1.1.
— de formación (por componentes de un sistema formal), *53.*
— de formación (para proposiciones), *53.*
— de la consecuencia (en la lógica de las proposiciones), *38.*
— de derivación (de la lógica de las proposiciones), *38.*
— de separación (en la lógica de las proposiciones), *38.*
— de sustitución (en la lógica de las proposiciones), *38.*
— de formación (de una lógica combinatoria), IN 2.62.
— para el cuantificador (Θ), *42.*
— para el cuantificador (EΘ), *42.*
— de derivación (de un sistema canónico), *221*, 223.
— de la concecuencia (en un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *42.*
— de derivación (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *42.*
— (de un sistema formal), *54-55*, 74-75, 345-346.
— de derivación (de un sistema formal), *53*, 74-75, 168, 345, 346.
— de un sistema normal numeral, *225.*
— del sistema P, *369.*
— de derivación de un sistema *LF*, *v.* aplicación.
— de la consecuencia (para *LFG*), *114*, 169.
— de derivación de *LFG*, *114.*
— de formación (de *LFG*), 108.
— para el cuantificador de universalización (para *LFG*), *114*, 169.
— de derivación de LFG_o, 169.
— de derivación (de *LFN-G*), *189.*
— para la inducción (en *LFN-G*), *192.*
— para el cuantificador de universalización (para *LFN-G*), *192*, 194.
— de derivación (de *LFP-ω*), *311.*
— constructiva, *168.*
— sintáctica, IN 1.1.
— Re_1, *v.* aplicación, relación.

Regla Re_2, *v.* aplicación, relación.
— *Re-C*, 273-274. *V.* aplicación.
Regular, *v.* campo, modelo, válido.
Relación, *v.* cerrado, lógica, representación, signo.
— de pertenencia, *42-43*, 303-304. IN 2.29.1.
— de *n* argumentos, *v.* signo.
— de consecuencia inmediata, *168*.
— de consecuencia inmediata (definida mediante las reglas Re_1 y Re_2), *169*.
— de concecuencia inmediata (del sistema P), *369*, 370-371.
— de consecuencia inmediata (en un sistema de tipo *LFG-R*), *160*.
— de consecuencia inmediata (del sistema *LFK*), *157*.
— de consecuencia inmediata en *LFG*, *114*, 115.
— de consecuencia inmediata para *LFT*, 267, *268* (*n. 16*).
— de igualdad, 88-89, *119*.
— entre elementos de un formalismo *LF* definible en ese formalismo, *v.* expresar.
— de inclusión, 43-44, IN 2.29.2.
— de ordenación, *119*, 405.
— de la teoría de los conjuntos, IN 2.29.
— aritmética (en el sentido de GÖDEL), *371*.
— aritmética (en el sentido de SKOLEM), *233*, 233 (n. 81).
— definible en (el sistema) P, 370, *370* (*n. 14*), 371.
— definible recursivamente (en el sentido de GÖDEL), *371* (*n. 21*).
— recursiva entre números enteros, 369, *369* (*n. 13*), 370, 371.
— reflexiva, 139, 140, 142.
— representable recursivamente, 168-169. *V.* propiedad; la siguiente.
— recursivamente representable, 157. *V.* propiedad; la anterior.
Relativamente a una interpretación, *v.* sistema.
— a un modelo, *v.* absoluto.
— a un modelo de *LFP-A*, *v.* falso, verdadero.
— a un modelo interno, *v.* absoluto.
— al predicado *Vri* de un sistema, *v.* verdadero.
— a un sistema formal, *v.* concepto.
Relativo, *v.* categoricidad, coherencia, potencia, saturación.
— a una clase *Cl*, *v.* teoría.
— a una interpretación, *v.* saturación.
— a la noción de *designación*, *v.* teorema,
— a un predicado *P*, *v.* teoría.
— a un predicado determinado, *v.* teoría.
— a un sistema, *v.* predicado.
— a un sistema formal, *v.* noción, teoría.
— a un sistema *LF*, *v.* predicado.
— a $LFP\text{-}A_m$, *v.* noción.
— a *LFT*, *v.* predicado.
Repetición, 75.
Representable en un formalismo, *v.* clase.
Representable en un sistema *LF*, v. enunciado, función, operación, predicado.
— en *LFM* (en el sentido de MYHILL), *v.* predicado.
— recursivamente, *v.* operación, propiedad, relación.
— recursivamente representable, *v.* operador, operación, propiedad, relación.
Representación de un enunciado (de una lengua LB_n en un sistema *LF*), *73*.
— de una función (de una lengua LB_n en un sistema *LF*), 73.
— de una operación (de una lengua LB_n en un sistema *LF*), 73.
— recursiva de una operación, *94*.
— de un predicado (de una lengua LB_n en un sistema *LF*), *73*.
— recursiva de una propiedad, *94*.
— de un sistema, *56*.
— recursiva, *120*.
Representar conjuntos (en una lengua formalizada de tipo clásico), *v.* expresión.
— un individuo (de una lengua LB_n en un sistema *LF*), *73*.
— recursivamente una operación, *94*.
— recursivamente una propiedad, *94*.
Representativo, *v.* función.
Resolubilidad (de un sistema), *71*, 241, 331.
— semántica (de un sistema), *71*.
— sintáctica (de un sistema), *71*.
Resoluble, *v.* conjunto, formalismo.
— en el sentido semántico, *v.* sistema.
— en el sentido sintáctico, *v.* sistema.
Resto de la división por 2, *90*.
Restricción de una proposición de *LFE* con relación a un modelo, *306*.
Restricted, *v.* restricted predicate calculus.
— predicate calculus, 77 (*n. 43*).
Restringido, *v.* cálculo.
Resultado de una sustitución, IN 2.24.1.11.
— metateórico positivo, *78*.
— metateórico negativo, *79*.
Reunión, *v.* conjunto.
— de varias clases, *169* (*n. 45*).
— de varios conjuntos, *301*.

Saturación en el sentido fuerte (en el sentido de CAVAILLÈS), *70* (*n. 9*).
— (de un sistema), 69, 241, 295, 309 (n. 35 bis).
— combinatoria, 318, *319*, 320, 321, 322 (n. 73).
— deductiva, 318, *319*, 320, 321, 322.
— semántica, *70*, 214, 401.
— semántica absoluta, *70*, 71, 307-308, 403, 404. *V.* sistema.
— semántica relativa a una interpretación, *70*.
— sintáctica, *69*, 401. *V.* saturado.

Saturación sintáctica en el sentido débil, 70.
— sintáctica en el sentido fuerte, 69, 390-391, 403.
Satisfactible, 62 (n. 42).
Saturado, *v.* sistema.
— en el sentido débil (en el sentido de la saturación sintáctica), *v.* sistema.
— en el sentido fuerte (en el sentido de la saturación sintáctica), *v.* sistema.
— relativamente a un campo de interpretación, *v.* sistema.
— relativamente a una interpretación, *v.* sistema.
Secuencia, *75,* 189.
Segunda clase, *v.* ordinal.
— clase de ordinales, 406.
— clase de ordinales transfinitos, 188.
— especie, *v.* ordinal.
Segundo, *v.* clase, especie, lema, orden, teorema, tipo.
— lema de MOSTOWSKI, *281,* 286, 288, 289.
— orden, *v.* lógica.
— teorema de HENKIN, *311,* 332, 333-334, 353, 354-355.
— teorema de ROSSER, *161,* 165, 284, 351 (n. 48).
— tipo, *v.* expresión, variable.
Selección, *v.* axioma, función.
Semántica, *66,* 261 (n. 2), 400-401. *V.* coherencia, coherente, estudio, generalización, método, paradoja, propiedad, resolubilidad, resoluble, saturación, no saturación, sentido, cuadro, teorema, tipo.
Semánticamente, *v.* indecidible.
— indecidible, *v.* proposición.
Semi, *v.* semimodelo.
Semigrupo, *234. V.* problema, producto.
Semimodelo (en el sentido de KEMENY), *402* (n. *57*).
Sentido, *v.* dotado.
— absoluto, *v.* categórico, grado.
— elemental, *v.* reducible.
— débil, *v.* saturación, saturado.
— fuerte, *v.* ω-coherencia, ω-coherente, saturación, saturado.
— general, *v.* reducible, válido, validez.
— regular, *v.* válido, validez.
— semántico, *v.* coherente, resoluble, saturado.
— sintáctico, *v.* coherente, resoluble.
Separable, *v.* conjunto.
Separabilidad de dos conjuntos, 390.
Separación, *v.* regla, signo.
Separado por un conjunto, *v.* conjunto.
— por un conjunto perteneciente a cierta clase *Cl, v.* conjunto.
Separar dos conjuntos, *390.*
Ser el argumento de, *139.*
— el argumento de cierta función, *143* (*n. 78*).
— una aserción, una afirmación, 320.
Ser un axioma (del sistema P), *369.*
— un axioma (de *LFG*), *123.*
— una clase, *305,* 306.
— una clase (de un modelo *Md*), *305.*
— coherente, *285, 286.*
— ω-coherente, *285, 286.*
— una componente canónica, IN 2.24.2.1.4.
— una componente canónica de nivel *n,* IN 2.24.2.1.4.
— una componente canónica de nivel *n*-ésimo, 328.
— un conjunto, *305,* 306.
— un conjunto (de un modelo *Md*), *305.*
— consecuencia inmediata de una o de dos fórmulas dadas (en el sistema P), *369.*
— consecuencia inmediata de una o de varias proposiciones (en el sistema *LFK*), *157* (*n. 22*).
— una consecuencia inmediata de un proposición B en *LFG, 114.*
— una consecuencia inmediata de las proposiciones A y B en *LFG, 114.*
— una constante (de LFG), *122.*
— convertible, *204.*
— definible, 271, *284, 285, 286.*
— una demostración de una fórmula dada (en el sistema P), *370.*
— derivable en una clase cerrada de proposiciones de *LFG, 279.*
— no derivable (en un sistema *LF*), 377.
— derivable (en *LFG*), *123,* 279.
— una derivación, IN 2.24.2.1.11.
— una derivación de una proposición A, *379, 380.*
— una derivación en el sentido de ROSSER, IN 2.24.2.1.12
— una derivación (en *LFG*), *122-123.*
— una derivación de una proposición A (en *LFG*), *122-123.*
— una derivación de una proposición A en *LFT, 290 (n. 91).*
— una figura de demostración, 369.
— una fórmula demostrable (en el sistema P), *370.*
— miembro de, *305,* 306.
— miembro de la clase *Cl-Rp,* IN 2.24.2.1.13.
— miembro de (relativamente a un modelo *Md*), *305,* 306.
— un número entero, *35,* 52, 232, 289, 291-292, 293, IN 2.24.2.1.14.
— un número entero (en el sistema de PEANO), *35.*
— un número primo, *121,* IN 2.24.2.1.17.
— un número racional, 232.
— el número-G de una proposición verdadera, *185.*
— un operador proposicional (de *LFG*), *122.*
— un operador proposicional (de *LFN*), *184-185.*
— una proposición, IN 2.24.2.1.18.

Ser una proposición verdadera (de un sistema *LF*), *262*.
— una proposición de *LFG*, 177. *V.* la siguiente.
— una proposición (de *LFG*), *122-123*. *V.* la anterior.
— una proposición (de *LFG*) que es consecuencia inmediata de una o de dos proposiciones, *122*.
— una proposición elemental (de *LFG*), *122-123*.
— una proposición (de *LFG*), obtenida por sustitución partiendo de un esquema de axiomas, *122-123*.
— una proposición derivable (en un sistema de tipo clásico), *324*.
— una proposición verdadera, IN 2.24.2.1.19.
— recursivo, *285*, *286*.
— recursivamente enumerable, *285*.
— satisfecho por el número-G de, *139*.
— una serie de proposiciones (de *LFG*), *122-123*.
— un signo de agrupación (de *LFG*), *122*, *123*.
— una variable, IN 2.24.2.1.21.
— una variable de cierto tipo (de *LFG*), *122-123*.
— una variable del tipo *n*, *120*.
Serie, *234*.
— de argumentos, *v.* aplicación.
— (de cifras) M-definible, *207*, 220-221. *V.* función, número.
— de enteros, 361. *V.* elemento, conjunto.
— recursiva de enteros (primitiva o general), *91*.
— de los enteros, 346, 354, 355, 358.
— de ordinales, 169. *V.* límite, número.
— de proposiciones (de una lengua formalizada), *v.* nombre.
— de proposiciones (de *LFG*), *117*.
— de símbolos (de una lengua formalzada), *v.* nombre, variable.
— antidiagonal, *96*.
— dual, *96*.
— s equivalentes, *235*.
Significación externa (de las expresiones de un sistema formal), *338*.
— interna (de las expresiones de un sistema formal), *338*.
Signo de agrupación (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.41.3.
— de separación (del formalismo de la conversión-λ), IN 2.41.4.
— de agrupación (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.2.
— de clase (del sistema P), *368*.
— de número (del sistema P), *368*, 368 (n. 5).
— de relación de *n* argumentos (del sistema P), *368*.
Signo del primer tipo (del sistema P), *368*.
— del *n*-ésimo tipo (del sistema P), *368*.
— fundamental (del sistema P), *368*.
— introducido como abreviatura (en el sistema P), *368*.
— de agrupación (de *LAI*), IN 2.21.5.
— de agrupación (de *LFG*), *108*.
Simbólica, *v.* lógica.
Simbolismo-λ, *202*.
Símbolo, *v.* nivel, serie, uso, utilizar.
— (de un cálculo), *23*.
— de agrupación (del cálculo *LF*-λ), *202*.
— separativo (del cálculo *LF*-λ), *202*.
— (abreviativo) para una expresión funcional determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.3.
— (abreviativo) para una expresión predicativa determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.4.
— utilizado (en el formalismo de la conversión-λ), IN 2.41.
— para individuo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.11.
— para propiedad de cualquier nivel (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.14.
— abreviativo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.
— constitutivo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.
— utilizado (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.
— añadido, adjunto (de una lógica combinatoria), IN 1.46, 2.61.5.
— utilizado (en una lógica combinatoria), IN 2.61.
— de operación lógica, IN 2.22.
— (abreviativo) para una proposición determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.1.
— (abreviativo) para una proposición cerrada determinada (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.2.2.
— utilizado (en un sistema canónico), IN 2.5.
— de *LB*, IN 2.2.
— de *LAI*, IN 2.21.
— de agrupación (de *LFN-V*), *262*.
— abreviativo, *115*, IN 1.41.
— constitutivo, IN 1.41, 1.42.
— sintáctico, 37, IN 1.1.
— ε, *180* (*n. 22*).
— λ, *202*, 203.
Simple, *v.* principio.
Simultáneo, *v.* recursión.
Sintaxis, *66*, IN 1.1.
— de la lengua formalizada estudiada, IN 2.25.
— de *LAI*, IN 2.23. *V.* constante, variable.
Sintáctico, *v.* coherencia, coherente, completo, constante, expresión, función, método, número, objeto, operador, operación, para-

doja, regla, resolubilidad, resoluble, saturación, no saturación, sentido, símbolo, variable.
Sinus, 202.
Sistema, 333-334. *V.* categoricidad, clase, coherencia, ω-coherencia, estudio, derivable, no derivable, elemento, conjunto, formalizable, interpretación, predicado, presentación, proposición, propiedad, potencia, representación, resolubilidad, saturación, utilización.
— de axiomas de PEANO, 312, 313.
— de axiomas para la teoría de los conjuntos, *43* (*n. 17*), 371, 372, 373.
— de CHURCH, *322.*
— de ecuaciones, *v.* asociado, ecuación.
— de los *New Foundations, 315,* 316, 317-318.
— de GENTZEN, *188.*
— de invariantes de conversión (de *LF*-λ), *210.*
— completo de invariantes de conversión (de *LF*-λ), *210.*
— *Meta I, 146.*
— de MYHILL, *323,* 356-357.
— de números no regulares, *313,* 313 (n. 45), 314, 315, 355.
— de PEANO, *35. V.* constante, número, predicado, variable.
— de los *Principia Mathematica, 43,* 213, 220, 224.
— no constructivo de ROSSER, *257. V.* lógica no constructiva de ROSSER.
— de estratificación interna, 323, *324,* 324 (n. 79), 357-358.
— de THUE, *234,* 235.
— de ZERMELO, 303-304.
— de ZERMELO-FRAENKEL, *43, 200* (*n. 54*), 371.
— de WANG, 329, 356-357.
— canónico, *221,* IN 1.45, 2.5. *V.* axioma, clase, componente, problema, regla, símbolo, teoría.
— categórico, *71,* 312, 313-314, 401-402.
— categórico en el sentido absoluto, *71,* 312, 313-314.
— "categórico" en un sentido absoluto (en el sentido de DOPP), *70* (*n. 9*).
— categórico relativamente a una clase de objetos, *71.*
— coherente, 78, 161, 172-173, 220-221, 302-303, 313, 314, 315, 316, 317, 323, 332-333, 377-378, 391-392.
— no coherente, 320, 321, 335.
— coherente en el sent. semántico, *68,* 302.
— coherente en el sent. sintáctico, *67,* 302.
— ω-coherente, 69, 116, 149, 160, 278, 313, 314, 315, 377, 393.
— ω-coherente en el sentido fuerte, *212.*
— Ω-coherente, *170.*
— puramente combinatorio, *76. V.* lógico.
Sistema completo (en el sentido de DOPP), *70 (n. 12).*
— completo (en el sent. sintáctico), *70,* 276.
— no-constructivo, 260. *V.* lógico no-constructivo.
— no-contradictorio, *45.*
— ω-no-contradictorio, 371.
— correspondiente a una teoría elemental de los grupos, *39. V.* axioma, constante, función, operador, predicado, proposición, regla, término, teorema, variable.
— formal, 38, 39, 47, 49, 50, *53,* 55, 57, 63, 99, 200, 337-338, 339, 341, 342, 344-345, 356, 357, 359, 400-401. *V.* aritmetización, aritmetizar, axioma, clase, componente, concepto, decidible, expresión, idea, indecidible, morfología, operación, parte, problema, refutable, regla, relativo, relativamente, esquema, teorema, teoría.
— formal puro, *52.*
— gödeliano (en el sentido de KALMÁR), *388,* 389.
— no gödeliano, *323,* 325, 327, 356.
— inextensible (en el sentido de DOPP), *70* (*n. 10*).
— lógico puro, *77.*
— normal, 221, *223,* 225, 226. *V.* clase, problema.
— normal numeral, *226. V.* clase.
— realizable, *62,* 302-303.
— resoluble en el sentido semántico, *71,* 200.
— resoluble en el sentido sintáctico, *71,* 78, 212, 214, 215, 324. *V.* formalismo resoluble, teoría resoluble.
— no resoluble, 213, 332-333. *V.* teoría no resoluble.
— no saturable, *391.*
— efectivamente no saturable, *391.*
— saturado (en el sentido de DOPP), *70* (*n. 10*).
— saturado (en el sentido de KEMENY), *403,* 404.
— saturado (en el sentido de la saturación semántica absoluta), *70,* 302-303, 323.
— saturado en el sentido débil (en el sentido de la saturación sintáctica), *70,* 78.
— saturado en el sentido fuerte (en el sentido de la saturación sintáctica), *70,* 220-221, 333-334, 391.
— saturado (en el sentido semántico), *70.*
— saturado relativamente a un campo de interpretación, *70,* 311-312.
— saturado relativamente a una interpretación, *70.*
— P, 367, *368,* 372. *V.* aritmetización, axioma, categoría, consecuencia, constante, no contradicción, definible, demostrable, fórmula, morfología, operación, proposición, propiedad, cuantificador, regla, signo, variable.

Sistema *LF*, *v.* elemento, enunciado, función, formalizar, operación, predicado, proposición, regla, relativo, representable, representación, representar.
— *LF*-λ, 226-227. *V.* cálculo *LF*-λ.
— *LAI*, 262-263, 266-267. *V.* adición, constante, convención, diferente de, igual a, enunciado, exponenciación, función, mayor que, mayor o igual que, individuo, interpretación, multiplicación, número, operación, menor que, menor o igual que, predicado, signo, sustracción, símbolo, sintaxis, variable.
— *LFE*, *305*, *V.* proposición.
— *LFG*, *102*, 124, 125-126, 168, 169, 177, *277*. *V.* aritmetización, formalismo *LFG*.
— LFG_0, *169*. *V.* regla.
— LFG_1, *170*. *V.* coherencia, derivable, indecidible.
— LFG_{n+1}, *v.* derivable.
— LFG_μ, *169*.
— $LFG_{\mu+1}$, *169*.
— $LFG_{\mu\nu}$, *169*.
— $LFG_{\omega+n}$, *v.* coherencia, derivable, indecidible.
— LFG_ν, *169*, 179-180. *V.* coherencia.
— LFG_ξ, *169*.
— *LFG-R*, *160*. *V.* indecidible, inderivable, irrefutable.
— de tipo *LFG-R*, *160*, 161, 167, 168-169, 179-180. *V.* axioma, clase, coherencia, decidible, derivable, indecidible, inderivable, proposición, refutable, relación.
— *LFG*-Ω, *170*, 171, 274-275. *V.* derivable, indecidible.
— *LFH*, 186. *V.* coherencia, interpretación. *V.* formalismo de HEYTING.
— *LFK*, *157*, 168. *V.* aritmetización, axioma, coherencia, consecuencia, indecidible, interpretación, operador.
— *LFM*, *323*, 323 (n. 77). *V.* predicado, relativo, representable.
— *LFN*, *181*, 183, 185, 188, 263 (n. 11), 371 (n. 22), 392. *V.* coherencia, constante, expresión, interpretación, modelo, parte, predicado, proposición, esquema, término, variable.
— *LFN-C*, 197. *V.* interpretación.
— *LFN-G*, 188, 195. *V.* cifra, coherencia, constante, derivación, etapa, operador, proposición, reducción, regla, esquema, variable. *V.* sistema de GENTZEN.
— *LFN-T*, *195*.
— *LFN-V*, *262*, 263 (n. 11), 266-267. *V.* axioma, componente, constante, interpretación, modelo, predicado, proposición, símbolo, término, variable.
Sistema *LFP-A*, *392*, 393-394, 395, 396, 398, 399-400. *V.* cifra, constante, derivable, elemento, expresión, indecidible, lema, modelo, predicado, proposición, subsistema, término, variable.
— $LFP\text{-}A_m$, *393*, 395-396, 398, 399. *V.* cifra, derivable, predicado, proposición, relativo, término.
— *LFP*-ω, *309*, 110-311, 312. *V.* axioma, campo, derivable, formalismo, modelo, proposición, regla, variable.
— *LFP*-ω*N*, *312*. *V.* axioma, constante.
— *LFR*, *172*. *V.* aritmetización, constante, derivable, indecidible, ω-indecidible.
— *LFT*, 274-275, 277, 279-280. *V.* formalismo *LFT*.
— LFT_1, *275*. *V.* derivable, indecidible.
— LFT_2, *276*. *V.* derivable.
— LFT_ν, *276*.
— *LFT*-Ω, *v.* formalismo *LFT*-Ω.
— tabla de distribución, *239*. *V.* reducible.
Situación (de una máquina-T), *205-206*.
Statement, *383 (n. 26)*.
Statement-form, *383 (n. 26)*.
Stratification, *242 (n. 3)*. *V.* teorema.
— externa, *324*, 330.
— interna, *324*, 324 (n. 79), 330. *V.* sistema.
Strong, *v.* strong ω-consistency.
— ω-consistency, *212 (n. 30)*.
Structural, *v.* inducción.
Subsistema de *LFP-A* correspondiente a la teoría clásica de los números, IN 2.14.10.
Sucesor, 358. *V.* función; el siguiente.
— de, *36*, 52. *V.* el anterior.
— de un ordinal, 169, *405*.
— de un término de *LFP-A*, *398*.
Sustitución, 318, 385. *V.* función, operador, operación, regla, resultado, esquema.
— de una expresión por otra (en *LFG*), *121-122*.
— (en el formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.2.1.
— de variables (de una proposición) por números enteros, *182*.
— (en la teoría de las funciones recursivas generales de KLEENE), *89*.
— (en *LF*-λ), *204*.
Sustitutivo, *v.* variable.
Sustracción (en *LAI*), IN 2.21.3.1.3.

Tematización, 359, 360.
Temporalidad, 360, 361.
Teorema, *v.* clase.
— s de CHWISTEK, *387*.
— de CHURCH, 79, 168, 201, 209, *210*, 212, 241, 248-249, 250, 332-333, 350, 351 (n. 49).
— de la deducción, *320*, 329.

Teorema de GÖDEL, 79, 95, *125*, 149, 152, 153, 159-160, 168, 169, 170, 171, 200, 224, 230, 241, 248-249, 250-251, 252-253, 257, 260, 267, 270, 273, 276, 277, 279-280, 284, 288, 289, 307-308, 323, 327-328, 329, 331, 332 (n. 22), 333, 334, 335, 336, 337, 346, 350, 351 (n. 50), 354, *370*, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 385-386, 387-388, 390, 401-402, *V.* demostración, generalización, hipótesis.
— de JANICZAK, *236*.
— de KALMÁR, *173*, 175, 350, 351 (n. 50).
— de KLEENE, 154, *158*, 348-349.
— de KLEENE-ROSSER-CURRY, *320*, 327, 328, 332, 333, 334, 352.
— de KREISEL, 393, 394.
— de LÖWENHEIM, *299*, 300.
— de LÖWENHEIM-SKOLEM, 299, 302, 302 (n. 14), 302 (n. 15), *303*, 304, 310-311, 315, 317 (n. 58 bis), 332, 333-334, 353, 354, 358. *V.* generalización.
— de LÖWENHEIM - SKOLEM - GÖDEL, *302* (*n. 14*).
— de MOSTOWSKI, *259*, 260.
— de POST, *227*, 332, 349, 351 (n. 50).
— de SKOLEM, *300*, 302 (n. 15).
— de estratificación de KLEENE, 241, 242, *245*, 248, 252-253, 259, 332, 333, 349, 351 (n. 50), 390.
— (de un sistema canónico), *223*.
— (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *42*.
— (de un sistema formal), *53*, 55, 345-346.
— de TARSKI, 261, *267*, 277-278, 332.
— (de una teoría deductiva intuitiva), *55*.
— de TURING, 216, *218*, 348-349, 351 (n. 49). *V.* corolario.
— s de USPÉNSKIJ, 390, *391*.
— sobre la verdad, 267, *276*, 286, 287, 288-289, 295, 296, 323, 331, 332, 333, 350, 351 (n. 50), 396 (n. 44), 398.
— primitivo (de un sistema formal), *54*.
— de WANG relativo a la noción de *designación*, 398, *399*.
Teoría, 336, 344. *V.* extensión, nombre.
— de las álgebras de BOOLE, 232-233.
— de los anillos, 232-233.
— del anillo de los números reales, 232-233.
— de los anillos conmutativos, 232-233.
— de las congruencias, 181.
— de los cuerpos, 232-233.
— de los cuerpos algébricos, 231.
— de los cuerpos algébricos cerrados, 232-233.
— de los cuerpos reales cerrados, 232-233.
— de la descomposición en factores primos, 88-89.
— de la demostración, 29, *45*, 48, 177, 180, 181-182, 183, 195-196, 198, 334-335.
— del máximo común divisor, 88-89.
— de la división, 88-89.
Teoría de los conjuntos, *33*, 267, 275, 302, 303, 304, 305, 306, 315, 316, 317-318, 329, 334-335, 357-358, 389, 392, 396. *V.* axiomático, elemento, formalismo, noción, operación, relación, sistema.
— de los conjuntos (de MYHILL), 74-75.
— de los conjuntos de VON NEUMANN), 371.
— de los conjuntos (de VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL), 390.
— de los conjuntos (de ZERMELO-FRAENKEL), 371.
— de los enteros, 231. *V.* más abajo.
— de la funcionalidad, *76*.
— de las funciones recursivas, 84, 221-222, 225.
— de las funciones recursivas generales de KLEENE, 153. *V.* cálculo, sustitución.
— de las geometrías proyectivas abstractas, 232-233.
— de la geometría proyectiva real, 232-233.
— de los grupos, 232-233.
— elemental de los grupos, *v.* corresponder.
— de los grupos abelianos, 232-233.
— de desigualdades incompleta, *388*, 389.
— de desigualdades incorrecta, *388*, 389.
— de desigualdades relativamente a una clase *Cl*, *388*.
— de las "lattices" arbitrarias, 232-233.
— de las "lattices" modulares, 232-233.
— de las "lattices" modulares de complemento, 232-233.
— de los modelos, 295, 353.
— de los números 323, 325, 326, 327, 328-329, 371, 380-381, 382. *V.* no contradicción.
— clásica de los números, *v.* corresponder, formalismo.
— recursiva de los números, 65.
— de los números enteros, 88-89, 307-308, 312, 313, 314, 315, 353, 354-355, 400, 401-402. *V.* más arriba.
— de los números reales (de MYHILL), 74.
— de los ordinales constructivos, *76*, 257.
— de los ordinales transfinitos, 75.
— de los predicados de KLEENE, *241*, 242, 248, 257, 390. *V.* lema.
— del predicado *Vri* (relativo a un sistema), 287, 288.
— del predicado *Vri* (relativo a un sistema) formalizable en un sistema, *275*, 276, 277, 287, 288.
— del predicado *Vri* (relativo a *LFM*), 323 (n. 77).
— del predicado *Vri* (relativo a *LFT*), *275*, 276, 287.
— de los sistemas formales, *30*.
— de los tipos, *74*, 75, 78, 80-81, 106-107, 143, 237-238, 267, 275, 296, 307, 316, 324 (n. 79).
— ramificada de los tipos, 43-44, 78, *78* (*n. 50*), *112*. *V.* nivel.

Teoría de la verdad relativa a un sistema formal, *v.* concepto de verdad, formalizar.
— intuitiva, 54-55, 99, 200.
— deductiva intuitiva, *55. V.* axioma, demostración, teorema.
— matemática formalizada, 313-314.
— lógica axiomatizada, 37.
— relativa a un predicado determinado, *248.*
— relativa a un predicado P, *249.*
— algorítmica relativa a un predicado P, *249.*
— algorítmica completa relativa a un predicado P, *249,* 250, 255, 256.
— deductiva relativa a un predicado P, *249,* 252-253, 255-257.
— deductiva completa relativa a un predicado P, 249, 250-251, 252-253, 256.
— resoluble, 232. *V.* sistema resoluble en el sentido sintáctico.
— no resoluble, 231, 232. *V.* sistema no resoluble.
— esencialmente no resoluble, *231,* 232.
Tercer orden, *v.* lógica.
— teorema de HENKIN, *311-312.*
— tipo, *v.* variable.
Tercero, *v.* teorema, tipo, orden.
Término aritmético (en la aritmética recursiva), *101.*
— (de una lengua formalizada), *v.* nombre, variable.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.2.
— (de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *40.*
— de *LAI,* 186-187. *V.* término aritmético.
— (de *LFG*), *108,* 368 (n. 5).
— (de *LFH*), *186.*
— de *LFN, 392,* 393.
— (de *LFN-G*), *188.*
— (de *LFN-V*), *263-265.*
— de *LFP-A, 319,* 320, 321. *V.* sucesor.
— de *LFP-*A_m, 319-320, 321, 325, 326.
— aritmético, IN 2.23.1.4. *V.* variable.
— aritmético (en el sentido de KLEENE), *89, 90.*
Tipo, *74 (n. 15),* 106-107, 112. *V.* teoría.
— de orden del conjunto de los enteros, 355-356.
— de orden (de un conjunto ordenado), 313, 355-356, *405.*
— clásico, *v.* lengua.
— ramificado, 78 (n. 50).
— semántico, *v.* condición, limitación.
— 1, *v.* proposición.
— 2, *v.* proposición.
— *n, v.* variable.
— (n + 1), *v.* variable.
— *LFG-R, v.* sistema.
Traducción de un enunciado (de una lengua a otra), *72.*
Traducir un enunciado (de una lengua a otra), *72.*
Transfinito, *v.* inducción, número, ordinal, recursión.
Trascendental, *357.*

Unidad, *v.* elemento.
Universal, *403 (n. 58). V.* máquina.
Universalización, IN 2.24.1.12. *V.* cuantificador.
— (en la aritmética recursiva), *100-101.*
Uso autónimo de un símbolo, *63 (n. 1),* IN 1.33.
Utilización de un sistema, *71.*
Utilizado, *v.* símbolo.
Utilizar un símbolo de manera autónima, IN 1.33.

Vacío, *v.* campo.
"Valid", *62 (n. 41).*
— "in a given domain", *62 (n. 40).*
Validez, *v.* dominio.
— en el sentido general, 355, 403 (n. 58 y n. 60).
— en el sentido regular, 355.
Válido, 355. *V.* proposición.
— en el sentido general, *v.* proposición.
— en el sentido regular, *v.* proposición.
— relativamente a un campo de interpretación, *v.* proposición.
— relativamente a un campo de interpretación general, *v.* proposición.
— relativamente a un campo de interpretación regular, *v.* proposición.
Valor, *v.* cálculo.
— de una expresión, IN 2.24.1.13.
— de verdad, *59,* 393-394.
Variable, *76,* 151-152, 375-376, IN 1.2. *V.* distribución, eliminar, fórmula, cuantificador, sustitución.
— individual (de la aritmética recursiva), *100.*
— sintáctica (para la aritmética recursiva), *100.*
— funcional de orden 1 (del cálculo funcional restringido), *172.*
— sintáctica para cifras, IN 2.25.2.1.
— sintáctica para componentes de una lógica combinatoria, IN 2.25.2.11.
— sintáctica para expresiones del n-ésimo tipo y expresiones correspondientes a propiedades del n-ésimo tipo (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.5.
— (del formalismo de la conversión-λ), *202,* IN 2.41.2.
— libre (en una fórmula bien formada del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.1.
— ligada (en una fórmula bien formada del formalismo de la conversión-λ), IN 2.42.1.

Variable sintáctica para fórmulas bien formadas del formalismo de la conversión-λ, IN 2.25.2.10.
— del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), *v.* más abajo.
— individual (de una lengua formalizada), *v.* nombre. *V.* más abajo.
— sintáctica (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.
— (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.1.
— del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.14.
— individual (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.11.2.
— libre (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.5.4.
— ligada por un cuantificador (en una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.32.5.4.
— proposicional (de una lengua formalizada de tipo clásico), IN 2.31.1.15.
— individual (de la lógica de los predicados de primer orden), 77, 299.
— individual (de la lógica de los predicados de segundo orden), 307.
— predicativa (de la lógica de los predicados de segundo orden), 307.
— (de la lógica de las proposiciones), *37*.
— sintáctica para proposiciones, IN 2.25.2.7.
— sintáctica para proposiciones cerradas, IN 2.25.2.8.
— individual (en un esquema de recursión), *87*.
— sintáctica para series de símbolos (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.9.
— (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.31.1.
— sintáctica (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.23.1.
— sintáctica funcional (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.23.1.2.
— sintáctica individual (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.23.1.1.
— sintáctica predicativa (de la sintaxis de *LAI*), IN 2.23.1.3.
— individual (del sistema de PEANO), *35*.
— predicativa (del sistema de PEANO), *35*.
— individual (en un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *39*.
— sintáctico (para un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos), *40*.
— del primer tipo (del sistema P), *368*.
Variable del segundo tipo (del sistema P), *368*.
— del tercer tipo (del sistema P), *368*.
— del *n*-ésimo tipo (del sistema P), 368.
— sintáctica para términos (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.4.
— sintáctica para términos aritméticos, IN 2.23.1.4.
— sintáctica para variables del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.3.
— sintáctica para variables individuales (de una lengua formalizada), IN 2.25.2.2.
— sintáctica para variables proposicionales, IN 2.25.2.6.
— libre (en *LB*), IN 2.22.1.5.
— ligada por un cuantificador (en *LB*), IN 2.22.1.5.
— libre (de *LF*-λ), 202, *203*.
— ligada (de *LF*-λ), 202, *203*.
— funcional (de *LAI*), IN 2.21.3.2.
— individual (de *LAI*), IN 2.21.1.2.
— predicativa (de *LAI*), IN 2.21.4.2.
— (de *LFE*), *306*.
— (de *LFG*), *106*, *107*.
— del primer tipo (de *LFG*), *106*, *107*.
— del segundo tipo (de *LFG*), *166*. *V.* más abajo.
— del segundo tipo (de *LFG*), *106*. *V.* más arriba.
— del tercer tipo (de *LFG*), 106.
— del cuarto tipo (de *LFG*), 106.
— del *n*-ésimo tipo (de *LFG*), *108*, 109. *V.* más abajo.
— del tipo *n* (de *LFG*), 116-117. *V.* más arriba.
— de tipo (*n* + 1) (de *LFG*), *106*.
— individual (de *LFG*), *106*.
— predicativa (de *LFG*), *106*.
— sintáctica (para *LFG*), 108, *110*.
— individual (de *LFN*), 392.
— individual (de *LFN-G*), *188*.
— individual (de *LFN-V*), *262*.
— individual (de *LFP-A*), 392.
— (de *LFP*-ω), 309.
— eliminada por un operador de abstracción, IN 2.22.1.6.
— funcional, 77, 105 (n. 23), 106-107.
— formal, IN 1.46.
— formal (en el sentido de CURRY), *318*.
— individual, 88-89, *105 (n. 23)*, 202.
— libre, *40*, IN 2.22.1.5.
— ligada, *40*, IN 2.22.1.5.

Variable predicativa, *105 (n. 23)*, 299.
— predicativa de varios argumentos, 106-107.
— predicativa de orden 1, 77, 106-107, 299.
— predicativa de orden 2, 77.
— proposicional, *v.* más arriba.
— sustitutiva, IN 1.46.
— sustitutiva (en el sentido de CURRY), *318*.
Verdad, 66. *V.* concepto, criterio, noción, teorema, teoría, valor.
— (de un enunciado), 400-401.
Verdad intuitiva, *153*, *158*, 175.
Verdadero, 59, 80-81, 249, IN 2.24.2.1.22. *V.* enunciado, predicado, proposición.
— relativamente a un modelo de *LFP-A*, *v.* proposición.
— relativamente al predicado *Vri* de un sistema, *v.* proposición.

"Vollständigkeit, *70 (n. 9 y n. 11)*.
"Widerspruchsfrei", *68 (n. 4)*.
"Widerspruchsfreiheit", *68 (n. 4)*.

INDICE DE SIMBOLOS

INDICACIONES PRELIMINARES.

Los símbolos que figuran en esta tabla están ordenados en cinco grupos:

1) Cifras.
2) Símbolos formados por una sola letra (con o sin índices).
3) Símbolos formados por dos letras (con o sin índices)[1].
4) Símbolos formados por tres letras (con o sin índices)[2].
5) Otros símbolos.
6) Símbolos utilizados por GÖDEL.

Dentro de cada uno de los grupos 2, 3 y 4, he adoptado el orden siguiente:

Símbolos representados por letras itálicas (minúsculas y después mayúsculas).
Símbolos representados por letras alemanas (minúsculas y después mayúsculas).
Símbolos representados por letras griegas (minúsculas y después mayúsculas).

Dentro de cada una de estas clases de símbolos he seguido el orden lexicográfico.

La tabla indica en forma sumaria la naturaleza de cada uno de los símbolos (o de cada una de las categorías de símbolos) que en ella se mencionan. En los grupos 1 al 5 indica además en relación con cada símbolo (o categoría de símbolos) el número del Indice de Notaciones bajo el cual figura dicho símbolo (o dicha categoría de símbolos).

1. CIFRAS.

0, 1, 2, 3, ... : números enteros (de *LAI*) - 2.21.1.11.

---

[1] Como verá el lector, ciertos símbolos de este grupo contienen de hecho más de dos letras (como el símbolo *Cl-K*). Pero en esta clase de símbolos siempre van agrupadas las dos primeras letras y separadas de las otras por un guión. Así, pues, es fácil identificar, sin ninguna ambigüedad, los símbolos pertenecientes a este grupo.

[2] Como verá el lector, algunos símbolos de este grupo están formados de hecho por más de tres letras (como el símbolo *Dem-R*). Pero en esta clase de símbolos siempre van agrupadas las tres primeras letras y separadas de las siguientes por un guión. Por consiguiente, se pueden identificar sin ninguna ambigüedad los símbolos pertenecientes a este grupo.

2. SÍMBOLOS CONSTITUIDOS POR UNA SOLA LETRA (CON O SIN ÍNDICES)[3].

a, b, c, ... : símbolos de *LAI* designando números enteros bien determinados. 2.21.1.14.

A, B, C : constantes sintácticas para enunciados de *LAI* - 2.23.2.3.

A, B*, C** : designaciones sintácticas para expresiones de Ln_1 representando los enunciados *A, B, C* de *Ln* - 2.28.2.

*A**, B**, C*** : designaciones sintácticas para expresiones de Ln_2 representando las expresiones *A*, B*, C** de Ln_1 - 2.28.2.

E : constante individual de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos - 2.31.1.11.1. (V. págs. 56 y 63).

F, G, H : variables sintácticas funcionales de la sintaxis de *LAI* - 2.23.1.2.

I : constante individual de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos - 2.31.1.11.1. (V. pág. 56).

N_0, N_1, N_2, ... : constantes individuales de una lengua formalizada de tipo clásico (correspondiente a los enteros) - 2.31.1.11.1.

N_a, N_b, N_c, ... : constantes individuales de una lengua formalizada de tipo clásico (correspondiente a las constantes *a, b, c, ...* de *LAI*) - 2.31.1.11.1.

P, Q, R : variables sintácticas predicativas de la sintaxis de *LAI* - 2.23.1.3.

P, Q*, R** : predicados metateóricos no definidos explícitamente - 2.24.2.2.

U : constante individual de un sistema correspondiente a una teoría elemental de los grupos (elemento unidad) - 2.31.1.11.1. (V. pág. 39).

X, Y, Z : variables individuales de *LAI* - 2.21.1.2.

a, b, c, ... : símbolos utilizados en un sistema canónico - 2.5.

---

[3] Como se prevé en el Indice de Notaciones, la mayoría de los símbolos que figuran en la lista siguiente pueden ir afectados por índices. En el presente Indice damos por sobreentendido este hecho. Para ser totalmente explícito debiera mencionar, por ejemplo, en vez de "a, b, c...": "a, b, c... y estas mismas letras afectadas de índices numéricos o literales", etc. Pero esto no es en absoluto necesario, ya que este detalle no afecta al Indice de Notaciones.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$: símbolos abreviativos para proposiciones determinadas (en una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.31.2.1.

$\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$: símbolos abreviativos para proposiciones cerradas determinadas (en una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.31.2.2.

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$: símbolos abreviativos para expresiones funcionales determinadas (en una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.31.2.3.

$\mathfrak{Z}_C$: Proposición indecidible de CHWISTEK - 2.31.2.1.1. (V. pág. 387).

$\mathfrak{Z}_G$: proposición indecidible de la demostración abreviada dada por ROSSER del teorema de GÖDEL - 2.31.2.1.2. (V. pág. 377).

$\mathfrak{Z}_K$: proposición indecidible de la demostración abreviada dada por ROSSER de la forma de KLEENE del teorema de GÖDEL - 2.31.2.1.3. (V. pág. 379).

$\mathfrak{Z}_R$: proposición indecidible de la demostración abreviada dada por ROSSER de la forma de ROSSER del teorema de GÖDEL - 2.31.2.1.4. (V. pág. 378).

$\mathfrak{Z}_i$: proposición indecidible que figura en el teorema LXXII (190) - 2.31.2.1.5. (V. pág. 273).

$\mathfrak{Z}_U$: proposición indecidible que entra en la demostración del teorema LXXXVI (201) - 2.31.2.16. (V. pág. 290).

$\mathfrak{Z}_{Um}$: proposición de *LFT* que representa el enunciado: *La proposición* $\mathfrak{Z}_U$ *pertenece a la clase Cl-Dr* - 2.31.2.1.7. (V. pág. 290).

$\mathfrak{Z}^*$: proposición indecidible de GÖDEL (teorema VI (91)) - 2.31.2.2.1. (V. pág. 125).

$\mathfrak{Z}^*_K$: proposición indecidible cuya existencia queda demostrada gracias a la teoría de los predicados de KLEENE (teorema LXVII (179)) - 2.31.2.2.2. (V. pág. 253).

$\mathfrak{Z}_R$: proposición indecidible de ROSSER (teorema XI (117)) - 2.31.2.2.3. (V. pág. 165).

$\mathfrak{K}$: componente de una lógica combinatoria correspondiente a un operador de implicación - 2.61.3.1. (V. págs. 320 y 321).

$\mathfrak{L}$: componente particular de una lógica combinatoria - 2.61.4.1. (V. pág. 321).

$\mathfrak{M}$: componente particular de una lógica combinatoria - 2.61.4.2. (V. pág. 321).

$\mathfrak{R}$: componente de una lógica combinatoria correspondiente a un operador de negación - 2.61.3.2. (V. pág. 321).

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$: símbolos abreviatorios para expresiones predicativas determinadas (en una legua formalizada de tipo clásico) - 2.31.2.4.

$\mathfrak{T}$: proposición que figura en el lema de TARSKI (enunciado LXIX (188)) - 2.31.2.1.8. (V. pág. 268).

$\mathfrak{T}_m$: proposición de *LFT* que representa el enuunciado: *La proposición* $\mathfrak{T}$ *pertenece a la clase Cl-Rp* - 2.31.2.1.9. (V. pág. 268).

$\mathfrak{V}$: símbolo adjunto de una lógica combinatoria - 2.61.5.

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$: variables individuales de una lengua formalizada de tipo clásico y variables del formalismo de la conversión-λ - 2.31.1.11.2. y 2.41.2.

$\mathfrak{X}^n$, $\mathfrak{Y}^n$, $\mathfrak{Z}^n$: variables del *n*-ésimo tipo de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.14.

α, β, γ : variables sintácticas para individuos (en la sintaxis de *LAI*) - 2.23.1.1.

δ : variables sintácticas para términos aritméticos (en la sintaxis de *LAI*) - 2.23.1.4.

ϵ_0 : primer número ϵ - 2.21.1.13. (V. pág. 195).

κ : variables sintácticas para cifras (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.1.

λ : operador de abstracción del formalismo de la conversión-λ - 2.41.1.

μ, ν, ξ : símbolos de *LAI* que designan números ordinales transfinitos bien determinados - 2.21.1.15.

π : variables proposicionales de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.15.

σ : función *sucesor* de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.12. (V. págs. 106 y 108).

τ : variables sintácticas para términos (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.4.

φ, χ, Ψ : variables funcionales de *LAI* - 2.21.3.2.

ω : primer ordinal transfinito - 2.21.1.12.

A, B, Γ : variables sintácticas para proposiciones (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.7.

A*, B*, Γ* : variables sintácticas proposicionales cerradas (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.8.

Δ_1, Δ_2, ... : variables sintácticas para componentes de una lógica combinatoria - 2.25.2.11.

Δ_i, Δ_n, Δ_F Δ^*_F : ídem - 2.25.2.11.

Θ : variables sintácticas para variables individuales (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.2.

Θ^n : variables sintácticas para variables del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.3.

Λ^n : variables sintácticas para expresiones del *n*-ésimo tipo y expresiones correspondientes a propiedades del *n*-ésimo tipo (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.5.

Π : variables sintácticas para variables proposicionales (de una lengua formalizada de tipo clásico) - 2.25.2.6.

Σ : variables sintácticas para series de símbolos (de una lengua formalizada) - 2.25.2.9.

Υ : variables sintácticas para fórmulas bien formadas del formalismo de la conversión-λ - 2.25.2.10.

Φ, X, Ψ : variables predicativas de *LAI* - 2.21.4.2.

3. SÍMBOLOS FORMADOS POR DOS LETRAS CON O SIN ÍNDICES [4].

Al : nombres para expresiones algorítmicas - 2.26.1.1.

[4] Véase la nota 3 anterior.

Ba : nombres para bases - 2.26.1.2.

Cl : nombres para clases - 2.26.1.3.

Cl-Ci : clase de campos de interpretación - 2.26.1.3.1. (V. pág. 308).

Cl-Df : clase de proposiciones definibles en *LFT* - 2.26.1.3.2. (V. pág. 271).

Cl-Dr : clase de las proposiciones derivables de *LFT* - 2.26.1.3.3. (V. pág. 267).

Cl-DΩ : mínima clase de proposiciones de *LFT*-Ω conteniendo *Cl-Dr* y cerrada con respecto a la aplicación de la regla *Re-C* - 2.26.1.3.4. (V. pág. 274).

Cl-E 0 k : clase inicial de subconjuntos en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI - 2.26.1.3.5. (V. pág. 258).

Cl-Ejl : clase de subconjuntos en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI - 2.26.1.3.6. (V. pág. 259).

Cl-Ejk : ídem - 2.26.1.3.7. (V. pág. 258).

Cl-Enk : ídem - 2.26.1.3.8. (V. pág. 258).

Cl-E $(n+1)$ *k* : ídem - 2.26.1.3.9. (V. pág. 258).

Cl-Pr : clase de las proposiciones de *LFT* - 2.26.1.3.10. (V. pág. 267).

Cl-Rp : clase de las proposiciones de *LFT* representable en *LFT* - 2.26.1.3.11. (V. pág. 268).

Cl-U 0 k : clase inicial de subconjuntos en la teoría de las constantes de enteros definibles de MOSTOWSKI - 2.26.1.3.12. (V. pág. 258).

Cl-Ujk : clase de subconjuntos en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI - 2.26.1.3.13. (V. pág. 259).

Cl-Unk : ídem - 2.26.1.3.14. (V. pág. 258).

Cl-Un $(k+1)$: ídem - 2.26.1.3.15. (V. pág. 258).

Cl-U $(n+1)$ *k* : ídem - 2.26.1.3.16. (V. pág. 258).

Cl-Vr : clase de las proposiciones verdaderas de *LFT* - 2.26.1.3.17. (V. pág. 267).

Ct : nombres para constantes individuales (de una lengua formalizada) -
2.25.1.1.

Ec : nombres para elementos cualesquiera (de una lengua formalizada) -
2.25.1.11.

En : nombres para conjuntos -
2.26.1.4.

En-C : conjunto ordenado de parejas (Ba_m, k) -
2.26.1.4.1. (V. pág. 228).

En-Cf : conjunto de las parejas (Ba_m, k) correspondiente a enunciados falsos -
2.26.1.4.2. (V. pág. 228).

En-Cv : conjuntos de las parejas (Ba_m, k) correspondiente a enunciados verdaderos -
2.26.1.4.3. (V. pág. 228).

En-D : conjunto de enteros recursivamente enumerables, pero no recursivo -
2.26.1.4.4. (V. pág. 226).

En-Df (1) : conjunto de los elementos del primer tipo definibles en *LF* -
2.26.1.4.5. (V. pág. 297).

En-Df (2) : conjunto de los elementos del segundo tipo definibles en *LF* -
2.26.1.4.6. (V. pág. 297).

En-Df (3) : conjunto de los elementos del tercer tipo definibles en *LF* -
2.26.1.4.7. (V. pág. 297).

En-Df (k) : conjunto de los elementos del k-ésimo tipo definibles en *LF* -
2.26.1.4.8. (V. pág. 297).

En-Df (n) : conjunto de los elementos de n-ésimo tipo definibles en *LF* -
2.26.1.4.9. (V. pág. 297).

En-Df ($n+1$) : conjunto de los elementos del tipo ($n+1$) definibles en *LF* -
2.26.1.4.10. (V. pág. 297).

En-Di : dominio de individuos de *En-Fd* (ver más adelante) -
2.26.1.4.11. (V. pág. 300).

En-Dip : subdominio numerable de *En-Di* -
2.26.1.4.12. (V. pág. 301).

En-Dm$_0$: dominio (de un campo de interpretación) formado por los objetos *Vri* y *Fal* -
2.26.1.4.13. (V. pág. 309).

En-Dm$_1$: dominio funcional de un campo de interpretación -
2.26.1.4.14. (V. pág. 309).

En-Dm$_\alpha$: ídem -
2.26.1.4.15. (V. pág. 309).

En-Dm$_\beta$: ídem -
2.26.1.4.16. (V. pág. 309).

En-Dem$_\gamma$: ídem -
2.26.1.4.17. (V. pág. 309).

En-Dem$_{\beta\gamma}$: ídem -
2.26.1.4.18. (V. pág. 309).

En-E : conjunto de los conjuntos de enteros -
2.26.1.4.19. (V. pág. 347).

En-F : conjunto de las fracciones decimales que se pueden definir en lengua francesa mediante un número finito de signos -
2.26.1.4.20. (V. pág. 83).

En-Fd : campo de interpretación en que es realizable cierta clase numerable de proposiciones cerradas de la lógica de los predicados del primer orden -
2.26.1.4.21. (V. pág. 300).

En-H : conjunto hipersimple (de POST) -
2.26.1.4.22. (V. pág. 239).

En-K : conjunto completo (de POST) -
2.26.1.4.23. (V. pág. 239).

En-Kl$_1$: conjunto recursivamente enumerable que no puede ser separado de *En-Kl*$_2$ por un conjunto recursivo general -
2.26.1.4.24. (V. pág. 390).

En-Kl$_2$: conjunto recursivamente enumerable que no puede ser separado de *En-Kl*$_1$ por un conjunto recursivo general -
2.26.1.4.25. (V. pág. 390).

En-Kr : conjunto de KREISEL -
2.26.1.4.26. (V. pág. 394).

En-LFT : conjunto cuyos elementos proporcionan un modelo *LFT* -
2.26.1.4.27. (V. pág. 275).

En-Ru : conjunto formado por la reunión de los primeros elementos y de los segundos elementos de las parejas de conjuntos de números reales para los que se verifica cierto predicado -
2.26.1.4.28. (V. pág. 297).

*En-S*1 : conjunto de los enteros (en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI) -
2.26.1.4.29. (V. pág. 259).

En-Sak : subconjunto de *En-Sk* (ver más adelante) (en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI) -
2.26.1.4.30. (V. pág. 258).

En-Sbk : ídem -
2.26.1.4.31. (V. pág. 258).

En-Sb $(k+1)$: subconjunto de *En-S* $(k+1)$ (ver más adelante) (en la teoría de los enteros definibles de MOSTOWSKI) -
2.26.1.4.32. (V. pág. 258).

En-Sk : conjunto de todos los sistemas de k enteros (en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI) - 2.26.1.4.33. (V. pág. 258).

En-S $(k+1)$: conjunto de todos los sistemas de $(k+1)$ enteros (en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI) - 2.26.1.4.34. (V. pág. 258).

En-Spk : subconjunto de *En-Sk* (ver más arriba) formado por los sistemas de k enteros que verifican cierto predicado (en la teoría de los conjuntos de enteros definibles de MOSTOWSKI) - 2.26.1.4.35. (V. pág. 258).

$Ex^{(n)}$: nombres para expresiones del n-ésimo tipo (de una lengua formalizada) - 2.25.1.6.

Fd : constantes sintácticas para fracciones decimales (de *LAI*) - 2.23.2.2.

Fn : nombres para funciones (de una lengua formalizada) - 2.25.1.3.

LB : lengua de base - 2.11.

LB_0, LB_1, ... : partes de la lengua de base - 2.11.

LF : lengua formalizada en general - 2.13.

LF-$\mathfrak{W}$: sistema formal obtenido añadiendo el símbolo $\mathfrak{W}$ a una lógica combinatoria *LF* - 2.63 (3).

LF-λ : formalismo de la conversión-λ - 2.14.15. (Véase § 146, pág. 202).

Ln : nombres para lenguas cualesquiera - 2.26.1.5.

Ma : nombres para máquinas - 2.26.1.6.

Ma-m : ídem - 2.26.1.6.

Ma-D : máquina de decisión - 2.26.1.6.1. (V. pág. 216).

Ma-Em : máquina que permite determinar si una máquina dada *Ma-m* escribe o no un símbolo dado - 2.26.1.6.2. (V. pág. 218).

Ma-Fm : máquina que interviene en la demostración de corolario del teorema de TURING (enunciado XLVII (158)) - 2.26.1.6.3. (V. pág. 219).

Ma-G : máquina que calcula la serie *Syd* - 2.26.1.6.4. (V. pág. 217).

Ma-Hm : máquina que determina si una máquina dada *Ma-m* escribe 0 un número infinito de veces o no - 2.26.1.6.5. (V. pág. 219).

Ma-U : máquina universal - 2.26.1.6.6. (V. pág. 206).

Md : nombres para modelos - 2.26.1.7.

On : nombres para operaciones (sintácticas) - 2.26.2.2.

Op : nombres para operadores - 2.26.1.8.

Pb : nombres para problemas - 2.26.1.9.

Pd : nombres para predicados (de una lengua formalizada) - 2.25.1.4.

Pf : nombres para proposiciones cerradas (de una lengua formalizada) - 2.25.1.8.

Pr : nombres para proposiciones (de una lengua formalizada) - 2.25.1.7.

Re : nombres para reglas (sintácticas) - 2.26.2.1.

Re-C : regla de CARNAP - 2.26.2.1. (V. pág. 169).

Sp : nombres para series de proposiciones (de una lengua formalizada) - 2.25.1.9.

Sy : nombres para series de símbolos (de una lengua formalizada) - 2.25.1.10.

Te : nombres para términos (de una lengua formalizada) - 2.25.1.5.

Th : nombres para teorías - 2.26.1.10.

Va : nombres para variables individuales (de una lengua formalizada) - 2.25.1.2.

4. SÍMBOLOS FORMADOS POR TRES LETRAS CON O SIN ÍNDICES [5].

Akn : función de ACKERMANN - 2.21.3.1.4. (V. pág. 82).

[5] Véase la nota 3 anterior.

Akn$_a$: función auxiliar de ACKERMANN - 2.21.3.1.5. (V. pág. 82).

Akn$_b$: ídem - 2.21.3.1.6. (V. pág. 82).

Akn$_c$: ídem - 2.21.3.1.7. (V. pág. 82).

Brn : predicado de BERNAYS - 2.24.2.1.1. (V. pág. 379).

Bth : predicado de BETH - 2.24.2.1.2. (V. pág. 382).

Can : ser una componente canónica - 2.24.2.1.3. (V. pág. 328).

Can$_n$: ser una componente canónica de nivel *n* - 2.24.2.1.4. (V. pág. 328).

Cnt : función *constante* (de *LAI*) - 2.21.3.1.8. (V. pág. 88).

Cnv : ser convertible - 2.24.2.1.5. (V. pág. 204).

Crd : función de coordinación - 2.24.1.1. (V. pág. 158).

Crt : ser coherente - 2.24.2.1.6. (V. pág. 178).

Dis : función que representa el operador de disyunción - 2.24.1.2. (V. pág. 122).

Dem : ser derivable (en *LFG*) - 2.24.2.1.7. (V. pág. 123).

Dem-R : ser derivable en el sentido de ROSSER (en *LFG-R*) - 2.24.2.1.8. (V. pág. 161).

Dem-Ω : ser derivable en *LFG-*Ω - 2.24.2.1.9. (V. pág. 170).

Enm-K : función que enumera los números enteros asociados a las proposiciones derivables de *LFK* - 2.24.1.3. (V. pág. 158).

Enm-L : función que enumera los enteros α para los que $\mathfrak{A}_\alpha$ es derivable en *LFK*) - 2.24.1.3. (V. pág. 158).

Enm-R : función que enumera las proposiciones derivables de *LFG-R* - 2.24.1.3. (V. pág. 160).

Enm-λ : función que enumera las fórmulas en las que una fórmula dada de *LF-*λ es convertible - 2.24.1.3. (V. pág. 213).

Exp : función de exponenciación (de *LAI*) - 2.21.3.1.9. (V. pág. 85).

Fal : falso -
2.24.2.1.10. (V. pág. 60).

Fdr : ser una derivación (de *LFG*) -
2.24.2.1.11. (V. pág. 123).

Fdr-R : ser una derivación en el sentido de ROSSER (en *LFG-R*) -
2.24.2.1.12. (V. pág. 161).

Fkl : función de KLEENE -
2.24.1.4. (V. pág. 154).

Imp : función que representa el operador de implicación -
2.24.1.5. (V. pág. 179).

LAI : aritmética intuitiva -
2.12.

LFE : formalismo de SHEPHERDSON para la teoría de los conjuntos -
2.14.1. (V. pág. 305).

LFG : formalismo de GÖDEL -
2.14.2. (Véase Sección 2-III, pág. 105).

LFG_0 : formalismo de ROSSER idéntico a *LFG* -
2.14.3. (V. pág. 169).

LFG_1, LFG_2 .... : formalismos no-constructivos de ROSSER (son respectivamente 1, 2, ... usados de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 170).

LFG_n : formalismo no-constructivo de ROSSER (con n usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 170).

LFG_μ : formalismo no-constructivo de ROSSER (con μ usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 169).

$LFG_{\mu+1}$: formalismo no-constructivo de ROSSER (con $(\mu + 1)$ usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 169).

LFG_{μ_ν} : formalismo no-constructivo de ROSSER (con μ_ν usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 169).

LFG_ν : formalismo no-constructivo de ROSSER (con ν usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 169).

LFG_ξ : formalismo no-constructivo de ROSSER (con ξ usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 169).

$LFG_{\omega+n}$: formalismo no-constructivo de ROSSER (con $(\omega + n)$ usos de la regla *Re-C*) -
2.14.3. (V. pág. 170).

LFG-R : extensión de sistema *LFG* tal que la clase de las proposiciones derivables es recursivamente enumerable - 2.14.3. (V. pág. 160).

LFG-Ω : sistema formal cuya clase de las proposiciones derivables es la clase más pequeña de proposiciones que contienen los axiomas de *LFG* y que es cerrada a la vez con respecto a la aplicación de las reglas Re_1, Re_2 y *Re-C*) - 2.14.3. (V. pág. 170).

LFH : formalismo de HEYTING - 2.14.4. (V. pág. 186).

LFK : formalismo de KLEENE - 2.14.5. (V. pág. 157).

LFM : formalismo de MYHILL - 2.14.6. (V. pág. 323).

LFN : formalismo de la teoría clásica de los números - 2.14.7. (V. pág. 181).

*LFN** : formalismo obtenido añadiendo a *LFN* el esquema necesario para formalizar la definición de *Pvr* - 2.14.7. (V. pág. 186).

LFN-C : parte de *LFN* para la cual se puede dar una interpretación constructiva - 2.14.7. (V. pág. 197).

LFN-G : formalismo de GENTZEN para la teoría clásica de los números - 2.14.7. (V. pág. 188).

LFN-T : extensión de *LFN-G* en la cual se puede formalizar el principio de inducción extendido hasta un ordinal $\nu < \epsilon_0$ - 2.14.7. (V. pág. 195).

LFN-V : sistema correspondiente a la aritmética clásica - 2.14.7. (V. pág. 262).

LFP-A : lógica aplicada de los predicados de primer orden - 2.14.9. (V. págs. 220 y 392).

LFP-A_m : subsistema de *LFP-A* correspondiente a la teoría clásica de los números - 2.14.10. (V. pág. 393).

LFP-ω : lógica de los predicados aplicada de orden ω - 2.14.11. (V. pág. 309).

LFP-ωN : formalismo de la teoría clásica de los números obtenidos a partir de *LFP-ω* - 2.14.12. (V. pág. 312).

LFR : formalismo de KALMÁR - 2.14.13. (V. pág. 172).

LFT : formalismo de TARSKI - 2.14.14. (V. pág. 267).

LFT_1 : extensión de *LFT* en la cual es formalizable la teoría del predicado *Vri* relativa a *LFT* -
2.14.14. (V. pág. 275).

LFT_2 : extensión de LFT_1 en la cual es formalizable la teoría del predicado *Vri* relativo a LFT_1 -
2.14.14. (V. pág. 276).

LFT_ν : extensión de *LFT* a índice transfinito -
2.14.14. (V. pág. 276).

LFT-Ω : formalismo obtenido añadiendo a *LFT* la regla *Re-C* -
2.14.14. (V. pág. 274).

Mdj : función de un dominio funcional correspondiente al operador de disyunción -
2.27.2. (V. pág. 60).

Mdl : función de interpretación -
2.27.1.

Mem-Rp : ser miembro de la clase *Cl-Rp* -
2.24.2.1.13. (V. pág. 268).

Min : el menor número tal que ... -
2.21.3.1.10. (V. pág. 92).

Mip : función de un dominio funcional correspondiente al operador de implicación -
2.27.2. (V. pág. 60).

Neg : función que representa al operador de negación -
2.24.1.6. (V. pág. 121).

Nen : ser un número entero -
2.24.2.1.14. (V. pág. 52).

Ngd : función directa de GÖDEL -
2.25.4.21. (V. pág. 98).

Ngd^{-1} : función inversa de GÖDEL -
2.25.4.22. (V. pág. 98).

Nmc : número de enteros (comprendido entre 0 y el valor del argumento) que son los números-D de una máquina-T no-circular -
2.24.1.7. (V. pág. 217).

Pkl : predicado de KLEENE (de tres argumentos) -
2.24.2.1.16. (V. pág. 155).

$Pkl^{(n)}$: predicado de KLEENE (de $(n + 2)$ argumentos) -
2.24.2.1.15. (V. pág. 155).

Prm : ser un número primo:
2.24.2.1.17. (V. pág. 121).

Pro : ser una proposición de *LFG* -
2.24.2.1.18. (V. pág. 178).

Pvr : ser el número-G de una proposición verdadera (de *LFN*) -
2.24.2.1.19. (V. pág. 185).

Sbs : función especial de sustitución - 2.24.1.8. (V. pág. 126).

Scc : función *sucesor* (de *LAI*) - 2.21.3.1.11. (V. pág. 85).

$Sel^{(in)}$: función de selección (de *LAI*) aislando la *i-ésima* variable en una serie de *n* variables - 2.21.3.1.12. (V. pág. 88).

Seq-n : función de selección sobre la serie M-definible Sy_n - 2.24.1.9. (V. pág. 217).

Sim : función representando la propiedad de una proposición de ser consecuencia inmediata de otras dos proposiciones - 2.24.1.10. (V. pág. 236).

Sub : función representando la sustitución de una expresión por otra - 2.24.1.11. (V. pág. 122).

Unm : predicado que expresa la propiedad de una máquina de escribir 0 en el curso de una de las etapas de su funcionamiento (predicado de TURING) - 2.24.2.1.20. (V. pág. 220).

Un_v : función representando el cuantificador de universalización - 2.24.1.12. (V. pág. 122).

Val : función que ha de corresponder a un término de *LFN-V* el valor numérico de la expresión correspondiente de *LAI* - 2.24.1.13. (V. pág. 264).

Var : ser una variable del tipo *n* (de *LFG*) - 2.24.2.1.21. (V. pág. 121).

Vri : verdadero - 2.24.2.1.22. (Págs. 60, 262 y § 186 pág. 262).

$\mathfrak{Brn}$: expresión predicativa correspondiente al predicado *Brn* - 2.31.2.4.1. (V. pág. 379).

$\mathfrak{Bth}$: expresión predicativa correspondiente al predicado *Bth* - 2.31.2.4.2. (V. pág. 382).

$\mathfrak{Can}$: expresión predicativa correspondiente al predicado *Can* - 2.31.2.4.3. (V. pág. 328).

$\mathfrak{Can}_n$: expresión predicativa correspondiente al predicado Can_n - 2.31.2.4.4. (V. pág. 328).

$\mathfrak{Dsn}$: expresión funcional de *LFP-A* que permite representar en *LFP-A* la noción de *designación* relativa a $LFP\text{-}A_m$ - 2.31.2.3.1. (V. pág. 398).

$\mathfrak{Dsn}_I$: imagen-HB de $\mathfrak{Dsn}$ - 2.31.2.3.2. (V. pág. 399).

$\mathfrak{Ekr}$: expresión de *LFP-A* representando el conjunto *En-Kr* - 2.31.2.5.1. (V. pág. 394).

$\mathfrak{Ekr}_1$: imagen-HB de $\mathfrak{Ekr}$ -
2.31.2.5.2. (V. pág. 394).

$\mathfrak{Enm}$-λ : expresión funcional correspondiente a la función *Enm*-λ -
2.31.2.3.3. (V. pág. 213).

$\mathfrak{Ima}$: expresión funcional de *LFP*-A_m que hace corresponder a toda cifra de *LFP*-A_m su imagen-HB -
2.31.2.3.4. (V. pág. 394).

$\mathfrak{Inf}$: desigualdad funcional (de KALMÁR).
2.31.2.4.5. (V. pág. 173).

$\mathfrak{Klm}$: expresión funcional que interviene en la proposición indecidible de KALMÁR (enunciado XVIII) (126)) -
2.31.2.3.5. (V. pág. 173).

$\mathfrak{Nen}$: expresión predicativa de *LFT* correspondiente al predicado *Nen* -
2.31.2.4.6. (V. pág. 289).

$\mathfrak{Pfi}$: expresión predicativa correspondiente al predicado *Pkl* -
2.31.2.4.7. (V. pág. 253).

$\mathfrak{Sqn}$: expresión funcional de *LFP-A* que hace corresponder a todo término de *LFP-A* el sucesor de este término -
2.31.2.3.6. (V. pág. 398).

$\mathfrak{Sqn}_1$: imagen-HB de $\mathfrak{Sqn}$ -
2.31.2.3.7. (V. pág. 399).

$\mathfrak{Unm}$: expresión predicativa de *LFP-A* correspondiente al predicado *Unm* -
2.31.2.4.8. (V. pág. 220).

$\mathfrak{Wri}$: expresión predicativa de un sistema LF_1 que permite formalizar en ese sistema la noción de *verdad* relativa a otro sistema LF_0 -
2.31.2.4.9. (V. págs. 275 y 396).

$\mathfrak{Wri}_1$: imagen-HB de la expresión predicativa $\mathfrak{Wri}$ de *LFP-A* -
2.31.2.4.10. (V. pág. 396).

5. OTROS SÍMBOLOS.

$+$: función de *adición* de *LAI* -
2.21.3.1.1. (V. pág. 85).

$\times$: función de *multiplicación* de *LAI* -
2.21.3.1.2. (V. pág. 85).

$-$: función de *sustracción* de *LAI* -
2.21.3.1.3.

$=$: predicado de igualdad de *LAI*, constante predicativa de una lengua formalizada tipo clásico correspondiente al predicado de igualdad, predicado de igualdad de una lógica combinatoria -
2.21.4.1.1, 2.31.1.13.1. (V. pág. 319).

$=_1$: imagen-HB del predicado de igualdad de *LFP-A* - 2.31.1.13.2. (V. pág. 399).

$\neq$: diferente de (en *LAI*) - 2.21.4.1.2.

$>$: mayor que (en *LAI*) - 2.21.4.1.3.

$<$: menor que (en *LAI*) - 2.21.4.1.4.

$\geqq$: mayor que o igual a (en *LAI*) - 2.21.4.1.5.

$\leqq$: menor que o igual a (en *LAI*) - 2.21.4.1.6.

(: signo de agrupación de *LAI* de una lengua formalizada de tipo clásico y del formalismo de la conversión-λ - 2.21.5, 2.31.1.2 y 2.41.3.

) : ídem - 2.21.5, 2.31.1.2 y 2.41.3.

[: signo de agrupación de una lengua formalizada de tipo clásico. 2.31.1.2.

] : ídem - 2.31.1.2.

$\sim$: operador de negación de *LAI* y de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.22.1.1 y 2.31.1.3.

$\hat{x}$: operador de abstracción de *LAI* - 2.22.1.2.

(X) : cuantificador de universalización de *LAI* - 2.22.1.3.

(EX) : cuantificador de particularización de *LAI* - 2.22.1.4.

$\mathfrak{X}$: operador de abstracción de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.3.

$(\mathfrak{X}^1)$: cuantificador de universalización de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.3.

$(E\mathfrak{X}^1)$: cuantificador de particularización de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.31.1.3.

& : operador de conjunción de *LAI* y de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.22.2.1 y 2.31.1.3.

$\vee$: operador de disyunción de *LAI* y de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.22.2.2 y 2.31.1.3.

$\rightarrow$: operador de implicación de *LAI* y de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.22.2.3 y 2.31.1.3.

$\leftrightarrow$: operador de equivalencia de *LAI* y de una lengua formalizada de tipo clásico - 2.22.2.4 y 2.31.1.3.

$[.../...]$: operador (sintáctico) de sustitución - 2.25.4.1.

$\equiv$: operador (sintáctico) de definición - 2.25.4.3.

$\in$: relación de pertenencia de la teoría de los conjuntos y predicado de pertenencia de *LFP-A* - 2.29.1 y 2.31.1.13.3. (V. pág. 392).

$\in_I$: imagen-HB del predicado $\in$ de *LFP-A* - 2.31.1.13.4. (V. pág. 394).

$\subset$: relación de inclusión de la teoría de los conjuntos - 2.29.2.

$\vdash$: predicado de aserción de una lógica combinatoria - 2.61.1. (V. pág. 320).

6. Símbolos utilizados por Gödel.

0 : símbolo *cero* - § 238, 1.11.1.

a, b, c, ... : símbolos sintácticos para signos del 1.º o del *n*-ésimo tipo o para fórmulas - § 238, 1.12.1, 1.12.3 y 1.12.4.

f : función *sucesor* - § 238, 1.11.1.

r : designación sintáctica para signo de clase que entra en la proposición indecidible de Gödel (enunciado C (238)) - § 238, 3.1.

v : símbolo sintáctico para cualesquier variable - § 238, 1.2.

$x_1, y_1, z_1, \ldots$: variables del primer tipo - § 238, 1.11.2.

$x_2, y_2, z_2, \ldots$: variables del segundo tipo - § 238, 1.11.3.

$x_3, y_3, z_3, \ldots$: variables del tercer tipo - § 238, 1.11.4.

F : símbolo sintáctico para propiedades recursivamente definidas de números enteros - § 238, 3.26.

P : sistema formal utilizado por GÖDEL - § 237.

κ : símbolo sintáctico para clases de fórmulas - § 238, 3.1.

Π : cuantificador de universalización - § 238, 1.11.1.

Flg : Folgerungsmenge - § 238, 3.1.

Gen : símbolo sintáctico correspondiente al cuantificador de universalización - § 238, 3.1 y nota 19.

Neg : símbolo sintáctico correspondiente al operador de negación - § 238, 3.1 y nota 19.

$\sim$: operador de negación - § 238, 1.11.1.

V : operador de disyunción - § 238, 1.11.1.

(: símbolo de agrupación - § 238, 1.11.1.

) : ídem - § 238, 1.11.1.

$=$: predicado de igualdad (signo introducido como predicado de abreviatura) - § 238, 1.13.

(x) : cuantificador de universalización que puede figurar en una proposición aritmética - § 239, 1.

(Ex_i) : cuantificador de particularización (signo introducido como abreviatura) - § 238, 1.13.

$\supset$: operador de implicación (signo introducido como abreviatura) - § 238, 1.13.

$\equiv$: operador de equivalencia (signo introducido como abreviatura) - § 238, 1.13.

$[x_i/n]a$: operador sintáctico de sustitución - § 238, 3.1 y nota 16.

AXIOMAS Y REGLAS DEL SISTEMA *LFG* [1]

1. AXIOMAS.

Estos axiomas comprenden todas las proposiciones que pueden formarse a base de los esquemas siguientes, sustituyendo en ellos las variables sintácticas que presentan por expresiones correspondientes del sistema *LFG* [2]:

1.1. *Axiomas de Peano.*
1.11. $\sim (\sigma \tau_1 = N_0)$.
1.12. $(\sigma\tau_1 = \sigma\tau_2) \rightarrow (\tau_1 = \tau_2)$.
1.13. $\Lambda^2 N_0 \,\&\, (\Theta)\, [\Lambda^2 \Theta \rightarrow \Lambda^2 (\sigma \Theta)] \rightarrow (\Theta)\, \Lambda^2 \Theta$.

1.2. *Axiomas del cálculo de las proposiciones.*
1.21. $A \vee A \rightarrow A$.
1.22. $A \rightarrow A \vee B$.
1.23. $A \vee B \rightarrow B \vee A$.
1.24. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Gamma \vee A \rightarrow \Gamma \vee B)$.

1.3. *Axiomas para el cuantificador de universalización.*
1.31. $(\Theta^i)\, A\, (\Theta^i) \rightarrow [\Theta^i / \Lambda^i]\, A$
$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.
1.32. $(\Theta^i)\, (A \vee B) \rightarrow A \vee (\Theta^i)\, B$
$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

1.4. *Axiomas de reductibilidad.*
$(E\, \Theta^{i+1})\, (\Theta^i)\, (\Theta^{i+1}\, \Theta^i \leftrightarrow A)$
$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

---

[1] Véanse los §§ 79 y 80.

[2] Cada variable sintáctica debe sustituirse por una expresión del sistema *LFG*, que pertenezca a la categoría correspondiente a dicha variable. Así, la variable τ debe sustituirse por un *término*.

1.5. *Axiomas de determinación.*
$(\Theta^i)\,\Lambda_1^{i+1}\,\Theta^i \leftrightarrow \Lambda_2^{i+1}\,\Theta^i) \rightarrow \Lambda_1^{i+1} = \Lambda_2^{i+1})$
$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN.

2.1. *Regla de consecuencia.*

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}\ .$$

2.2. *Regla para el cuantificador de universalización.*

$$\frac{A\,(\Theta^i)}{(\Theta^i)\,A\,(\Theta^i)}$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

LISTA DE LOS TEOREMAS, LEMAS Y COROLARIOS

En esta lista recojo todos los teoremas, lemas y corolarios enunciados explícitamente en alguno de los capítulos I a X o en alguna de las notas I a IV.

Cada uno va precedido de su número de orden (en cifras romanas) y del número del párrafo en que figura (en notación arábiga).

NÚM. DE ORDEN	PÁRRAFO	
I.	86.	Teorema preparatorio 1 (referente a las funciones y a los predicados recursivos).
II.	86.	Teorema preparatorio 2 (ídem).
III.	86.	Teorema preparatorio 3 (ídem).
IV.	86.	Teorema preparatorio 4 (ídem).
V.	90.	Lema de GÖDEL.
VI.	91.	Teorema de GÖDEL.
VII	109.	Formulación del teorema de GÖDEL bajo hipótesis muy generales.
VIII.	113.	Lema de KLEENE.
IX.	115.	Teorema de KLEENE (forma kleeniana del teorema de GÖDEL).
X.	116.	Primer teorema de ROSSER (forma rosseniana del teorema de GÖDEL).
XI.	117.	Segundo teorema de ROSSER.
XII.	121.	Teorema de ROSSER referente a ciertas categorías de proposiciones.
XIII.	123	Teorema de ROSSER en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles en el sistema LFG_1.
XIV.	123.	Teorema de ROSSER en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles en los sistemas LFG_n.
XV.	123.	Teorema de ROSSER en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles en los sistemas $LFG_{\omega+n}$.
XVI.	123.	Teorema de ROSSER en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles en el sistema LFG-Ω.

XVII.	124.	Teorema (debido a GÖDEL) referente al cálculo funcional restringido.
XVIII.	126.	Teorema de KALMÁR.
XIX.	126.	Otra forma de este teorema.
XX.	127.	Corolario de GÖDEL.
XXI.	128.	Generalización del corolario de GÖDEL por ROSSER.
XXII.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia del sistema LFG_1 dentro de este mismo sistema.
XXIII.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia del sistema *LFG* dentro del sistema LFG_1.
XXIV.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia de los sistemas LFG_n dentro de esos mismos sistemas.
XXV.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia de los sistemas LFG_n dentro de los sistemas LFG_{n+1}.
XXVI.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia de los sistemas $LFG_{\omega+n}$ dentro de estos mismos sistemas.
XXVII.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia de los sistemas LFG_ν dentro de los sistemas $LFG_{\omega+n}$.
XXVIII.	128.	Teorema de ROSSER referente a la demostración de coherencia del sistema *LFG*-Ω dentro de estos mismos sistemas.
XXIX.	139.	Teorema de GENTZEN sobre la no-contradicción de la Aritmética.
XXX.	140.	Teorema de GENTZEN referente al número ordinal de una derivación.
XXXI.	149.	Teorema de KLEENE referente a las funciones recursivas primitivas.
XXXII.	149.	Teorema de KLEENE referente a las funciones recursivas generales.
XXXIII.	149.	Teorema de KLEENE referente a las funciones λ-definibles.
XXXIV.	149.	Teorema de CHURCH referente a las funciones parcialmente recursivas.
XXXV.	149.	Teorema de TURING referente a las funciones λ-definibles.
XXXVI.	149.	Teorema de TURING referente a las funciones M-definibles.
XXXVII.	151.	Teorema de CHURCH.
XXXVIII.	152.	Teorema de CHURCH (referente a la conversión).
XXXIX.	152.	Teorema auxiliar de CHURCH (referente a la forma normal de una fórmula).
XL.	153.	Corolario de CHURCH referente al problema de la decisión.
XLI.	154.	Corolario de CHURCH referente a las fórmulas bien formadas de *LF*-λ que carecen de forma normal.
XLII.	154.	Corolario de CHURCH referente al problema de la forma normal.

XLIII.	155.	Teorema de KLEENE referente a las ecuaciones que definen funciones recursivas generales.
XLIV.	155.	Corolario de este teorema en que se establece la existencia de una clase que no es recursivamente enumerable.
XLV.	155.	Corolario de este teorema en que se establece la existencia de una función que no es recursiva.
XLVI.	156.	Teorema de TURING.
XLVII.	158.	Corolario del teorema de TURING.
XLVIII.	159.	Primer lema de TURING referente al problema de la decisión.
XLIX.	159.	Segundo lema de TURING referente al problema de la decisión.
L.	159.	Teorema de TURING referente al problema de la decisión de la lógica de los predicados del primer orden.
LI.	161.	Teorema de POST referente al problema de la decisión para el sistema de los *Principia Mathematica.*
LII.	161.	Teorema de POST referente al problema general de la decisión para la clase de los sistemas normales.
LIII.	161.	Teorema de POST en que se preludia el de GÖDEL.
LIV.	162.	Teorema de POST referente a los conjuntos recursivos de enteros.
LV.	162.	Teorema de POST en que se establece la existencia de un conjunto de enteros no-recursivo.
LVI.	162.	Teorema de CHURCH referente a la clase de las fórmulas bien formadas de *LF*-λ que tienen una forma normal.
LVII.	163.	Teorema de POST.
LVIII.	164.	Teorema de POST en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles dentro de ciertos sistemas.
LIX.	164.	Generalizaciones del teorema precedente.
LX.	169.	Teorema de JANICZAK.
LXI.	170.	Teorema de POST referente al grado de insolubilidad de un problema insoluble.
LXII.	170.	Teorema de TARSKI referente al nivel de una proposición.
LXIII.	173.	Lema fundamental de la teoría de los predicados de KLEENE.
LXIV.	174.	Teorema de estratificación de KLEENE.
LXV.	177.	Forma de KLEENE del teorema de CHURCH.
LXVI.	178.	Forma kleeniana del teorema de GÖDEL.
LXVII.	179.	Teorema en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles por medio del teorema de estratificación de KLEENE.
LXVIII.	184.	Teorema de MOSTOWSKI. (Generalización del teorema de estratificación de KLEENE).

LXIX.	188.	Lema de TARSKI.
LXX.	189.	Teorema de TARSKI sobre la existencia de clases incompletas en *LF-T*.
LXXI.	190.	Generalización semántica del teorema de GÖDEL. (Forma de TARSKI del teorema de GÖDEL.)
LXXII.	190.	Forma del teorema de GÖDEL que fluye de esta generalización.
LXXIII.	191.	Extensión de esta generalización a lógicas no-constructivas.
LXXIV.	192.	Teorema de TARSKI referente al predicado *Vri*.
LXXV.	193.	Teorema sobre la verdad.
LXXVI.	194.	Formulación del teorema de GÖDEL en términos de clases de proposiciones.
LXXVII.	194.	Otra formulación del teorema de GÖDEL en términos de clases de proposiciones.
LXXVIII.	194.	Otra formulación del teorema de GÖDEL en términos de clases de proposiciones.
LXXIX.	194.	Formulación del teorema de GÖDEL en términos de clases de proposiciones para el sistema *LFT*.
LXXX.	195.	Forma de MOSTOWSKI del teorema de GÖDEL.
LXXXI.	196.	Primer lema de MOSTOWSKI.
LXXXII.	196.	Segundo lema de MOSTOWSKI.
LXXXIII.	198.	Forma de ROSSER del teorema de GÖDEL enunciada en términos de clases de proposiciones.
LXXXIV.	198.	Otra formulación de la forma de TARSKI del teorema de GÖDEL. (LXX).
LXXXV.	200.	Teorema sobre la verdad: forma directa.
LXXXVI.	201.	Nueva forma del teorema de GÖDEL demostrable por el método semántico.
LXXXVII.	205.	Teorema de TARSKI referente a la noción de *definible*.
LXXXVIII.	206.	Teorema de LÖWENHEIM.
LXXXIX.	206.	Corolario de este teorema.
XC.	208.	Teorema de SKOLEM.
XCI.	208.	Teorema referente a la coherencia de una lógica aplicada de los predicados del primer orden.
XCII.	208.	Nueva forma del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM.
XCIII.	215.	Primer teorema de HENKIN.
XCIV.	215.	Segundo teorema de HENKIN.
XCV.	215.	Tercer teorema de HENKIN.
XCVI.	215.	Generalización del teorema de LÖWENHEIM-SKOLEM.
XCVII.	216.	Teorema de HENKIN referente a los modelos no-regulares.
XCVIII.	222.	Teorema de KLEENE-ROSSER-CURRY.
XCIX.	238.	Forma original del teorema de GÖDEL. (Teorema VI de GÖDEL 3.)

C.	239.	Teorema (debido a GÖDEL) sobre las relaciones aritméticas. (Teorema VII de GÖDEL 3.)
CI.	239.	Teorema (debido a GÖDEL) sobre las proposiciones aritméticas indecidibles. (Teorema VIII de GÖDEL 3.)
CII.	239.	Primer teorema (debido a GÖDEL) sobre el cálculo restringido de las funciones. (Teorema IX de GÖDEL 3.)
CIII.	239.	Segundo teorema (debido a GÖDEL) sobre el cálculo restringido de las funciones. (Teorema X de GÖDEL 3.)
CIV.	240.	Teorema referente a la demostración de no contradicción del sistema P de GÖDEL. (Teorema XI de GÖDEL 3.)
CV.	242.	Lema de ROSSER referente a la función *Sbs*. (Lema I de ROSSER 5.)
CVI.	242.	Lema de ROSSER relativo a la proposición $\mathfrak{G}_G$. (Lema 2 de ROSSER 5.)
CVII.	242.	Lema de ROSSER referente a la proposición $\sim \mathfrak{G}_G$. (Lema 3 de ROSSER 5.)
CVIII.	251.	Forma de KALMÁR del teorema de GÖDEL.
CIX.	253.	Lema de KLEENE referente a los conjuntos recursivamente enumerables disyuntos.
CX.	253.	Teorema de USPÉNSKIJ referente a la no-saturación de un sistema.
CXI.	253.	Teorema de USPÉNSKIJ referente a la no-saturación efectiva de un sistema.
CXII.	254.	Lema de WANG referente al sistema *LFP-A*.
CXIII.	254.	Forma de WANG del teorema de KREISEL.
CXIV.	255.	Teorema de WANG en que se establece la existencia de proposiciones indecidibles que hacen intervenir la noción de *verdad*.
CXV.	255.	Teorema de WANG referente a la noción de *designación*.
CXVI.	255.	Teorema de WANG en que se establece la existencia de una proposición indecidible que hace intervenir la noción de *designación*.

OTRAS PUBLICACIONES DE EDITORIAL TECNOS

SEMILLA Y SURCO

Colección de Ciencias Sociales

I. SERIE DE CIENCIA POLITICA

ARON, RAYMOND: *Dimensiones de la conciencia histórica.* 210 págs.

BAINTON, ROLAND H.: *Actitudes cristianas ante la guerra y la paz.* (Examen histórico y nueva valoración crítica.) 248 páginas.

BELL, DANIEL: *El fin de las ideologías.* 570 págs.

BERGER, G.; CHEVALIER, J. J.; DURAND, CH.; DUVERGER, M.; FABRE, M.; MARE, A.; MATHIOT, A.; SIGMAN, J., y VEDEL, G.: *Federalismo y federalismo europeo.* 352 págs.

BISCARETTI DI RUFFIA, PAOLO: *Derecho constitucional.* 742 págs.

BUTLER, D. E.: *Estudio del comportamiento político.* 174 págs.

CELIS, JACQUELINE B. DE; *Los grupos de presión en las democracias contemporáneas.* 220 págs.

CHAMBRE, HENRY: *De Carlos Marx a Mao Tse-Tung.* (Introducción crítica al marxismo-leninismo.) 268 págs.

CHAMBRE, HENRY: *El marxismo en la Unión Soviética* (2.ª edición). 460 págs.

FIJALKOWSKI, JÜRGEN: *La trama ideológica del totalitarismo.* 354 págs.

FINER, HERMANN: *Teoría y práctica del gobierno moderno.* 1174 págs.

FINER, S. E.: *El imperio anónimo.* 234 páginas.

FOGARTY, MICHAEL P.: *Historia e ideología de la democracia cristiana en la Europa occidental.* 692 págs.

FRIEDRICH, C. J.: *El hombre y el Gobierno.* 768 págs.

FRIEDRICH, C. J.: *La democracia como forma política y como forma de vida* (2.ª edición). 230 págs.

HIRSCH-WEBER, WOLFGANG: *Los sindicatos en la política.* 312 págs.

HOFFMAN, STANLEY H.: *Teorías contemporáneas sobre las relaciones internacionales.* 352 págs.

JENNIGS, SIR IVOR: *El régimen político de la Gran Bretaña.* XXVIII + 198 páginas.

MAC IVER, ROBERT M.: *Teoría del Gobierno.* 438 págs.

MACKENZIE, W. J. M.: *Elecciones libres.* 202 págs.

MARTIN, KINGSLEY: *Harold Laski, teórico del laborismo.* 294 págs.

MEYNAUD, JEAN: *Introducción a la ciencia política* (2.ª edición). 336 págs.

MEYNAUD, JEAN: *La Tecnocracia, ¿mito o realidad?* 396 págs.

MOUSKHELY, M., y JEDRIKA, Z.: *El Gobierno de la U.R.S.S.* 348 págs.

NEUMANN, SIGMUND: *Partidos políticos modernos.* 672 págs.

PHILIP, ANDRÉ: *La democracia industrial.* 344 págs.

RAMÍREZ JIMÉNEZ, MANUEL: *Los grupos de presión en la Segunda República Española.* 360 págs.

ROSTOW, W. W.: *Los Estados Unidos en la palestra mundial.* 602 págs.

SCHATTSCHNEIDER, E. E.: *Régimen de partidos.* 260 págs.

STRAUSZ-HUPE, ROBER, y HAZARD, HARRY, W.: *La idea del colonialismo.* 394 páginas.

TIERNO GALVÁN, ENRIQUE: *Tradición y modernismo.* 190 págs.

TOUCHARD, JEAN: *Historia de las ideas políticas* (2.ª edición). 658 págs.

VERNEY, DOUGLAS V.: *Análisis de los sistemas políticos.* 218 págs.

* * *

GARZARO: *Del Socialismo ideológico al socialismo técnico.* 172 págs.

II. SERIE DE SOCIOLOGIA

BELLEVILLE: *Una nueva clase obrera.* 288 págs.

COMÍN: *España del Sur* (Aspectos económicos y sociales del desarrollo industrial de Andalucía). 616 págs.

DAHRENDORF: *Sociedad y libertad.* 360 páginas.

DAHRENDORF: *Sociedad y sociología.* (La ilustración aplicada). 280 págs.

FITZSIMONS: *La imagen del hombre.* 508 páginas.

GRAZIA: *Tiempo, trabajo y ocio.* 484 páginas.

HAWLEY: *Ecología humana* (2.ª edición). 436 págs.

HAWLEY: *La estructura de los sistemas sociales.* 244 págs.

HEINTZ: *Los prejuicios sociales.* 176 págs.

JARDILLIER, P.: *La organización humana de las empresas.* 488 págs.

MAC IVER & PAGE: *Sociología* (3.ª edición, reimpresión 1969). 736 págs.

MORÁN: *El nuevo reino* (Sentido de la política en Africa Negra). 260 págs.

MURILLO FERROL: *Estudios de sociología política.* 368 págs.

PÉREZ DÍAZ: *Estructura social del campo y éxodo rural.* 236 págs.

PETERSEN: *La población.* (Un análisis actual). 578 págs.

TIERNO GALVÁN: *Conocimiento y ciencias sociales* (2.ª edición muy aumentada de *Introducción a la sociología*). 240 págs.

III. SERIE DE RELACIONES INTERNACIONALES

AZCÁRATE: *Misión en Palestina.* Nacimiento del Estado de Israel. 232 págs.

DÍEZ DE VELASCO, TRUYOL, AZCÁRATE, MURILLO, CARRILLO, TIERNO, JIMÉNEZ DE PARGA, FIGUEROA, MEDINA, TORRES, GONZÁLEZ CAMPOS, MIAJA DE LA MUELA, MESA, PECOURT, AGUILAR NAVARRO: *ONU Año XX.* 420 págs.

JENKS: *El Derecho común de la Humanidad.* 448 págs.

MIAJA DE LA MUELA: *La emancipación de los pueblos coloniales y el Derecho internacional* (2.ª edición). 192 págs.

AGARWALA: *La economía del subdesarrollo.* 416 págs.

ALEXANDER: *La ciencia de la economía y las decisiones económicas.* 194 págs.

BAUER: *Análisis y política económica de los países subdesarrollados* (2.ª edición). 176 págs.

BETTELHEIM: *La India independiente.* 516 págs.

BETTELHEIM: *Problemas teóricos y prácticos de la planificación* (2.ª edición). 448 págs.

HARRIS: *La ciencia económica y la reforma social.* 392 págs.

HILFERDING: *El capital financiero.* 424 páginas.

JACOBSON: *Problemas monetarios internacionales y nacionales.* 288 págs.

LABROUSSE: *Fluctuaciones económicas e historia social.* 480 págs.

MEYNAUD: *La elaboración de la política económica.* 208 págs.

MORET: *Intercambio internacional.* 276 páginas.

MOULTON: *¿Se puede controlar la inflación?* 224 págs.

MOUSSA: *Las naciones proletarias* (2.ª edición). 184 págs.

PASDERMADJIAN: *La segunda revolución industrial.* 184 págs.

ROBERTSON: *Lecciones sobre principios de economía.* 376 págs.

ROBSON: *Industria nacionalizada y propiedad pública.* 504 págs.

SCHUMPETER: *Imperialismo. Clases sociales.* 336 págs.

TINBERGEN: *Ensayos de teoría económica.* 376 págs.

VELARCHÉ: *Economía agraria* (2.ª edición). 244 págs.

VINER: *Comercio internacional y desarrollo económico* (2.ª edición). 176 páginas.

* * *

PRADOS ARRARTE: *El Plan de Desarrollo de España* (1964-1967). Exposición y crítica. 312 págs.

FILOSOFIA Y ENSAYO

ABELLÁN, JOSÉ LUIS: *Miguel de Unamuno a la luz de la psicología.* Una interpretación de Unamuno desde la psicología individual. 244 págs.

ABELLÁN, JOSÉ LUIS: *Ortega y Gasset en la Filosofía Española.* Ensayos de apreciación. 184 págs.

DÍAZ, ELÍAS: *Revisión de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político. 216 págs.

DOPP, JOSEPH: *Nociones de lógica formal.* 252 págs.

ENJUTO BERNAL, JORGE: *La filosofía de Alfred North Whitehead.* 336 págs.

FERNÁNDEZ DE CASTILLEJO, JOSÉ LUIS: *Actualidad y participación.* Una filosofía contemporánea. 260 págs.

GURMÉNDEZ, CARLOS: *Ser para no ser.* Ensayo de una dialéctica subjetiva. 138 páginas.

NICOL, EDUARDO: *El problema de la Filosofía Hispánica.* 282 págs.

NICOL, EDUARDO: *Historicismo y Existencialismo* (2.ª edición corregida). 432 páginas.

RAMA, CARLOS M.: *Teoría de la Historia* (2.ª edición). Introducción a los estudios históricos. 200 págs.

SÁNCHEZ DE LA TORRE, ANGEL: *Los griegos y el Derecho Natural.* 344 páginas.

SOTELO, IGNACIO: *Sartre y la razón dialéctica.* 164 págs.

TIERNO GALVÁN, ENRIQUE: *Acotaciones a la Historia de la Cultura Occidental en la Edad Moderna.* 344 págs.

En preparación:

GARCÍA SAN MIGUEL, LUIS: *Ciencia y Filosofía del Derecho.* Una crítica de la Razón Jurídica.

HUGHES, JOHN B.: *Cadalso y la trayectoria humana de las Cartas Marruecas.*

TIERNO GALVÁN, ENRIQUE: *Razón mecánica y razón dialéctica.*

somete a un tratamiento riguroso, según reglas precisas, a un sistema de símbolos, permite avanzar con paso seguro por terrenos que eran objeto de la intuición o el hallazgo casual. Por otra parte, el método de la formalización tiene sus límites, tanto internos como externos.

El profesor Jean Ladrière trata en este libro, que ha tenido por la crítica una acogida sumamente favorable, del problema de las limitaciones internas de los formalismos. Después de un análisis pormenorizado de la noción de sistema formal, examina cuidadosamente el significado del Teorema de Gödel, poniéndole en conexión con las hipótesis más importantes de los lógicos y matemáticos modernos de mayor valía.

El libro de Ladrière, enriquecido por una tabla de símbolos y una selecta bibliografía, no sólo es un paso adelante en el estudio de la formalización, sino un resumen prácticamente imprescindible para conocer el estado de la cuestión en los últimos años.